La caractérisation de la rigi d'éléments de meuble par (première partie)

LUC CHEVALIER, HEBA MAKHLOUF ET BENOÎT JACQUET-FAUCILLON [1]

L'arrivée d'outils de simulation numérique a révolutionné la conception des assemblages, mais dans le monde de l'ameublement leur entrée est bien plus récente. Cette première partie s'attache à étudier la rigidité d'un assemblage bois qualifié de parfait.

mots-clés
modélisation, résistance des matériaux, simulation

Problème classique en génie civil où les assemblages entre poutres, poutrelles et autres éléments de structures sont réalisés avec des rivets, des boulons, des soudures…, la détermination de la rigidité de la liaison, intermédiaire entre « l'encastrement parfait » et la « rotule libre », est un problème délicat. Le monde de l'ameublement, qui utilise depuis moins longtemps les techniques numériques pour déterminer rigidités et résistances des meubles, est confronté à une problématique du même type. Notre objectif ici est de présenter (en deux parties) l'approche multiéchelle utilisée afin de définir puis de prendre en compte dans un calcul par éléments finis (EF) de type poutre l'effet du comportement des assemblages entre montants de meubles.

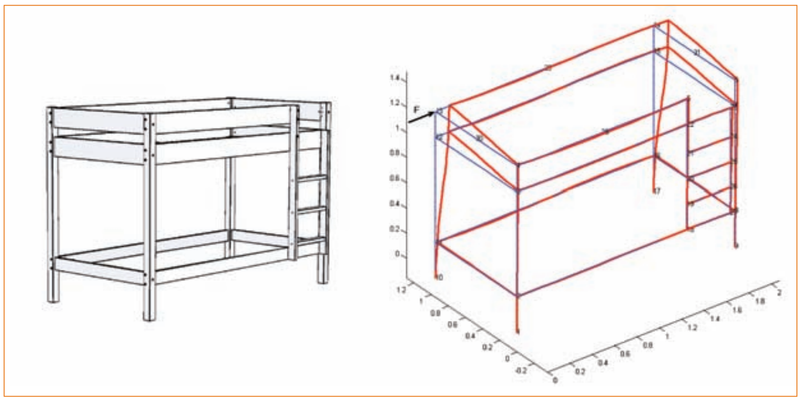
Cette première partie présente la démarche de caractérisation de la « rigidité » d'un assemblage parfait, c'est-à-dire pour lequel les deux montants sont parfaitement solidaires comme s'ils avaient été collés ou s'ils constituaient un solide unique. C'est l'occasion de faire un point sur le comportement non isotrope d'un matériau courant tel que le bois (l'épicéa en l'occurrence) ainsi que sur la mise en œuvre de la simulation par éléments finis via plusieurs modèles (poutre, 3D), et enfin de se remémorer les bases de la RDM.

La partie II s'attachera à répondre au problème scientifique posé : caractériser l'influence des composants d'assemblage (vis, écrou noyé, tourillons…) dans la « rigidité » de l'assemblage réel avec prise en compte du serrage de la vis, du contact unilatéral entre les montants. Cette caractérisation permettra de définir des éléments finis 0D (ponctuels) pour représenter la jonction entre deux poutres d'une modélisation par éléments finis d'un meuble.

Le contexte de l'étude et le problème posé

L'étude MSME/FCBA en cours : « Essais virtuels pour l'industrie du meuble »

Le travail présenté constitue une contribution à une collaboration de recherche entre le laboratoire Modélisation et Simulation multiéchelle (MSME UMR 8208 CNRS) de l'université de Paris-Est Marne-la-Vallée et le pôle Ameublement de FCBA (l'institut technologique Forêt cellulose bois-construction ameublement, qui s'implantera à la cité Descartes de Marne-la-Vallée, à côté de l'ESIPE, à la fin de 2014). Il a été initié dans le cadre d'un stage étudiant à l'ESIPE, et se poursuit actuellement dans le cadre d'une thèse. FCBA réalise de nombreux essais normalisés sur les meubles produits par l'industrie de l'ameublement. Ces essais sont coûteux, et ne permettent qu'a posteriori de connaître la capacité des meubles testés à résister aux efforts appliqués. FCBA souhaite donc développer une stratégie de modélisation mécanique de ces essais au bénéfice



1 Vue du lit haut et modélisation à base de poutres (sans lattes ni échelle) avec déformée sous chargement horizontal au point 13. Ici les encastrements entre les poutres sont supposés parfaits (les angles droits restent droit)

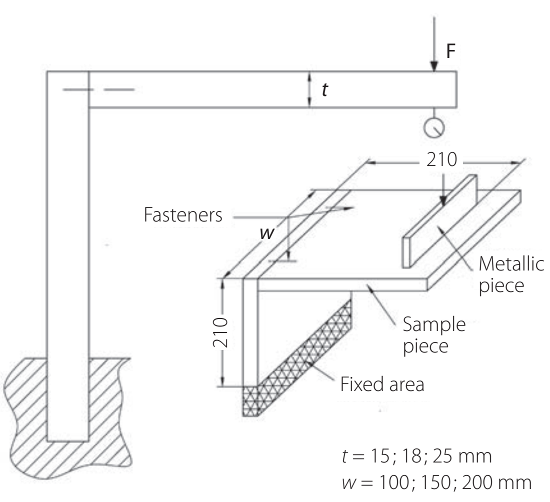
[1] Respectivement : professeur à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée, directeur de l'école d'ingénieurs ESIPE ; doctorante au laboratoire MSME UMR 8208 CNRS à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée ; professeur agrégé à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée, dirige la formation d'ingénieurs en génie mécanique de l'ESIPE.

dité des assemblages
la simulation numérique

des industriels du meuble. Dans l'industrie mécanique, ce type de modélisation repose généralement sur la méthode des éléments finis, qui s'est développée d'abord pour des secteurs dont les enjeux étaient de type sécuritaire (tels que l'aéronautique, l'automobile…), à forte valeur ajoutée, ou pour lesquels les prototypes avec crash tests sont impossibles ou très onéreux. Le secteur de l'ameublement, aux ressources en investissement moins importantes, n'a pas intégré l'approche par simulation numérique aussi vite que l'automobile, l'aéronautique ou le génie civil, mais doit tenir compte des difficultés liées à l'usage de matériaux au comportement non standard (bois anisotrope, plastique hyperélastique, mousses, tissus…).

La problématique : décrire le comportement d'un assemblage de 2 éléments de façon compatible avec la théorie des poutres

Dans une structure de type lit superposé, par exemple, les montants, les rambardes, les échelons et même les



2 La représentation schématique d'un test de rigidité réalisé sur un assemblage. L'effort F donne un moment M dans l'angle qui vaut $d \cdot F$ (ici $d \approx 210$ mm), et le déplacement δ mesuré par le comparateur permet d'estimer la rotation θ à δ / d. Les auteurs en déduisent que la rigidité en rotation de l'assemblage vaut $k_\theta = M / \theta = d^2 F / \delta$

lattes sont des constituants très élancés qui peuvent être modélisés par des poutres dans un calcul de résistance ou de rigidité. Lorsque ces éléments sont en bois, la caractérisation du comportement est déjà un problème délicat. Le fibrage du bois conduit à une anisotropie du comportement ; la présence de nœuds de taille et d'orientation variables dans la planche induit de l'hétérogénéité de comportement ; la zone de prélèvement de la planche dans l'arbre et son orientation par rapport aux anneaux du tronc, l'origine géographique de l'arbre sont autant de facteurs qui conduisent à de la dispersion et de la variabilité de comportement du meuble. Cela peut nécessiter une approche probabiliste dans la simulation de la résistance des meubles…

Au-delà de la difficulté de caractérisation du comportement des poutres elles-mêmes (matériau bois anisotrope), la manière dont elles sont assemblées possède aussi un effet sur la rigidité : dans le cas des lits superposés en épicéa, les assemblages sont réalisés via des tourillons (goupilles en bois) pour la mise en position et des vis généralement associées à des écrous métalliques ou des inserts dans le montant en bois. La position des tourillons et des vis, leur nombre, l'effort de serrage dans les vis…, tout rend l'assemblage plus ou moins rigide, et l'étude utilise la simulation par éléments finis en 3D sur un assemblage type pour quantifier cette rigidité et l'influence des composants tourillons, vis, inserts. Dans un second temps, on souhaite que cette information puisse être rendue compatible avec une simulation de type poutre 1 où chaque montant est représenté par une ligne et où l'assemblage est réduit à un point d'intersection entre les lignes moyennes des poutres qui sont assemblées.

La démarche proposée : à partir de calculs 3D, identifier les termes d'une matrice de souplesse [S] entre les déplacements relatifs et les efforts de liaisons

Plusieurs équipes de recherche ont tenté expérimentalement de caractériser le comportement d'un assemblage en isolant un bout de montant et un bout de garde-corps par exemple, et en réalisant un essai pour le déformer comme on peut voir en 2.

Cette approche simple est évidemment assez imprécise et vite limitée, car :
❶ la relation entre θ et δ suppose que le montant est infiniment « rigide » ;
❷ le résultat obtenu est assez sensible au choix de *d*, ce qui rejoint le point ❶ ;
❸ la mise en œuvre d'essais pour quantifier l'effet d'efforts dans le plan horizontal est assez délicate ;
❹ tester de manière systématique la position des tourillons ou vis, du couple de serrage des vis… se révèle assez vite laborieux expérimentalement.

En s'appuyant sur la simulation numérique 3D (utilisation de SolidWorks), nous allons résoudre ce problème et lever les réserves de ❶ à ❹. D'abord, par simulation numérique, imposer des efforts sur l'assemblage dans n'importe quelle direction est un jeu d'enfant : exit la réserve ❸. De même, à partir du moment où les options du logiciel retenu le permettent, tester l'influence du nombre et des positions des éléments d'assemblage est possible en pilotant le modèle CAO par une esquisse pilotante ou une configuration (gestion des valeurs par une table éditable sous Excel) : exit la réserve ❹.

En ce qui concerne l'influence de la distance *d* ou de la taille des montants, la solution consiste à s'appuyer sur le principe de superposition (valable seulement si le comportement est linéaire) et à déterminer la contribution de l'assemblage en faisant la différence entre la rigidité d'un coin parfait (le montant et le garde-corps seraient parfaitement collés ou adhérents dans le modèle) et la rigidité du coin réel (c'est-à-dire avec vis, tourillons, contact, serrage…). Dans les deux cas, parfait ou réel, les éléments assemblés (montants et garde-corps) sont de même géométrie et affectés des mêmes caractéristiques mécaniques.

