

OLYMPIADES DE SCIENCES DE L'INGÉNIEUR 2011

Six pattes pour gravir le podium

CHRISTIAN GARREAU [1]

Pour la première finale nationale des Olympiades, le mercredi 11 mai 2011 sur le site de PSA à Poissy, le premier prix est allé à trois jeunes filles du lycée Louis-le-Grand de Paris pour leur robot à six pattes se déplaçant de manière autonome à la manière d'une blatte, baptisé Hexapode. Leur professeur nous détaille le projet...

Dans la nature, les êtres vivants possèdent des caractéristiques que l'homme cherche à reproduire ; car la nature réalise des prouesses techniques, fruits de millions et de millions d'années d'évolution.

Ainsi, dès la Renaissance, alors que l'Europe renoue avec la culture antique et place l'homme au centre de l'univers, les savants commencent à s'inspirer de la nature. Léonard de Vinci, par exemple, imagine les premières machines volantes après avoir étudié le vol des oiseaux. Mais il faudra attendre les années 1960 pour que l'imitation des formes animales apporte de premières réussites concrètes : c'est en s'inspirant du bec du martin-pêcheur, oiseau connu pour sa vitesse de pénétration dans l'eau, que les ingénieurs réussissent à augmenter la vitesse du Shinkansen (le TGV japonais, en service depuis 1964), tout en réduisant sa consommation énergétique.

Cette capacité à reproduire le réel, produit de l'« intelligence » naturelle, le *biomimétisme*, connaît aujourd'hui un véritable essor.

C'est de cette technique que nous nous sommes inspirés. Les robots mobiles utilisent majoritairement des roues, invention purement humaine. Malgré ses avantages, tels qu'une faible quantité d'énergie requise pour un déplacement sur une longue distance,

mots-clés
cinématique, concours, énergie, recherche & développement

la roue a le défaut de ne pas pouvoir franchir d'obstacles ou évoluer en terrain très accidenté. Dans l'optique de reproduire un mouvement issu de la nature, nous avons donc décidé d'imiter un *hexapode* (six pattes), la blatte, aussi appelé cafard. Ce petit insecte a des caractéristiques spécifiques que nous avons observées puis détaillées, pour aboutir à une modélisation : car « modéliser c'est remplacer du visible compliqué par de l'invisible simple », disait Jean-Baptiste Perrin, physicien français du xx^e siècle.

Notre réalisation nous permet donc de répondre à la question suivante : comment un robot peut-il imiter le déplacement d'un hexapode ?

La conception d'un robot hexapode

Pour modéliser le déplacement d'un cafard **1**, nous en avons tout d'abord observé les différentes caractéristiques. C'est donc à travers des vidéos, des images et des ouvrages consacrés aux insectes que nous avons extrait certaines caractéristiques essentielles qui contribuent à la conception de notre robot hexapode.



1 Cafard ou blatte

Description physique

Le cafard a une longueur avoisinant 4 cm. Il possède une forme générale très profilée (un ovale allongé) et un corps fortement aplati, doté de téguments (peau) à la fois lisses et souples, ce qui lui permet de s'insinuer dans les moindres fissures, fentes, ou interstices.

Les cafards se déplacent plus volontiers sur pattes, et très souvent avec une extrême vélocité. Leurs pattes sont longues, grêles et joignent trois différents segments principaux au thorax **2**. La patte **3** est composée de plusieurs segments, tous reliés par des liaisons rotule.

Les cafards sont des créatures très sophistiquées et très résistantes (ils ont, par exemple, survécu aux radiations atomiques d'Hiroshima). Ils possèdent donc de nombreuses caractéristiques qu'il est intéressant de reproduire.