Cette approche est donc indépendante de la longueur *d* choisie pour les bouts de montants. Elle conduit à une matrice qui pourrait être obtenue expérimentalement à condition que les éléments d'assemblage soient fixés sur des montants infiniment rigides. Cette procédure lève à la fois la réserve ❶ et la réserve ❷.

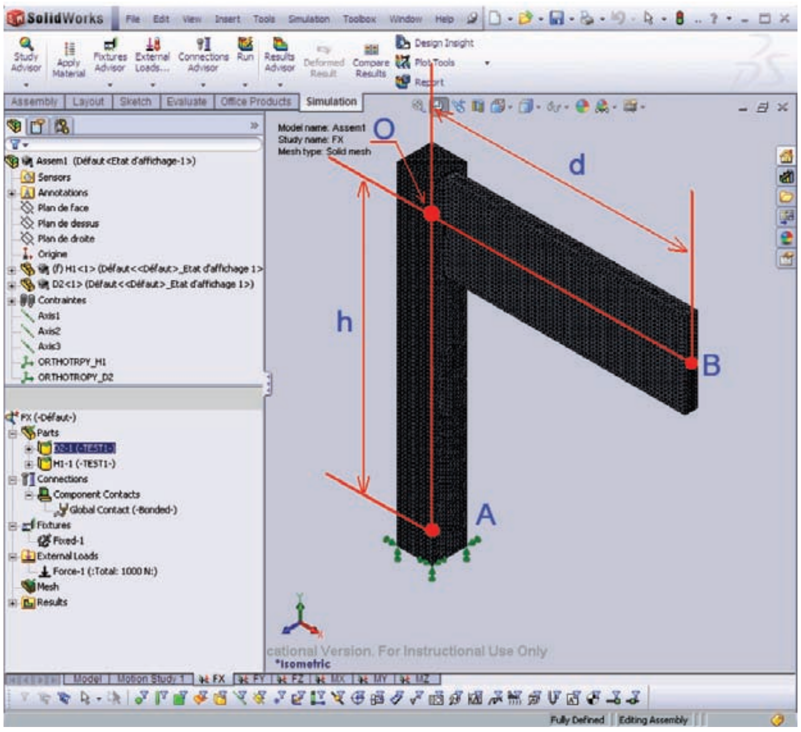
Dans cette première partie, nous allons détailler l'approche permettant la construction de la matrice de rigidité de l'assemblage « coin parfait ». Dans la seconde, nous présenterons l'influence des éléments d'assemblage (vis, tourillon…) sur la réponse du coin réel et son implémentation dans un code de calcul à base de poutres.

Partie I : l'étude de la rigidité d'un coin parfait

● Les dimensions du coin retenues pour l'ensemble de l'étude 3

Le montant vertical est à section carrée de 57 mm de côté, le garde-corps possède une section rectangulaire 20 mm × 140 mm. Les deux éléments sont en épicéa.

La longueur des éléments est telle que les lignes moyennes des deux poutres se coupent en O à une hauteur $h = 477$ mm par rapport à l'encastrement en A



3 La simulation par éléments finis sous SolidWorks d'un assemblage « coin parfait » entre deux éléments du lit haut

et à une distance $d = 428{,}5$ mm du point d'application des forces en B.

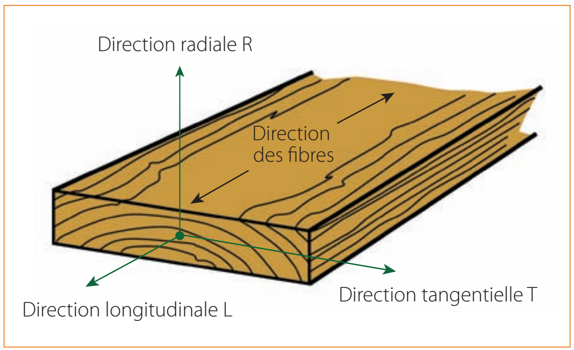
Dans cette première partie, les problèmes que nous sommes amenés à résoudre étant élastiques et linéaires, les valeurs des charges importent peu pour l'évaluation des rigidités. Néanmoins, pour obtenir des déformées réalistes, nous choisissons d'imposer des efforts X, Y et Z de 1 000 N (valeur normalisée des tests de validation des meubles) et des moments L, M et N de 500 000 N·mm, qui correspondent à ces efforts multipliés par un demi-bras de levier de 1 000 mm (le mètre correspond à la dimension caractéristique des lits).

La modélisation par éléments finis d'un assemblage entre un montant et un garde-corps

La géométrie du modèle est conforme à celle présentée en 3. Le montant est encastré en A (les nœuds de la surface sont fixes), et les chargements correspondant aux cas d'étude seront imposés en B via les surfaces. Dans cette partie, nous développerons plus précisément les problématiques liées aux données matérielles, au maillage, et nous dégagerons les indicateurs de qualité du modèle (qualité des éléments finis, vérification de la convergence des résultats et estimation de l'erreur).

La caractérisation du comportement du matériau

Le bois est assimilé à un matériau orthotrope, puisque ses propriétés mécaniques diffèrent selon les trois directions définies par rapport au sens des fibres. Dans ce qui suit, l'axe *x* (longitudinal) est associé à



4 Les trois directions principales relatives aux fibres et aux anneaux de croissance du bois

la direction des fibres, et les axes *y* et *z*, respectivement radial et tangentiel, aux deux autres directions perpendiculaires **4**.

La rigidité du bois dans la direction radiale R est différente de celle dans la direction tangentielle T (facteur qui peut atteindre 2). Mais cette différence est bien plus faible que celle qui existe entre la rigidité longitudinale et les deux précédentes (facteur de l'ordre de 10 à 20). Aussi nous négligerons la différence entre la rigidité radiale et tangentielle et assimilerons l'épicéa à un matériau isotrope transverse dont le plan RT est le plan d'isotropie transverse. Ce plan est orthogonal à la direction des fibres.

Un matériau isotrope transverse est caractérisé par cinq constantes indépendantes E_x, E_y, G_{xy}, ν_{xy} et ν_{xz} identifiées à partir de l'expression de la loi de Hooke généralisée suivante où *x* est l'axe longitudinal des fibres :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\,\varepsilon_{yz} \\ 2\,\varepsilon_{zx} \\ 2\,\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

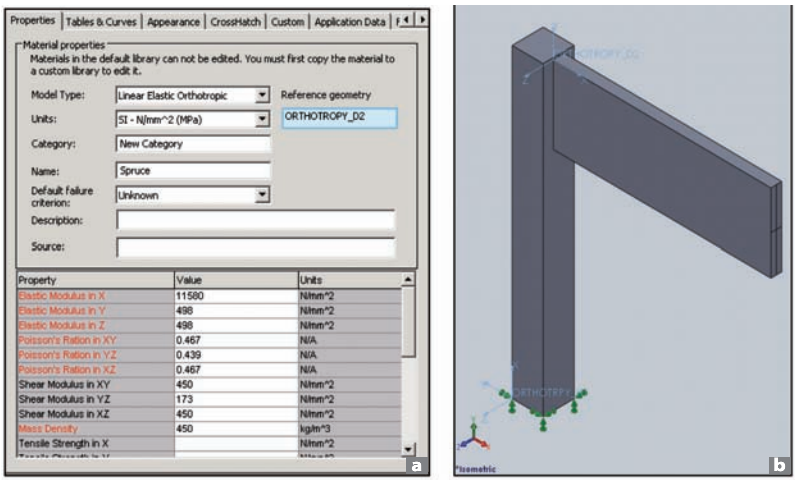
Avec

$$E_y = E_z \qquad G_{xy} = G_{xz} \qquad G_{yz} = E_y / 2(1 + \nu_{yz})$$

et

$$\nu_{yx} / E_y = \nu_{xy} / E_x \qquad \nu_{xy} = \nu_{xz} \qquad \nu_{yx} = \nu_{zx} \qquad \nu_{zy} = \nu_{yz}$$

Le modèle de comportement renseigné dans le logiciel est un modèle linéaire élastique orthotrope relatif à un repère de référence dont l'axe *x* est celui des fibres (il faut évidemment veiller à orienter ce repère



5 Le modèle de comportement renseigné dans le logiciel
a Les propriétés mécaniques du matériau
b Repères permettant d'orienter les directions des deux pièces du coin

pour chaque pièce afin d'aligner l'axe *x* avec la direction voulue pour les fibres) **5**. Les valeurs des propriétés mécaniques de l'épicéa ont été renseignées à partir de bases de données issues de la littérature et validées par des essais mécaniques de flexion 3 points réalisés au laboratoire MSME. Grâce à une technique de mesure de champ de déformation, ces essais permettent d'identifier en même temps le module élastique longitudinal E_x = 11 580 MPa et le module de cisaillement G_{xy} ou G_{xz} = 450 MPa.

Le principe de la méthode des éléments finis en mécanique

Un problème d'analyse des solides déformables peut être résolu si l'on parvient à connaître le champ de déplacement en tout point du milieu (les champs de déformation et de contrainte sont ensuite calculés à partir du champ de déplacement). La complexité de ce champ et des géométries des composants mécaniques rend vite ces calculs impossibles analytiquement.

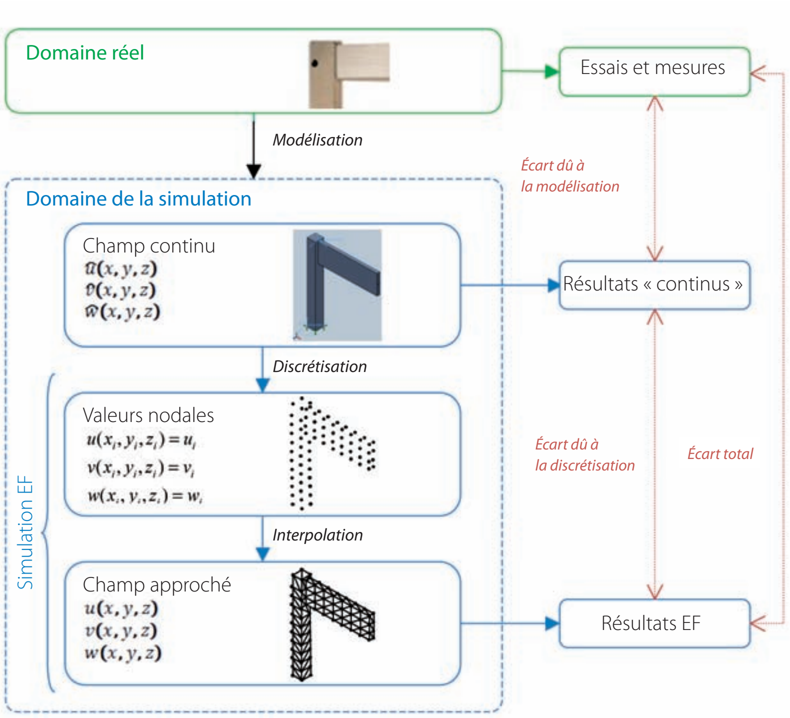
La méthode aux éléments finis consiste à simplifier la résolution en approximant le champ continu par un champ approché (lui aussi continu). Elle repose sur deux principes : la discrétisation et l'interpolation.