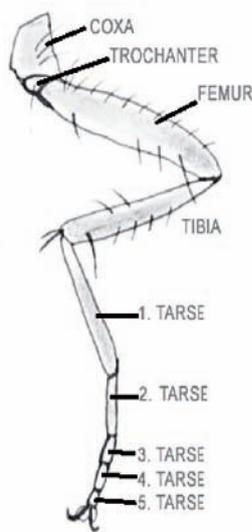
Description du mouvement

Le cafard, lors de son déplacement, alterne un mouvement sur trois pattes : chaque *tripode* est composé de la patte antérieure et de la patte postérieure d'un côté ainsi que de la patte centrale du côté opposé **4**. Il n'y a donc que trois pattes en contact avec le sol à la fois au cours du mouvement.

Vitesse et changement de direction

Les cafards possèdent des réflexes de fuite très développés, grâce aux *soies*, poils très fins disposés tout le long de leurs pattes. Ces soies les dotent d'une sensibilité directionnelle extrême : leur première réaction motrice en cas de fuite est orientée dans le sens du mouvement de l'air, donc en sens opposé à la position du prédateur. Aussi le cafard démarre-t-il en moins de 54 millièmes

[1] Professeur agrégé de mécanique au lycée Chaptal de Paris, précédemment professeur de sciences de l'ingénieur au lycée Louis-le-Grand (75005 Paris)



3 La constitution d'une patte

de seconde, et, à la vitesse moyenne de 3,6 km/h, il peut changer 25 fois de direction par seconde. Le cafard est le seul animal connu doté d'un tel sens de l'orientation dans l'espace, et capable de changer de direction si fréquemment.

Différents robots mobiles

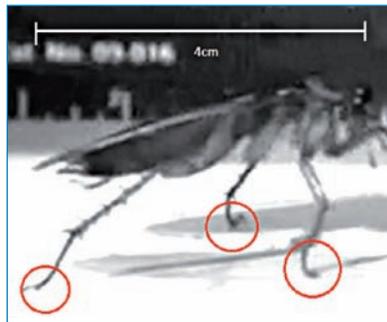
Nous allons à présent nous intéresser à différents robots mobiles, inspirés d'hexapodes, afin de diriger la réalisation de notre robot vers un modèle similaire.

● Robot III

Robot III est un robot à moteur pneumatique 5. Il a été conçu à Case Western Reserve University aux États-Unis (CWRU), d'après une espèce de grande blatte d'Amérique du Sud, *Blaberus discoidalis*. Ce robot a au total 24 degrés de liberté : 5 degrés pour chaque patte de devant, 4 pour celles du milieu et 3 pour les pattes arrière. Il se commande à l'aide de cylindres de conservation et de blocs de vannes à trois voies pneumatiques. Sa structure est faite de pièces usinées en alliage d'aluminium de haute qualité.

● Le cricket microrobot

Ce microrobot en forme de grillon se déplace en marchant et en sautant 6. Il fait partie d'un programme de recherche basé sur le biomimétisme à CWRU, et a été développé par une équipe interdisciplinaire de l'université et d'étudiants faisant partie du programme



4 Cafard en cours de déplacement



6 Le cricket microrobot

Darpa (Defense Advanced Research Projects Agency) Distributed Robotics. Un microrobot ne doit dépasser 5 cm sur aucune dimension, longueur, largeur, hauteur.

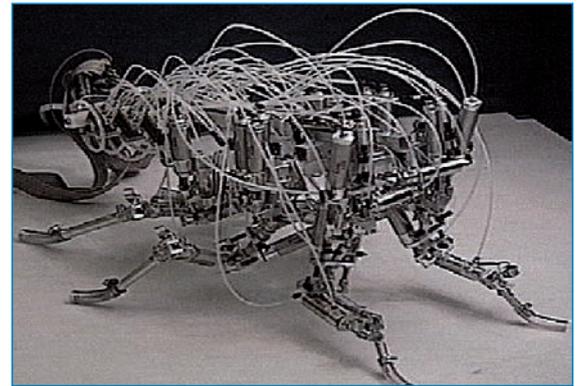
● RHex

RHex 7 est un petit robot à six pattes créé par la société américaine Boston Dynamics. Il s'agit d'un robot portable ayant la capacité de se mouvoir sur des terrains particulièrement complexes. Il peut en effet se déplacer sur des cailloux, dans la boue, sur du sable, de la végétation diverse, ou encore des rails de chemin de fer, des poteaux téléphoniques mais aussi sur des surfaces pentues ou des escaliers. Le corps de RHex est enfermé dans une coque étanche, ce qui le rend totalement opérationnel en milieu humide ou dans un environnement boueux. Il peut aussi nager en surface ou plonger sous l'eau.

RHex se présente globalement sous la forme d'un parallépipède d'environ 50 cm de long et de 10 cm d'épaisseur. Sur ses flancs se trouvent six axes répartis régulièrement (3 de chaque côté) sur lesquels sont implantées



7 Le robot RHex (sans sa coque)



5 Robot III

2 Des pattes constituées de 3 principaux segments

six pattes. Chaque patte est une lame recourbée (en demi-cercle) non articulée. Chacune de ces pattes est contrôlée par un moteur indépendant. Pour la nage sous-marine, elles peuvent être remplacées par des lames non recourbées. Il se déplace à 2,7 m/s.

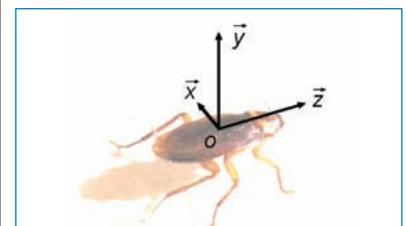
Notons que tous les robots hexapodes déjà existants, inspirés de la nature, sont très complexes et requièrent de nombreux composants mécaniques et de motorisation. Pour le nôtre, nous nous sommes imposé les contraintes suivantes :

- Biomimétisme appliqué au cafard
- Légèreté
- Rapidité
- Petite taille
- Faible coût de réalisation d'un prototype

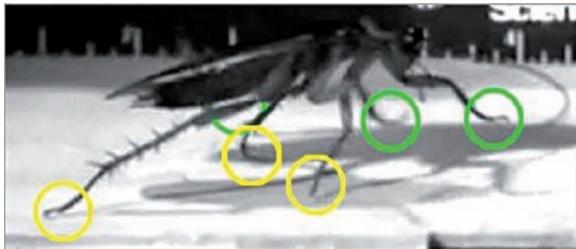
De l'observation à la modélisation

Pour comprendre comment nous avons modélisé le déplacement d'un cafard, nous allons retracer les différentes étapes de notre travail.

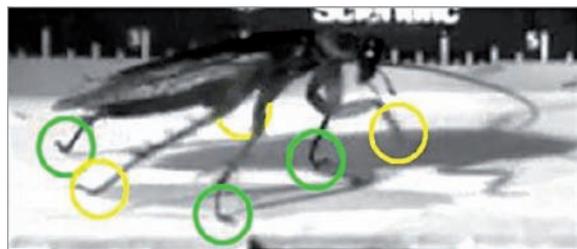
Pour déterminer le type de liaison qui le reproduirait le plus fidèlement, nous avons observé le lien entre la patte et le corps du cafard lors du déplacement de ce dernier. Il possède trois degrés de liberté : trois rotations autour des axes \bar{x} , \bar{y} et \bar{z} . Nous l'avons donc modélisé par une liaison rotule 8.