La discrétisation consiste à restreindre le calcul à un nombre fini de points du milieu (les nœuds du maillage). Le champ de déplacement est ainsi défini en chaque nœud. Ce sont les valeurs nodales.

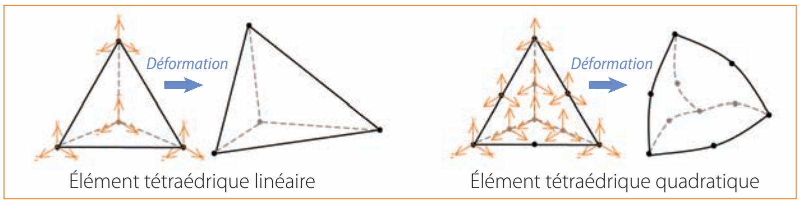
Les valeurs du champ de déplacement dans chaque maille joignant un groupe de nœuds sont approchées par interpolation des valeurs nodales à l'aide de fonctions mathématiques appelées fonctions de forme ou fonction d'interpolation.

La structure finale est ainsi reconstituée en considérant toutes les mailles composant le milieu **6**.

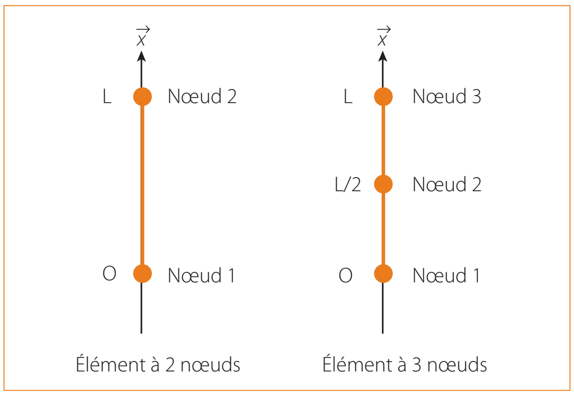
La qualité de l'approximation, écart entre le champ approché par la modélisation et le champ continu, peut être quantifiée par l'erreur entre ces deux champs.



6 La démarche de modélisation et les écarts entre réel et modèles



7 Éléments tétraédriques avant et après déformation



8 Éléments 1D à 2 et 3 nœuds de longueur L

Le modèle est de qualité lorsqu'il permet d'aboutir à une précision suffisante (une erreur admissible pour l'étude donnée) pour un temps de calcul minimal. Pour un moyen de calcul donné (défini par la puissance de calcul de l'ordinateur), ce temps de calcul dépend du nombre de calculs à réaliser, lui-même lié au nombre de degrés de liberté (ddl) de la structure et donc au nombre de nœuds (3 ddl par nœud en 3D avec des éléments volumiques).

Les éléments finis proposés par le logiciel

Le mailleur volumique de SolidWorks Simulation est un mailleur dit libre, car il n'impose aucune contrainte à l'utilisateur (le nombre d'éléments n'est a priori pas défini). Lors de la discrétisation, il recourt uniquement à des éléments de type tétraédrique permettant un maillage automatique de pièces de forme complexe : la peau de la pièce est maillée à l'aide d'éléments triangulaires, puis les éléments sont construits vers l'intérieur du domaine. Le seul élément fini généré est le tétraèdre.

Les éléments tétraédriques proposés peuvent être linéaires ou quadratiques, appelés respectivement dans le jargon de l'éditeur mailles de « qualité moyenne » et mailles de « haute qualité » 7. Les éléments sont définis par leur nombre de nœuds et par les fonctions de forme permettant d'interpoler le champ de déplacement. Le cadre classique des éléments finis est limité aux fonctions polynomiales des coordonnées.

Les éléments tétraédriques linéaires disposent de 4 nœuds aux sommets, donc de 12 ddl (3 translations à chaque nœud dans le repère structural).

Les éléments tétraédriques quadratiques disposent de 10 nœuds (4 aux sommets et 1 au milieu de chaque arête soit, au total, 6 nœuds médians), donc de 30 ddl.

Quid de la fonction de forme ?

Comme nous l'avons vu précédemment, la méthode des éléments finis en mécanique consiste, après discrétisation, à déterminer aux nœuds le champ de déplacement (valeurs nodales u_i), puis à définir par interpolation entre ces nœuds un champ $u(x, y, z)$ continu et approché du champ continu $\hat{u}(x, y, z)$ 6.

La continuité du champ approché est assurée par des fonctions mathématiques d'interpolation appelées fonctions de forme. Au i-ième nœud, u_i est la valeur de déplacement et $N_i(x, y, z)$ est la fonction de forme associée à ce nœud. Les fonctions de forme $N_i(x, y, z)$ représentent le poids associé à chacun des nœuds de l'élément et permettent de décrire l'évolution du champ à l'intérieur du domaine d'interpolation.

$$\hat{u}(x,y,z) \approx u(x,y,z) = \sum_{nœuds} N_i(x,y,z) \cdot u_i$$

Illustrons l'influence des fonctions de forme sur un cas simple (éléments linéiques à 2 ou 3 nœuds) afin de dégager nos premières conclusions 8.

Il existe plusieurs méthodes pour construire les fonctions de forme. Nous utiliserons ci-après la méthode directe : les fonctions de forme sont des polynômes complets (choisis dans le triangle de Pascal) de degré minimal ayant un nombre de coefficients égal au nombre de variables nodales. Ainsi les polynômes d'interpolation sont directement liés au nombre de nœuds.

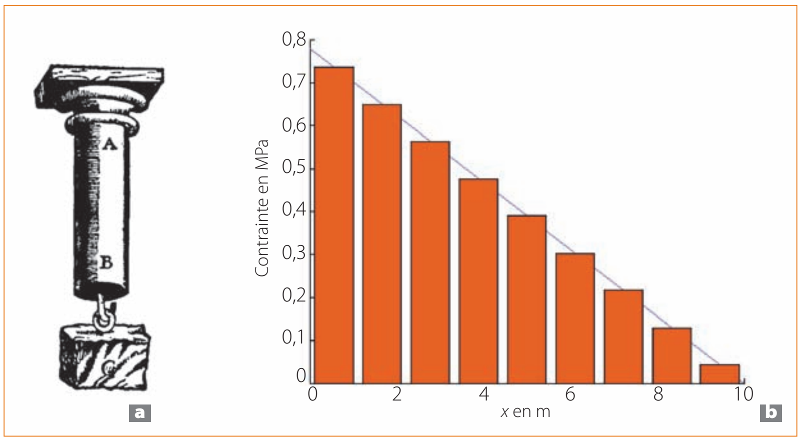
Dans le cas d'éléments 1D, le champ de déplacement s'écrit comme suit :

- Pour l'élément 1D à 2 nœuds, le polynôme est de degré 1 (linéaire) :

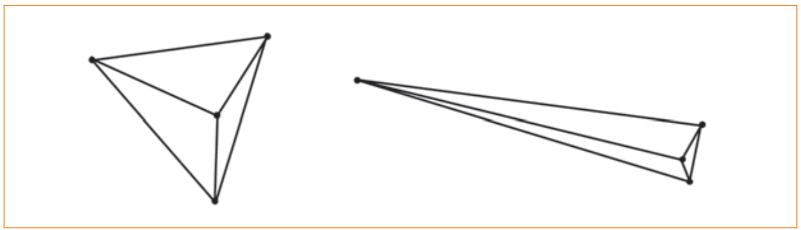
$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x$$

- Pour l'élément 1D à 3 nœuds, le polynôme est de degré 2 (quadratique) :

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$



9 La variation de contrainte linaire dans l'exemple d'une poutre soumise à son propre poids
a Poutre de Galileo soumise à son propre poids et à une charge accrochée en B
b Contrainte longitudinale dans la poutre. La ligne représente la solution continue, et les barres la solution par éléments finis, qui est une fonction en escalier. Il faut un grand nombre d'éléments linéaires pour que la solution EF approche la solution exacte



10 À gauche, élément à l'élancement idéal (proche de 1) ; à droite, élément à l'élancement important

Les conditions nodales (au i-ième nœud, la valeur de déplacement est u_i) permettent de déterminer les coefficients a_i.

Par exemple, dans le cas de l'élément à 2 nœuds :

- Conditions nodales :
$u(0) = u_1 = a_0$ et $u(L) = u_2 = a_0 + a_1 \cdot L$

- Coefficients obtenus :
$a_0 = u_1$ et $a_1 = (u_2 - u_1) / L$

- Le champ de déplacement s'écrit
$$u(x) = u_1 + [(u_2 - u_1) / L] \cdot x$$
soit :
$$u(x) = 1 - (x / L) \cdot u_1 + (x / L) \cdot u_2$$

- Le champ approché s'écrit dans notre cas :
$$u(x) = \sum_{nœuds} N_i(x) \cdot u_i = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2$$

Il vient par identification les fonctions de forme :
$N_1(y) = 1 - (x / L)$ et $N_2 = x / L$

Rappelons que la déformation de traction $\varepsilon(x)$ s'obtient par la dérivée du déplacement, $\varepsilon = du / dx$, et par suite la contrainte en élasticité est donnée par la loi de Hooke : $\sigma = E\varepsilon$. Dès lors, on comprend que la déformation, dérivée du champ de déplacement linéaire, est une constante sur chaque élément fini (dérivée d'un polynôme de degré 1), alors que dans le cas d'un élément quadratique la déformation sera représentée par une fonction affine (dérivée d'un polynôme de degré 2). Les contraintes, proportionnelles aux déformations si le comportement est élastique linéaire, auront les mêmes propriétés.