8 Le repère associé

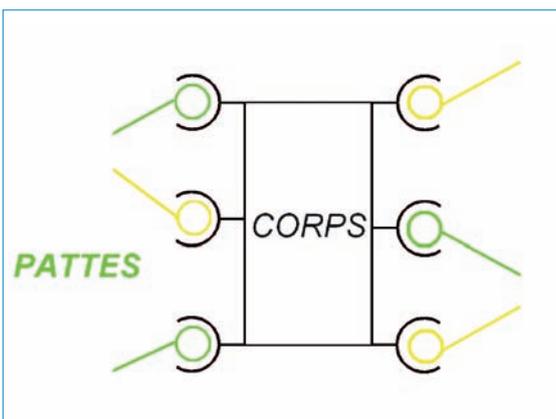


a Le tripode jaune en appui

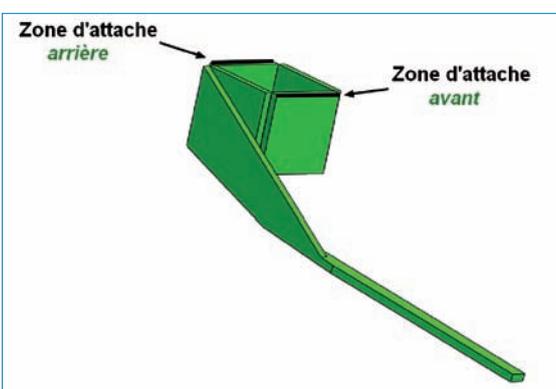


b Le tripode vert en appui

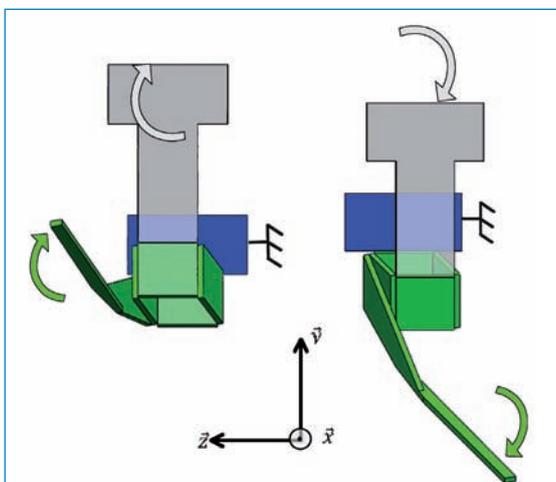
9 La position des tripodes au cours du mouvement



10 La modélisation du cafard



11 Une patte



12 Le système d'attache des pattes d'un des deux tripodes (en gris la partie mobile ; en bleu la partie fixe ; en vert la patte)

Nous avons ensuite observé le mouvement des pattes les unes par rapport aux autres. Il se caractérise par une *rotation de deux groupes de trois pattes*. Chacun de ces deux tripodes est composé de la patte antérieure et de la patte postérieure d'un côté ainsi que de la patte centrale du côté opposé. Le mouvement des pattes étant alterné, il n'y a donc que *trois pattes en contact avec le sol à la fois*. Sur la figure 9, les pattes d'un tripode sont entourées de la même couleur. On peut ainsi voir qu'en 9a le tripode jaune est en contact avec le sol alors qu'en 9b c'est le tripode vert. Alors que le corps reste immobile, les pattes ont un mouvement de rotation.

On peut ainsi modéliser le mouvement des trois pattes d'un même côté comme trois rotations de même sens, alternées 10. Quand un des deux tripodes va vers l'avant, le second va vers l'arrière. De même, quand un tripode se déplace vers le haut, le second va vers le bas.

De la modélisation à la conception du robot

Avant de passer à la réalisation de notre robot, nous avons dû trouver un modèle qui vérifie la liaison rotule