Ainsi, pour décrire la variation de contrainte linaire dans l'exemple d'une poutre soumise à son propre poids, il faudra disposer d'un grand nombre d'éléments linéaires qui décriront la variation par une fonction en escalier 9, alors qu'un seul élément quadratique permettrait directement d'obtenir la « bonne » forme de la répartition de la contrainte.

Les indicateurs de qualité des éléments du maillage

Afin de permettre au logiciel d'évaluer la matrice de raideur avec une bonne précision, la forme de chaque élément du maillage doit être la plus régulière possible (le plus proche de la forme « idéale »). Les mailleurs automatiques disposent d'algorithmes de vérification permettant de limiter les « dégénérescences » sans toutefois les annuler. Il faut, pour chaque maillage, avoir un œil attentif aux indicateurs de qualité de ses éléments et à la localisation des « mauvais » éléments, et reprendre parfois la main pour les corriger. On retiendra comme indicateurs de qualité des éléments l'élancement et la distorsion.

L'élancement, appelé également ratio, est déterminé par le rapport entre la plus grande et la plus petite dimension d'un élément. Un élancement important conduit à un élément « plat » plus proche de l'élément triangulaire que de l'élément tétraédrique 10. L'élancement idéal est de 1, mais en pratique l'élancement toléré maximal dépend du champ à étudier : inférieur à 3 dans le cas d'une analyse de contrainte, et inférieur à 10 dans le cas d'une analyse des déplacements. Les éléments dont l'élancement est important sont généralement localisés aux extrémités, le long des arêtes curvilignes et au niveau des raccordements (d'où la nécessité d'affiner le maillage aux « transitions »).

La distorsion angulaire des éléments tétraédriques quadratiques doit être limitée pour ne pas conduire à une matrice singulière. En effet, des angles trop importants ou des nœuds mal placés (notamment, les nœuds médians doivent rester à peu près médians) conduisent à des erreurs significatives.

En conclusion, le maillage de notre modèle est de qualité : les éléments ne sont pas distordus et sont cohérents en termes d'élancement, notamment en raison de la simplicité géométrique du modèle 11.

Les indices de qualité du modèle : convergence et estimation de l'erreur

Quantifier et maîtriser la qualité du modèle nécessite de déterminer l'erreur relative à l'écart entre le champ approché par discrétisation et le champ continu. Ce dernier n'est généralement pas calculable (sinon le recours à la discrétisation serait inutile). Il est toutefois possible d'amener l'erreur à un niveau aussi faible que nécessaire en faisant tendre le nombre de nœuds vers l'infini afin de faire converger les résultats vers la solution théoriquement exacte. Cela peut être réalisé en augmentant le nombre d'éléments (le maillage est affiné) ou en augmentant le nombre de nœuds par éléments (par exemple en passant d'un élément linéaire à un élément quadratique).

Outre de nombre de ddl, la convergence des résultats dépend directement de la manière dont sont interpolées les valeurs nodales pour obtenir le champ approché continu. Aussi le choix du type des fonctions de forme permet de converger plus ou moins rapidement.

Pour une taille de maille donnée, le maillage (les éléments) sera à peu prêt identique que les éléments tétraédriques soient linéaires ou quadratiques. Par contre, le nombre de nœuds et donc de ddl sera très différent, plus important pour les éléments quadratiques.

Pour notre modèle, nous avons examiné, pour les deux types d'éléments tétraédriques dont nous disposons, la capacité de ceux-ci à décrire la structure en étudiant la convergence des résultats dans le cas critique de charge (force suivant $\vec{z}$) en faisant varier le nombre d'éléments dans le maillage via la taille imposée. Nous avons étudié la convergence en traçant pour les deux types d'éléments l'évolution de l'énergie totale de déformation en fonction du nombre de nœuds et l'estimation de l'erreur relative entre le modèle continu théorique et le modèle discrétisé 12. L'énergie de déformation W se calcule par la relation :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{trace}\,[\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})]\,dV$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$ sont respectivement les matrices des contraintes et des déformations du problème continu. Pour la formulation par éléments finis, on a coutume de mettre ces matrices sous forme de colonnes :

$$\underline{\sigma}^T = \{\sigma_{xx}\ \sigma_{yy}\ \sigma_{zz}\ \sigma_{xy}\ \sigma_{xz}\ \sigma_{yz}\}$$
$$\underline{\varepsilon}^T(\underline{u}) = \{\varepsilon_{xx}\ \varepsilon_{yy}\ \varepsilon_{zz}\ 2\varepsilon_{xy}\ 2\varepsilon_{xz}\ 2\varepsilon_{yz}\}$$

Ainsi l'expression de l'énergie de déformation devient :

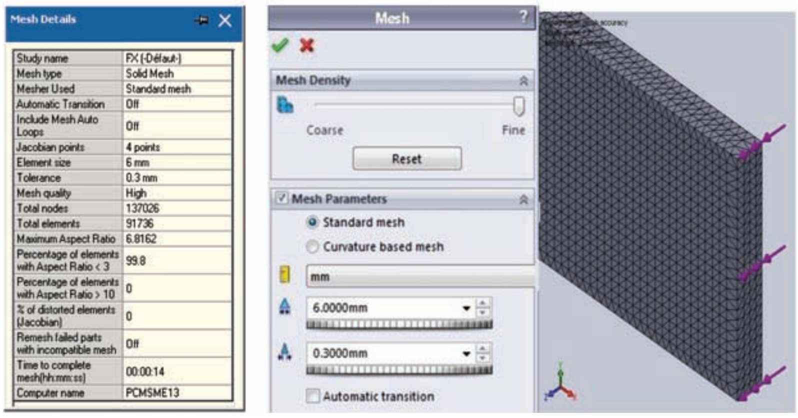
$$W = \frac{1}{2}\int_V \underline{\sigma}^T \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u})\,dV$$

Chaque solution par éléments finis correspondant à un maillage donné permet de calculer une estimation de cette énergie de déformation :

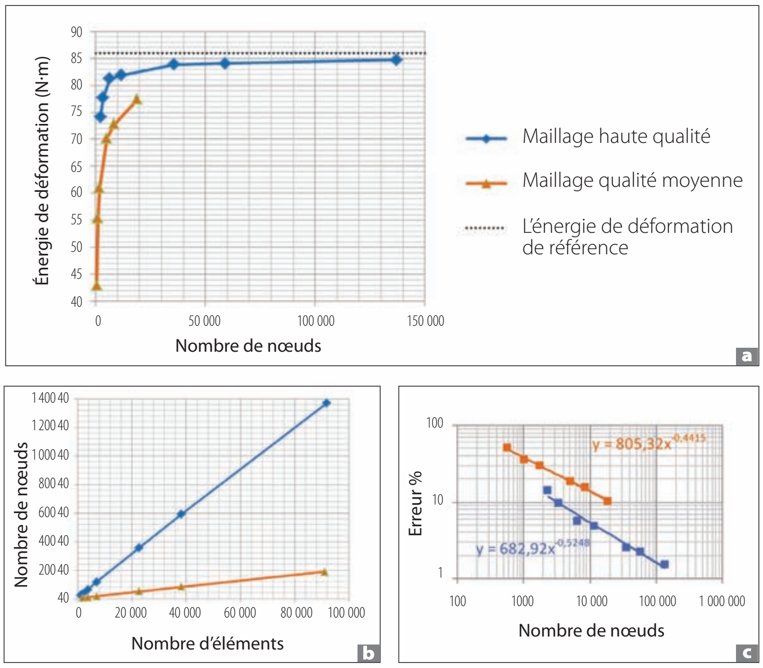
$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \underline{\sigma_e}^T(\underline{u}_e)\ \underline{\varepsilon_e}(\underline{u}_e)\,dV$$

$\underline{u}_e$ étant le déplacement solution du problème éléments finis (« e » en référence de la taille de l'élément), $\underline{\varepsilon_e}(\underline{u}_e)$ la déformation qui en dérive, et $\underline{\sigma_e}(\underline{u}_e)$ la contrainte obtenue via la loi de comportement. Il est établi théoriquement que l'énergie de la solution exacte est une borne supérieure de toutes les solutions par éléments finis, car celles-ci sont cinématiquement admissibles (c'est-à-dire qu'elles vérifient strictement les conditions limites en déplacement). De plus, il est établi théoriquement que l'énergie de déformation totale obtenue par éléments finis converge vers l'énergie de déformation du problème continu lorsque la taille de l'élément tend vers 0 :

$$W_e \xrightarrow[e \to 0]{} W$$



11 **Détail du maillage pour une erreur relative de 1,5 % sur l'énergie de déformation globale.** La taille maximale d'un élément est de 6 mm avec une tolérance de 5 %



12 **L'influence du raffinement du maillage**

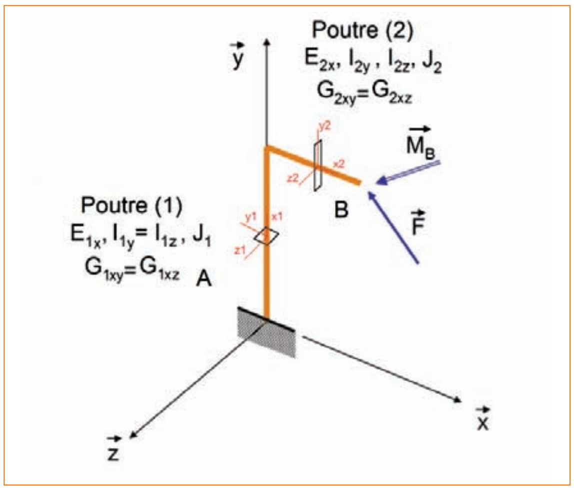
a **Convergence de l'énergie totale de déformation en fonction du type de l'élément tétraédrique.** L'asymptote donne une estimation de l'énergie « exacte »

b **Densité du maillage pour une même taille d'élément.** On peut y voir qu'à maillage égal le nombre de ddl est bien supérieur en quadratique (environ 6 fois)

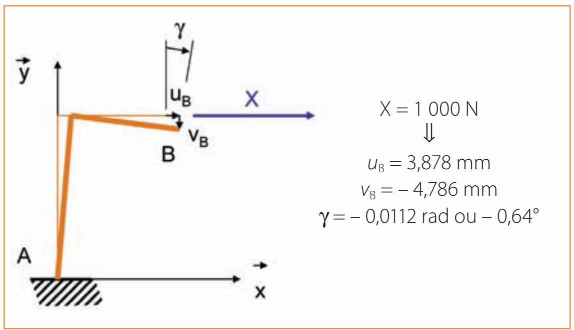
c **Erreur relative pour différents maillages.** En rouge, les éléments linéaires pour lesquels l'erreur est supérieure à celle des éléments quadratiques (en bleu) même si le nombre de ddl est identique

En conclusion

Nous constatons que les éléments quadratiques donnent un meilleur résultat que les éléments linéaires : la convergence est plus rapide, et l'erreur plus faible à nombre de ddl identique. Dans la suite de l'étude, nous avons retenu d'utiliser des éléments quadratiques avec une erreur relative égale de 1,5 % correspondant, dans notre cas, à une taille de maille de 6 mm, ce qui conduit au maillage présenté en 11.



13 La modélisation RDM d'un assemblage « coin parfait » entre deux éléments du lit haut (bout de montant de hauteur *h* et bout de garde-corps de longueur *d*). I_y et I_z sont les moments quadratiques des sections droites. Notons que le montant (1) est à section carrée et pas le garde-corps (2). J est le moment polaire de torsion ; s'agissant de sections rectangulaires, on se référera aux tableaux disponibles dans la littérature pour l'estimation de ces grandeurs. E et G sont respectivement les modules élastiques en traction et en cisaillement du matériau



14 L'allure de la déformée de l'assemblage « coin parfait » sous une charge horizontale X. Compte tenu des dimensions et des caractéristiques élastiques des matériaux, les déplacements sont de l'ordre de quelques millimètres, et la rotation de l'ordre du demi-degré. Il s'agit bien de petits déplacements par rapport à la taille de la structure étudiée

La détermination de la rigidité du coin parfait

La décomposition des efforts en 6 cas, X, Y, Z et L, M, N, et l'évaluation des déformées par une solution simplifiée RDM

Afin de caractériser complètement les effets d'un chargement sur la déformation du coin, nous avons mis en œuvre 6 cas de charge totalement indépendants. Par superposition, ces 6 cas peuvent reconstituer n'importe quelle configuration de chargement faisant travailler l'assemblage. Ainsi, le torseur le plus général des efforts appliqués au point B s'écrit :

$$\left\{ F_{ext} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \overrightarrow{M_B} = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{matrix} \right\}_B$$

Nous allons successivement étudier l'influence de chacune des composantes sur la déformation de la structure, d'une part en utilisant les résultats connus de RDM (modélisés en 13) et d'autre part en exploitant les résultats de calcul par éléments finis.

Une première série d'efforts X, Y et N génère des déplacements u_B et v_B (suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$) et une rotation γ de la section en B (autour de $\vec{z}$). Ces trois déplacements peuvent se déterminer assez simplement par la RDM, notamment par le théorème de Castigliano et ses méthodes dérivées.

Il faut noter que, contrairement à la pratique usuelle en RDM, nous ne négligeons pas l'effet de l'effort tranchant. En effet, l'anisotropie du bois est assez sévère, et le ratio entre le module d'Young longitudinal et le module de cisaillement G est de l'ordre de 25. Aussi les déplacements dus au cisaillement seront-ils du même ordre que ceux dus à la flexion. Cela revient donc à considérer que les sections droites restent droites mais non perpendiculaires à la ligne moyenne déformée comme dans l'hypothèse de Bernoulli : on utilise la théorie naturelle des poutres dites aussi poutres de Timoshenko. Par exemple, pour un effort X appliqué en B, si on prend en compte l'effet de l'effort tranchant et du moment fléchissant, on a :

$$u_B = \partial W / \partial X$$

avec :

$$W = \int_{AB} \frac{1}{2}\left(\frac{M_f^2}{E_x I_z} + \frac{T^2}{G_{xy} S} \right) ds = \int_{(1)} \frac{1}{2}\left(\frac{M_f^2(y)}{E_x I_{1z}} + \frac{T^2(y)}{G_{1xy} S_1} \right) dy + \int_{(2)} \frac{1}{2}\left(\frac{M_f^2(x)}{E_x I_{2z}} + \frac{T^2(x)}{G_{2xy} S_2} \right) dx$$

Ce qui conduit à :

$$u_B = \int_{(1)} \left(\frac{M_f}{E_{1x} I_{1z}} \frac{\partial M_f}{\partial X} + \frac{T}{G_{2xy} S_1} \frac{\partial T}{\partial X} \right) dy + \int_{(2)} \left(\frac{M_f}{E_{2x} I_{2z}} \frac{\partial M_f}{\partial X} + \frac{T}{G_{2xy} S_2} \frac{\partial T}{\partial X} \right) dx$$

Cette dernière expression s'intègre assez facilement, en utilisant par exemple les tableaux des intégrales de Mohr. Ce qui donne :

$$u_B = \left(\frac{h^3}{3E_{1x} I_{1z}} + \frac{h}{G_{1xy} S_1} \right) X$$

Pour le calcul du déplacement v_B et de la rotation γ, il convient d'utiliser le théorème de la charge fictive (on applique un effort Y pour le calcul de $v = \partial W / \partial Y$, puis on annule Y en fin de calcul) ou le théorème de la charge unitaire :

$$v_B = \int_{(1)} \left(\frac{M_f(X)}{E_{1x} I_{1z}} \frac{\partial M_f(Y)}{\partial Y} + \frac{T(X)}{G_{1xy} S_1} \frac{\partial T(Y)}{\partial Y} \right) dy + \int_{(2)} \left(\frac{M_f(X)}{E_{2x} I_{2z}} \frac{\partial M_f(Y)}{\partial Y} + \frac{T(X)}{G_{2xy} S_2} \frac{\partial T(Y)}{\partial Y} \right) dx$$

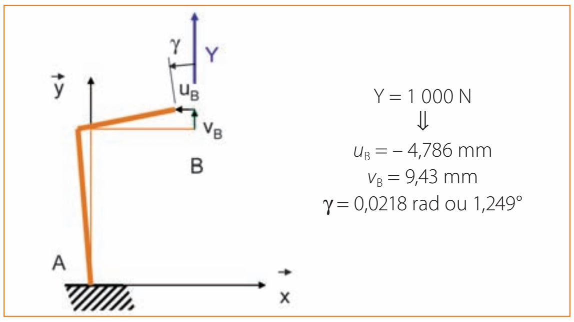
Ce qui donne :

$$v_B = -\left(h^2 d / 2\, E_{1x} I_{1z}\right) X$$

De même, à l'aide d'un couple fictif N en B, on obtient la rotation γ :

$$\gamma = -\left(h^2 / 2\, E_{1x} I_{1z}\right) X$$

Ces résultats sont cohérents, puisqu'avec un effort suivant l'axe $\vec{x}$ il est assez naturel que seule la poutre (1) fléchisse (pas de termes en $E_2 I_{2z}$). De plus, le déplacement u_B est bien dans le sens de X, mais la flexion de la poutre (1) incline la poutre (2) vers le bas,



15 L'allure de la déformée de l'assemblage « coin parfait » sous l'effet d'un effort vertical Y

et on obtient un déplacement v_B négatif ainsi qu'une rotation γ de la section en B dans le sens négatif **14**.

On renouvelle ces calculs de RDM successivement avec une charge Y puis un couple N. Pour l'effort Y, les deux déplacements et la rotation s'expriment ainsi :

$$u_B = -(h^2 d / 2\,E_{1x} I_{1z})\,Y$$

$$v_B = [(hd^2 / E_{1x} I_{1z}) + (d^3 / 3\,E_{2x} I_{2z}) + (d / G_{2xy} S_2)]\,Y$$

$$\gamma = [(hd / E_{1x} I_{1z}) + (d^2 / 2\,E_{2x} I_{2z})]\,Y$$

Et, pour le couple N, les deux déplacements et la rotation s'expriment de la façon suivante :

$$u_B = -(h^2 / 2\,E_{1x} I_{1z})\,N$$

$$v_B = [(hd / E_{1x} I_{1z}) + (d^2 / 2\,E_{2x} I_{2z})]\,N$$

$$\gamma = [(h / E_{1x} I_{1z}) + (d / E_{2x} I_{2z})]\,N$$

Les sens des déplacements et des rotations correspondent bien à l'idée que l'on peut se faire de l'allure des déformées **15** **16**.

À ce niveau, on peut utiliser le théorème de superposition et écrire les relations entre les déplacements u_B, v_B et γ et les efforts X, Y et N sous la forme matricielle ci-dessous. On pourra noter que la matrice 3×3 caractérise la « souplesse » du coin et qu'elle est symétrique :

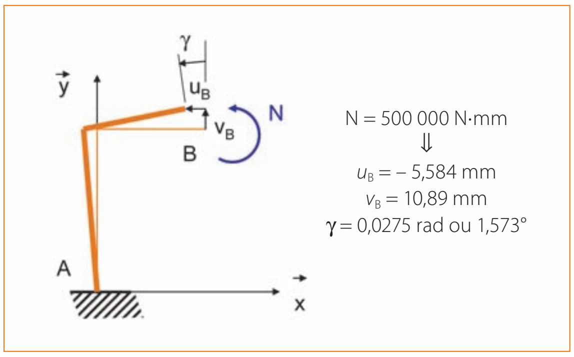
$$\begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{h^3}{3E_{1x}I_{1z}} + \dfrac{h}{G_{1xy}S_1} & -\dfrac{h^2 d}{2E_{1x}I_{1z}} & -\dfrac{h^2}{2E_{1x}I_{1z}} \\ -\dfrac{h^2 d}{2E_{1x}I_{1z}} & \dfrac{hd^2}{E_{1x}I_{1z}} + \dfrac{d^3}{3E_{2x}I_{2z}} + \dfrac{d}{G_{2xy}S_2} & \dfrac{hd}{E_{1x}I_{1z}} + \dfrac{d^2}{2E_{2x}I_{2z}} \\ -\dfrac{h^2}{2E_{1x}I_{1z}} & \dfrac{hd}{E_{1x}I_{1z}} + \dfrac{d^2}{2E_{2x}I_{2z}} & \dfrac{h}{E_{1x}I_{1z}} + \dfrac{d}{E_{2x}I_{2z}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ N \end{pmatrix}$$

Dans le cas des charges Z, L et M, le problème n'est plus plan, et de la flexion cohabite avec de la torsion dans le montant ou dans le garde-corps. Pour ces deux cas, les caractéristiques G_1J_1 et G_2J_2 vont donc intervenir dans les déplacements et rotations. De plus, suivant les sollicitations, la poutre (2) travaille en flexion autour de $\vec{y}$ et non autour de $\vec{z}$, il faut donc être vigilant sur la notation du moment quadratique I_{2y}. Après calcul, les déplacements dus à l'effort Z valent **17** :