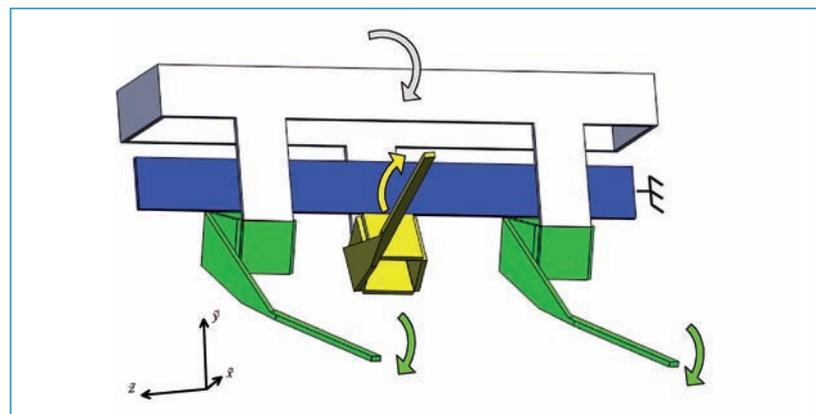
entre le corps et la patte, le contact de trois pattes avec le sol et le mouvement en alternance des pattes.

La conception cinématique

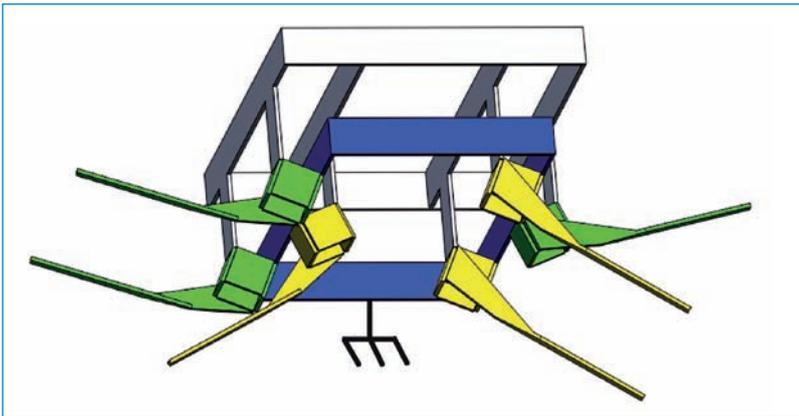
À partir d'une action unique, nous devons obtenir deux rotations indépendantes comme dans le cas d'une liaison sphérique à doigt. L'idée est venue d'utiliser une structure carrée déformable en ses arrêtes 11 pour obtenir une rotation d'axe \vec{y} . Cette structure, attachée au bâti par l'avant ou par l'arrière avec une liaison déformable, autorisera également une rotation d'axe \vec{x} .

La figure 12 présente le mouvement d'une patte. Apparaissent, en gris, la partie mobile qui actionne la patte, en bleu, la partie fixe. L'avant de la patte est fixé sur la partie mobile ; l'arrière sur la partie fixe.

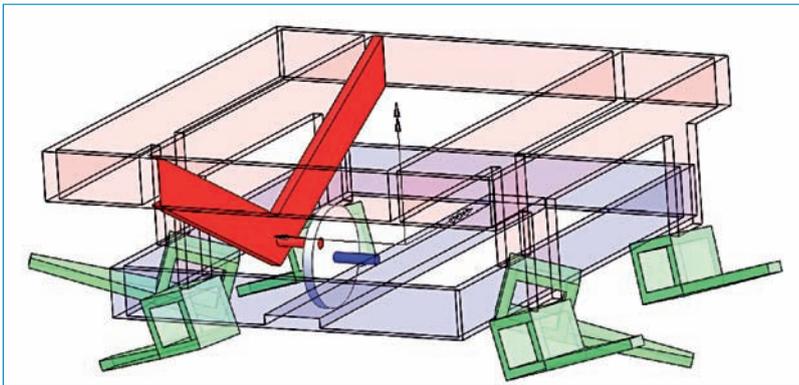
Revenons à notre première étude du mouvement d'un hexapode. Sur la figure 10, nous avons remarqué que les trois pattes d'un même tripode avaient un mouvement identique. Pour ce faire, les pattes antérieure et postérieure d'un même côté sont animées d'un mouvement similaire, tandis que la patte centrale doit décrire un même mouvement mais alterné par



13 Trois pattes d'un côté



14 La représentation de la cinématique complète du robot hexapode imaginaire



15 La transmission du mouvement de rotation (mors en V en rouge, moteur en bleu et roue en blanc)

rapport aux deux autres. Une simple inversion des points d'attache résout le problème : l'avant de la patte est fixé sur la partie fixe ; l'arrière sur la partie mobile.