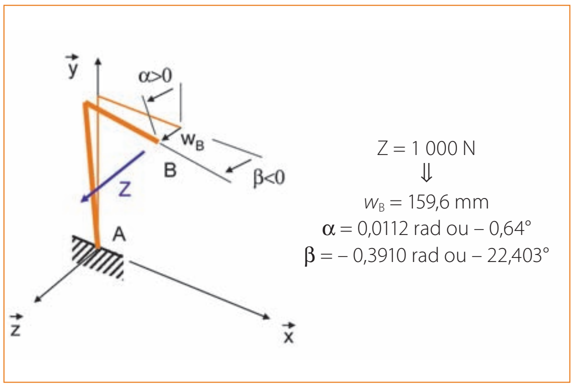
$$w_B = [(hd^2 / G_{1xz} J_1) + (h^3 / 3\,E_{1x} I_{1y}) + (d^3 / 3\,E_{2x} I_{2y}) + (h / G_{1xz} S_1) + (d / G_{2xz} S_2)]\,Z$$

$$\alpha = (h^2 / 2\,E_{1x} I_{1y})\,Z$$

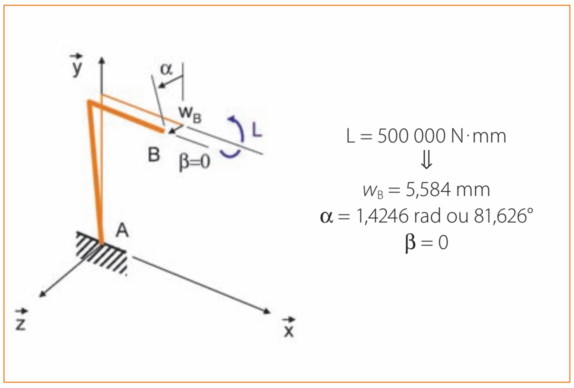
$$\beta = -[(hd / G_{1xz} J_1) + (d^2 / 2\,E_{2x} I_{2y})]\,Z$$



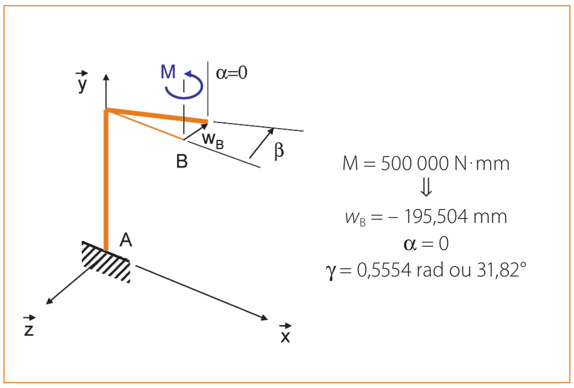
16 L'allure de la déformée de l'assemblage « coin parfait » sous l'effet d'un couple horizontal N



17 L'allure de la déformée de l'assemblage « coin parfait » sous l'effet d'un effort horizontal Z



18 L'allure de la déformée de l'assemblage « coin parfait » sous l'effet d'un couple L



19 L'allure de la déformée de l'assemblage « coin parfait » sous l'effet d'un couple M

Le garde-corps est sollicité en flexion suivant sa plus petite épaisseur, et la structure est donc beaucoup plus souple, ce qui explique les valeurs importantes de w_B et de β par rapport aux valeurs calculées dans le premier groupe de sollicitations. Néanmoins, pour une structure de 400 mm de taille caractéristique, 20 mm de flèche restent un petit déplacement.

Les déplacements dus au couple L valent 18 :

$$w_B = (h^2 / 2\,E_{1x}I_{1y})\,L$$
$$\alpha = [(h / E_{1x}I_{1y}) + (d / G_{2xz}J_2)]\,L$$
$$\beta = 0$$

Et ceux dus au couple M valent 19 :

$$w_B = -\,[(hd / G_{1xz}J_1) + (d^2 / 2\,E_{2x}I_{2y})]\,M$$
$$\alpha = 0$$
$$\beta = [(h / G_{1xz}J_1) + (d / E_{2x}I_{2y})]\,M$$

Là encore, la souplesse du garde-corps en flexion et la forte valeur du couple M conduisent à des déplacements très importants qui sortent du cadre de la RDM en petites déformations. Cela peut tout à fait être corrigé en prenant des valeurs plus faibles des couples L, M et N pour ces calculs. Néanmoins, puisque le problème est linéaire, ces résultats permettent tout de même une évaluation des souplesses qui peuvent aussi se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} w_B \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{hd^2}{G_{1xz}J_1}+\dfrac{h^3}{3E_{1x}I_{1y}}+\dfrac{d^3}{3E_{2x}I_{2y}}+\dfrac{h}{G_{1xz}S_1}+\dfrac{d}{G_{2xz}S_2} & \dfrac{h^2}{2E_{1x}I_{1y}} & -\left(\dfrac{hd}{G_{1xz}J_1}+\dfrac{d^2}{2E_{2x}I_{2y}}\right) \\ \dfrac{h^2}{2E_{1x}I_{1y}} & \dfrac{h}{E_{1x}I_{1y}}+\dfrac{d}{G_{2xz}J_2} & 0 \\ -\left(\dfrac{hd}{G_{1xz}J_1}+\dfrac{d^2}{2E_{2x}I_{2y}}\right) & 0 & \dfrac{h}{G_{1xz}J_1}+\dfrac{d}{E_{2x}I_{2y}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ L \\ M \end{pmatrix}$$

Ces résultats associés aux précédents sur la partie liée aux efforts X, Y et N peuvent se synthétiser dans une unique matrice 6 × 6 qui sera la matrice de souplesse du coin, que nous noterons $[S_B]$. Elle permet de calculer toutes les composantes du torseur des petits déplacements en B pour n'importe quel torseur d'effort exprimé en B. Elle est donc fortement dépendante du choix fait pour la distance d (et pour h) – ce point sera éclairci plus loin :

$$S_B = \begin{bmatrix} \dfrac{h^3}{3E_{1x}I_{1z}}+\dfrac{h}{G_{1xy}S_1} & -\dfrac{h^2 d}{2E_{1x}I_{1z}} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{h^2}{2E_{1x}I_{1z}} \\ -\dfrac{h^2 d}{2E_{1x}I_{1z}} & \dfrac{hd^2}{E_{1x}I_{1z}}+\dfrac{d^3}{3E_{2x}I_{2z}}+\dfrac{d}{G_{2xy}S_2} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{hd}{E_{1x}I_{1z}}+\dfrac{d^2}{2E_{2x}I_{2z}} \\ 0 & 0 & \dfrac{hd^2}{G_{1xz}J_1}+\dfrac{h^3}{3E_{1x}I_{1y}}+\dfrac{d^3}{3E_{2x}I_{2y}}+\dfrac{h}{G_{1xz}S_1}+\dfrac{d}{G_{2xz}S_2} & \dfrac{h^2}{2E_{1x}I_{1y}} & -\left(\dfrac{hd}{G_{1xz}J_1}+\dfrac{d^2}{2E_{2x}I_{2y}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{h^2}{2E_{1x}I_{1y}} & \dfrac{h}{E_{1x}I_{1y}}+\dfrac{d}{G_{2xz}J_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\dfrac{hd}{G_{1xz}J_1}+\dfrac{d^2}{2E_{2x}I_{2y}}\right) & 0 & \dfrac{h}{G_{1xz}J_1}+\dfrac{d}{E_{2x}I_{2y}} & 0 \\ -\dfrac{h^2}{2E_{1x}I_{1z}} & \dfrac{hd}{E_{1x}I_{1z}}+\dfrac{d^2}{2E_{2x}I_{2z}} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{h}{E_{1x}I_{1z}}+\dfrac{d}{E_{2x}I_{2z}} \end{bmatrix}$$

Ces résultats vont maintenant être comparés aux résultats des calculs par éléments finis réalisés sur le modèle 3D du coin.

L'identification des petits déplacements de corps solides par la méthode des moindres carrés appliquée aux déplacements issus du calcul EF

Pour procéder à la comparaison entre les résultats de la RDM et ceux du calcul par éléments finis, il est nécessaire d'analyser le champ de déplacements de la face du modèle éléments finis sur laquelle on applique la charge afin d'en déduire le torseur des petits déplacements qui passe au « mieux » de ce champ. En effet, il faut rappeler qu'un torseur décrit un petit « déplacement de corps solide », alors que le résultat du calcul par éléments finis peut faire apparaître un gauchissement de la section en B – à peu près sûrement dans le cas de la sollicitation due au couple L qui induit de la torsion dans la poutre (2) qui n'est pas circulaire. Les résultats d'un calcul par éléments finis 3D donnent le champ de déplacement en fournissant les composantes u_i, v_i et w_i du vecteur déplacement de chaque nœud M_i 20.

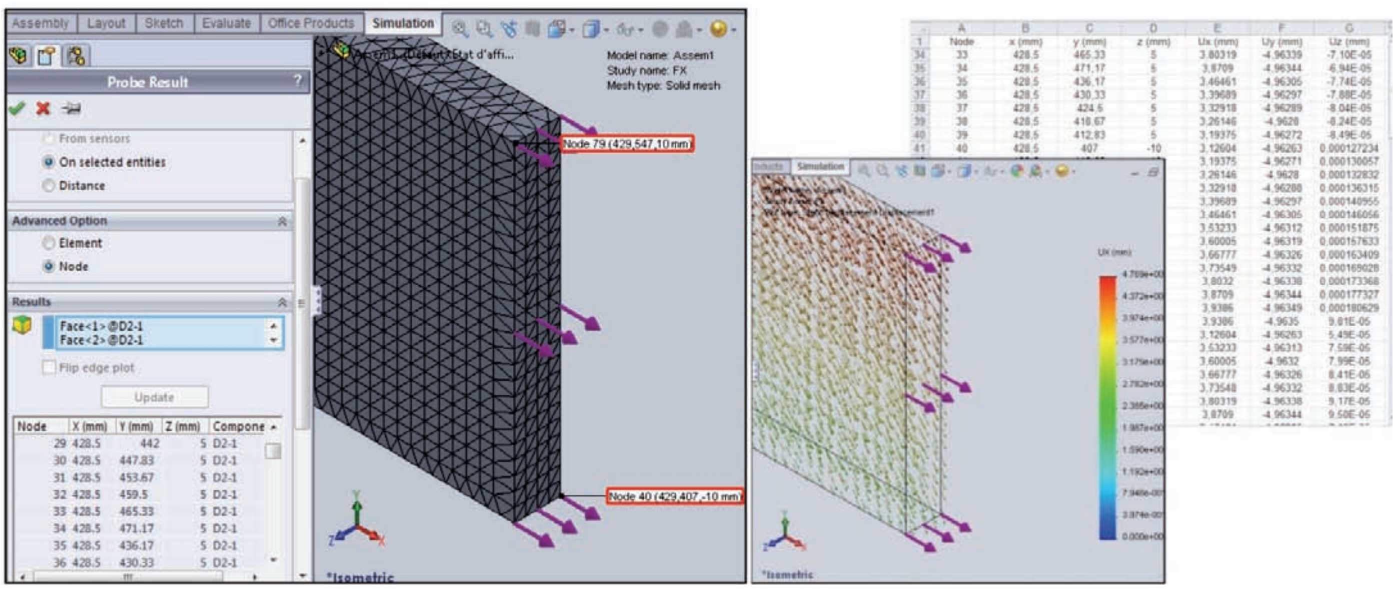
Pour faire la comparaison avec les calculs de RDM de la section précédente, il faut trouver le déplacement de corps solide moyen de la section et la rotation moyenne ; le plus simple est donc de minimiser l'écart entre les déplacements donnés par le calcul EF et le champ de déplacement de corps solide défini par un torseur au point B :

$$\{U_{\text{section B}}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Psi} = \alpha\vec{x}+\beta\vec{x}+\gamma\vec{z} \\ \vec{u_B} = u_B\,\vec{x}+v_B\,\vec{y}+w_B\,\vec{z} \end{Bmatrix}_B$$

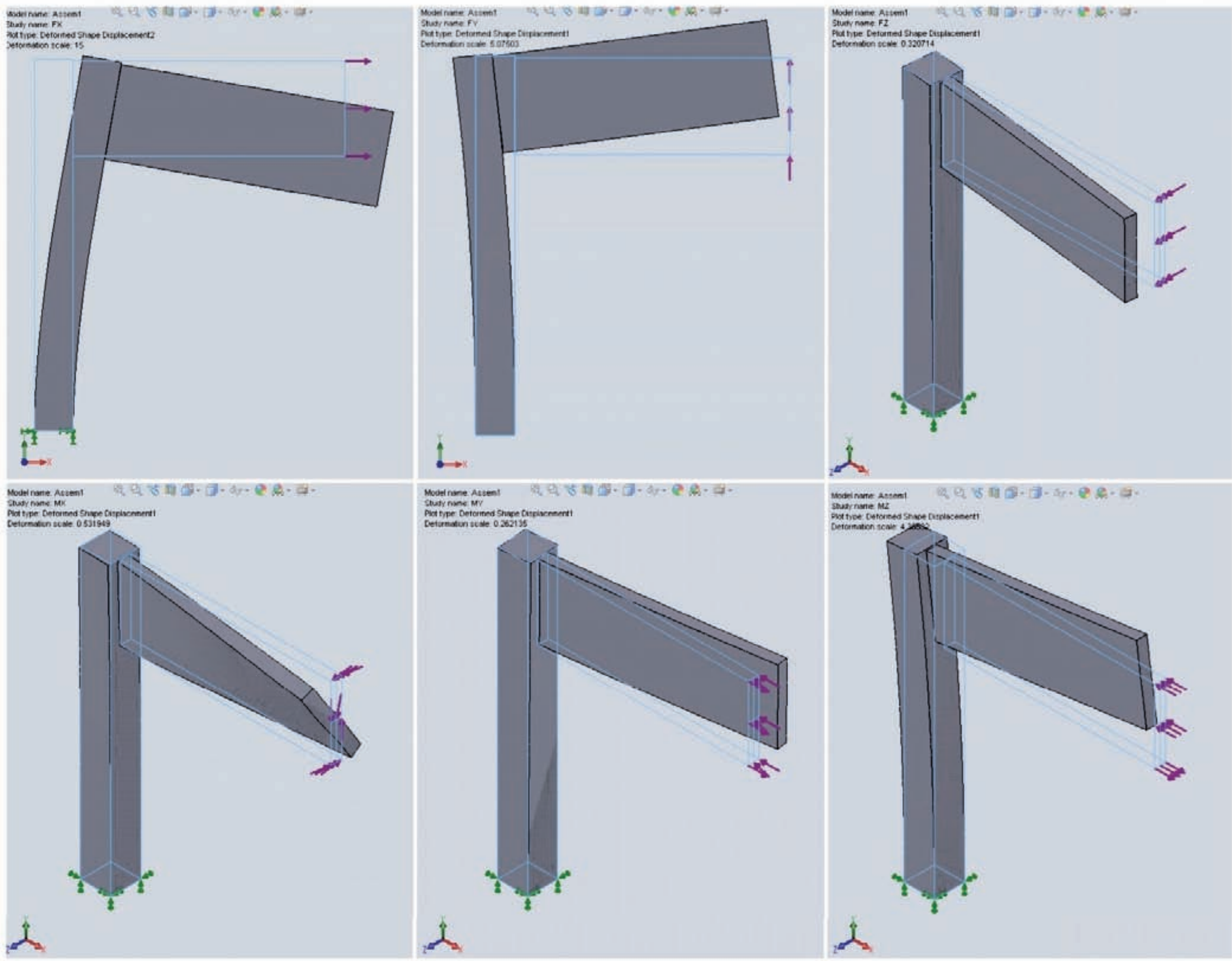
Si la face avait ce déplacement de corps solide, le nœud M_i de coordonnées (x_i, y_i, z_i) aurait un déplacement défini par :

$$\{U_{\text{section B}}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Psi} = \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z} \\ \overrightarrow{u_{M_i}} = (u_B+\beta Z_i-\gamma Y_i)\,\vec{x}+(v_B-\alpha Z_i)\,\vec{y}+(w_B+\alpha Y_i)\,\vec{z} \end{Bmatrix}_{M_i}$$

où $Y_i = y_i - y_B$ et $Z_i = z_i - z_B$.



20 **La récupération des coordonnées des nœuds du maillage et des déplacements des nœuds du maillage dans un tableau** pour effectuer les sommes et construire la matrice [A] et les différentes colonnes (Y)



21 **Les allures des déformées du coin parfait pour les 6 situations élémentaires de chargement.** Effets des forces X, Y et Z en haut et des couples L, M et N en bas

L'éventuel X_i est nul ici, car les points M_i et B sont dans la même face $x_i = c^{te}$. Si l'on compare ce déplacement avec celui obtenu par éléments finis, on peut définir l'écart e_i tel que :

$$e_i^2 = (u_B + \beta Z_i - \gamma Y_i - u_i)^2 + (v_B - \alpha Z_i - v_i)^2 + (w_B + \alpha Y_i - w_i)^2$$

Chercher le meilleur déplacement de corps solide revient à minimiser la somme des e_i^2 sur l'ensemble des nœuds en dérivant cette somme Σ par rapport à chacun des paramètres cherchés – c'est la méthode bien connue des moindres carrés :

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left\{ (u_B + \beta Z_i - \gamma Y_i - u_i)^2 + (v_B - \alpha Z_i - v_i)^2 + (w_B + \alpha Y_i - w_i)^2 \right\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial u_B} = 0 \rightarrow N u_B + \beta \sum_i Z_i - \gamma \sum_i Y_i - \sum_i u_i = 0 \\ \dfrac{\partial \Sigma}{\partial v_B} = 0 \rightarrow N v_B - \alpha \sum_i Z_i - \sum_i v_i = 0 \\ \dfrac{\partial \Sigma}{\partial w_B} = 0 \rightarrow N w_B + \alpha \sum_i Y_i - \sum_i w_i = 0 \\ \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow \sum_i \left\{ -Z_i (v_B - \alpha Z_i - v_i) + Y_i (w_B + \alpha Y_i - w_i) \right\} = 0 \\ \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \beta} = 0 \rightarrow \sum_i \left\{ Z_i (u_B + \beta Z_i - \gamma Y_i - u_i) \right\} = 0 \\ \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \gamma} = 0 \rightarrow \sum_i \left\{ -Y_i (u_B + \beta Z_i - \gamma Y_i - u_i) \right\} = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations ainsi obtenu peut se mettre sous forme matricielle $[A] \cdot (X) = (Y)$:

$$\begin{bmatrix} N & 0 & 0 & 0 & \sum_i Z_i & -\sum_i Y_i \\ 0 & N & 0 & -\sum_i Z_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & \sum_i Y_i & 0 & 0 \\ 0 & -\sum_i Z_i & \sum_i Y_i & \sum_i (Y_i^2 + Z_i^2) & 0 & 0 \\ \sum_i Z_i & 0 & 0 & 0 & \sum_i Z_i^2 & -\sum_i Y_i Z_i \\ -\sum_i Y_i & 0 & 0 & 0 & -\sum_i Y_i Z_i & \sum_i Y_i^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ w_B \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i u_i \\ \sum_i v_i \\ \sum_i w_i \\ \sum_i (Y_i w_i - Z_i v_i) \\ \sum_i Z_i u_i \\ -\sum_i Y_i u_i \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut voir que la connaissance des coordonnées Y_i et Z_i des points M_i qui sont les nœuds de la face en B pour le maillage du coin permet de construire la matrice 6×6 [A], et qu'à l'issue du calcul par éléments finis la connaissance des déplacements u_i, v_i et w_i permet de construire la colonne (Y) de droite. Ce système linéaire s'inverse facilement, et donne les composantes du torseur des petits déplacements en B : $(X) = [A]^{-1} \cdot (Y)$.

On peut donc déterminer le déplacement de corps solide moyen de la section en B pour les 6 cas de charge élémentaire et comparer avec les résultats de la section précédente. Notons qu'un maillage unique étant utilisé pour les 6 calculs par éléments finis la matrice [A] n'est calculée qu'une seule fois, alors que la colonne (Y) doit être assemblée à partir des résultats de chacun des 6 calculs 21.

En utilisant les mêmes dimensions et les mêmes propriétés mécaniques que pour les calculs de RDM, on identifie les 6 torseurs donnés en 22.

Pour chaque cas, la 2^e^ colonne présente le résultat de la détermination du torseur des petits déplacements issus de la méthode des moindres carrés à partir des résultats de calcul par éléments finis (EF3D). Notons que le nombre de chiffres présentés n'est pas significatif, mais uniquement donné afin de montrer que la similitude des résultats entre la RDM et les EF3D peut être très grande. Dans la 3^e^ colonne, on rappelle les résultats obtenus par la RDM, et la dernière colonne donne le pourcentage d'écart des composantes significatives. On peut remarquer que la plupart de ces taux sont faibles : ils ne dépassent pas 15 %, hormis deux cas symétriques, la composante w_B due au moment L et l'angle α du cas de charge Z, pour lesquels la RDM donne une solution différente du calcul 3D de plus de 60 % !

L'écart sur le cas Z est difficile à justifier, car d'un point de vue théorique, puisque le garde-corps est plus mince dans la direction z et que la charge Z génère de la flexion dans cette épaisseur, la géométrie est plus proche de celle requise pour valider les hypothèses d'élancement de la théorie des poutres. Il est rassurant que le cas du moment L donne sur la composante symétrique un écart du même ordre : on obtient ainsi une matrice globale de souplesse symétrique, ce qui est attendu théoriquement.

La construction de la matrice de rigidité du coin réel issue du calcul EF

Munis de ces valeurs, issues d'un calcul par éléments finis 3D, on peut mettre en place la matrice de souplesse du coin parfait, notée $[S_B]$ 23. Compte tenu des similitudes entre les calculs RDM et les résultats de simulation par éléments finis, et si on met à part les composantes (w, L) ou (α, Z), cette matrice est très proche numériquement de celle déterminée à la section précédente par la RDM (un nombre de chiffres non significatif a été laissé délibérément afin de discuter de l'importance de l'écart entre RDM et EF et aussi de la symétrie de la matrice).

Le découpage par éléments finis introduit une imprécision numérique qui fait que les découplages mis en évidence par l'étude RDM ne sont plus parfaits. Certains termes de la matrice de souplesse $[S_B]$ peuvent néanmoins être considérés comme nuls (les termes en rouge) s'ils sont petits devant les autres. Pour cela, il faut bien faire attention à comparer des termes de même nature, et il convient de découper la matrice 6×6 en quatre blocs 3×3. En effet, les unités de tous les termes ne sont pas identiques, et on ne peut mettre en évidence les termes prépondérants que dans chaque

Cas X	Calcul EF (mm·rad)	Calcul RDM (mm·rad)	Écart relatif EF-RDM
u_B	3,938 52	3,877 72	1,54 %
v_B	– 4,963 52	– 4,785 54	3,59 %
w_B	– 0,000 04	0	
α	0,000 000 4	0	
β	0,000 000 1	0	
γ	– 0,011 605 5	– 0,011 168 12	3,77 %

Cas L	Calcul EF (mm·rad)	Calcul RDM (mm·rad)	Écart relatif EF-RDM
u_B	0,000 69	0	
v_B	0,004 75	0	
w_B	16,647 66	5,584 06	66,46 %
α	1,266 008 0	1,424 647	12,53 %
β	– 0,025 779 1	0	
γ	0,000 011 8	0	

Cas Y	Calcul EF (mm·rad)	Calcul RDM (mm·rad)	Écart relatif EF-RDM
u_B	– 4,963526	– 4,785 539	3,59 %
v_B	10,819320	9,433 208	12,81 %
w_B	– 0,003 254 69	0	
α	0,000 011 1	0	
β	0,000 008 0	0	
γ	0,025 195 8	0,021 798 68	13,48 %

Cas M	Calcul EF (mm·rad)	Calcul RDM (mm·rad)	Écart relatif EF-RDM
u_B	– 0,000 02	0	
v_B	0,004 13	0	
w_B	– 208,679 90	– 195,504 00	6,31 %
α	– 0,021 960 6	0	
β	0,590 046 5	0,555 368 40	5,88 %
γ	0,000 008 9	0	

Cas Z	Calcul EF (mm·rad)	Calcul RDM (mm·rad)	Écart relatif EF-RDM
u_B	– 0,000 02	0	
v_B	– 0,003 34	0	
w_B	169,426 10	159,632 10	5,78 %
α	0,030 189 6	0,011 168 12	63,01 %
β	– 0,417 376 9	– 0,391 008 00	6,32 %
γ	– 0,000 008 0	0	

Cas N	Calcul EF (mm·rad)	Calcul RDM (mm·rad)	Écart relatif EF-RDM
u_B	– 5,802 75	– 5,584 06	3,77 %
v_B	12,566 12	10,899 34	13,26 %
w_B	– 0,003 81	0	
α	0,000 012 8	0	
β	0,000 009 3	0	
γ	0,031 745 4	0,027 458 81	13,50 %

22 La comparaison des composantes du torseur des petits déplacements de la section en B obtenus par calculs EF (colonne 2) sur la modélisation 3D du coin (ces calculs ne donnent pas de composantes franchement nulles ; on peut considérer la composante comme nulle lorsque le pourcentage par rapport au module est inférieur à 0,5 %). La colonne 3 donne les composantes obtenues par les calculs analytiques de RDM de la section précédente, et la colonne 4 donne l'écart relatif des composantes non nulles

$[S_B(EF)]$ =

3,9385 E – 03	– 4,9635 E – 03	– 2,2659 E – 08		1,3779 E – 09	– 3,0698 E – 11	– 1,1605 E – 05	
– 4,9635 E – 03	1,0819 E – 02	– 3,3448 E – 06		9,4957 E – 09	8,2523 E – 09	2,5132 E – 05	
– 4,4285 E – 08	– 3,2547 E – 06	1,6943 E – 01	(mm/N)	3,3295 E-05	– 4,1736 E-04	– 7,6165 E – 09	(mm/N·mm)
4,1131 E – 10	1,1089 E – 08	3,0190 E – 05		2,5320 E – 06	– 4,3921 E – 08	2,5574 E – 11	
8,5714 E – 11	7,9592 E – 09	– 4,1738 E – 04		– 5,1558 E-08	1,1801 E – 06	1,8612 E – 11	
– 1,1605 E-05	2,5196 E – 05	– 7,9959 E – 09	(rad/N)	2,3668 E-11	1,7821 E – 11	6,3491 E – 08	(rad/N·mm)

$[S_B(RDM)]$ =

3,8777 E – 03	– 4,7855 E – 03	0		0	0	– 1,1168 E – 05	
– 4,7855 E – 03	1,0406E – 02	0		0	0	2,1799 E – 05	
0	0	1,5963 E – 01	(mm/N)	1,1168 E – 05	– 3,9101 E – 04	0	(mm/N·mm)
0	0	1,1168 E – 05		2,8493 E – 06	0	0	
0	0	– 3,9101 E – 04		0	1,1107 E – 06	0	
– 1,1168E – 05	2,1799 E – 05	0	(rad/N)	0	0	5,4918 E – 08	(rad/N·mm)

23 La matrice de souplesse du coin parfait

$[S_B(EF)] =$

$3{,}94 \times 10^{-3}$	$-4{,}96 \times 10^{-3}$	0
$-4{,}96 \times 10^{-3}$	$1{,}08 \times 10^{-2}$	0
0	0	$1{,}69 \times 10^{-1}$

(mm/N)

0	0	$-1{,}16 \times 10^{-5}$
0	0	$2{,}51 \times 10^{-5}$
$3{,}16 \times 10^{-5}$	$-4{,}17 \times 10^{-4}$	0

(mm/N·mm)

0	0	$3{,}16 \times 10^{-5}$
0	0	$-4{,}17 \times 10^{-4}$
$-1{,}16 \times 10^{-5}$	$2{,}51 \times 10^{-5}$	0

(rad/N)

$2{,}53 \times 10^{-6}$	0	0
0	$1{,}18 \times 10^{-6}$	0
0	0	$6{,}35 \times 10^{-8}$

(rad/N·mm)

24 La matrice de souplesse « nettoyée »

$[K_B(EF)] =$

602	255	0
263	1 294	0
0	0	46

(N/mm)

0	0	7 410
0	0	– 465 000
– 270	16 270	0

(N/rad)

0	0	– 270
0	0	16 270
7 410	– 465 000	0

(N·mm/mm)

396 800	– 79 500	0
– 79 600	6 597 000	0
0	0	201 500 000

(N·mm/rad)

25 La matrice de raideur

sous-matrice 3×3 de même unité… Autre conséquence du découpage par éléments finis, la perte de la symétrie, notamment pour le terme « non nul » S_{wL} par rapport à $S_{\alpha Z}$. En négligeant les termes nuls et en symétrisant le terme précédent en prenant sa valeur moyenne, on obtient la matrice 24.

En comparant la matrice EF « nettoyée » et la matrice RDM, on constate que l'écart est très faible, et que la modélisation RDM est une très bonne approximation, même pour un matériau fortement anisotrope. Seul le terme S_{wL} (ou $S_{\alpha Z}$) présente un écart important, déjà mis en évidence plus haut dans la comparaison des torseurs des petits déplacements.

L'inverse de la matrice de souplesse est la matrice de raideur $[K_B]$ du coin parfait, que nous pourrons comparer avec celle du coin réel incluant les éléments d'assemblage (vis, écrou, tourillons) afin de déterminer la contribution de ces derniers au comportement du coin dans la partie II. La matrice de raideur est donnée en 25. ■

Références bibliographiques

WINANDY (J. E.), « Wood Properties », *in* ARNTZEN (C. J.) (sous la dir. de), *Encyclopedia of Agricultural Science*, Academic Press, 1994, vol. 4, p. 549-561

CHATEAUNEUF (A.), *Comprendre les éléments finis : Principes, formulations et exercices corrigés*, Ellipses, coll. « Technosup », 2010

CHEVALIER (L.), *Mécanique des systèmes et des milieux déformables : Cours, exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 2007

CRAVEUR (J.-C.), MARCEAU (D.), *De la CAO au calcul*, Dunod/*L'Usine nouvelle*, coll. « Technique et Ingénierie », 2001

GORNET (L.), *Généralités sur les matériaux composites*, Centrale Nantes, en ligne :
http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/44/00/PDF/bouquin.pdf

KUROWSKI, (P. M.), *Engineering Analysis With SolidWorks Simulation 2012*, SDC Publications, 2012

NICHOLLS (T.), CRISAN (R.), « Study of the Stress-Strain State in Corner Joints and Box-Type Furniture Using Finite Element Analysis (FEA) », in *Holz als Roh- und Werkstoff*, février 2002, vol. 60, p. 66-71

STEFFEN (J. R.), *Analysis of Machine Elements Using SolidWorks Simulation 2013*, SDC Publications, 2013