Nous aboutissons ainsi à un bâti fixe et à une partie mobile unique, sur lesquels sont fixées les trois pattes 13. Les pattes antérieure et postérieure en vert sont fixées sur le bâti fixe en bleu par l'arrière et sur la partie mobile par l'avant. La patte centrale en jaune est fixée sur le bâti fixe par l'avant et sur la partie mobile par l'arrière.

Le côté opposé présente des contraintes similaires. Il n'est qu'une inversion du premier. Ainsi, nous attachons les pattes suivant un schéma inversé : les pattes antérieure et postérieure sont fixées au bâti fixe par l'arrière et à la partie mobile par l'avant ; la patte centrale est fixée au bâti fixe par l'avant et à la partie mobile par l'arrière.

On peut maintenant réunir les deux côtés pour aboutir à un modèle réaliste 14. Le bâti bleu est fixe. La partie mobile est animée d'un mouvement de rotation d'axe \bar{x} par rapport au bâti, qu'elle transmet aux pattes.

L'implantation de la motorisation

Nous allons maintenant voir comment le mouvement de rotation peut être transmis à la partie mobile.

Celle-ci est fixée par l'intermédiaire de deux barres en V à un maneton excentré d'une roue entraînée en rotation par un moteur solidaire du bâti 15. Ainsi, quand le moteur fait tourner la roue, les barres en V ont un mouvement de translation circulaire par rapport au bâti pour permettre l'actionnement synchronisé des deux tripodes.

De la conception au prototype

Les différents prototypes

La construction du robot s'est donc faite par étapes, par la réalisation de plusieurs prototypes dont nous évaluons avantages et défauts de façon à améliorer le fonctionnement en intégrant une ou plusieurs modifications. Nous avons ainsi réalisé neuf prototypes.

Le premier essai était en carton. Il nous a servi à mieux comprendre le fonctionnement général du robot,

et les problèmes que nous risquons de rencontrer. Il est très grand et peu précis.

Le suivant, haut de 5,9 cm (sans les pattes), long de 10,2 cm et large de 8,5 cm, était entièrement en polypropylène expansé (EPP). Ses différentes parties furent collées à la colle cyanoacrylate. L'EPP a une bonne souplesse et se déforme sans se casser, tout en étant très léger. Mais ce prototype était trop déformable, et le mouvement créé par le moteur n'aurait pas pu être transmis correctement. Il fallait le rigidifier.

Pour les prototypes suivants, nous avons utilisé du polycarbonate pour renforcer l'EPP. Mais le robot était alors trop rigide, à cause de la colle qui ne permettait pas assez de mouvement entre les parties.

Par la suite, au niveau des articulations des pattes, nous avons remplacé la colle par du ruban adhésif armé. La rigidité nous semblait acceptable, et nous avons placé les pattes pour faire des tests de motricité. Nous nous sommes alors rendu compte qu'elles étaient trop rapprochées les unes des autres, et que le robot n'avait pas un bon équilibre. De plus, comme elles ont un mouvement alterné, elles se heurtaient au cours de la mise en mouvement.

Pour le prototype suivant, nous avons changé les dimensions du robot pour écarter les pattes afin qu'elles ne se heurtent plus et pour donner plus d'équilibre.

Nous avons installé le moteur et tenté de le faire marcher. Impossible : la structure était trop lourde pour être soulevée, la partie qui aurait dû être en rotation est restée immobile.

Par la suite, nous avons réalisé une maquette entièrement en polycarbonate, excepté au niveau des articulations des pattes, pour une raison de légèreté, et d'esthétique.

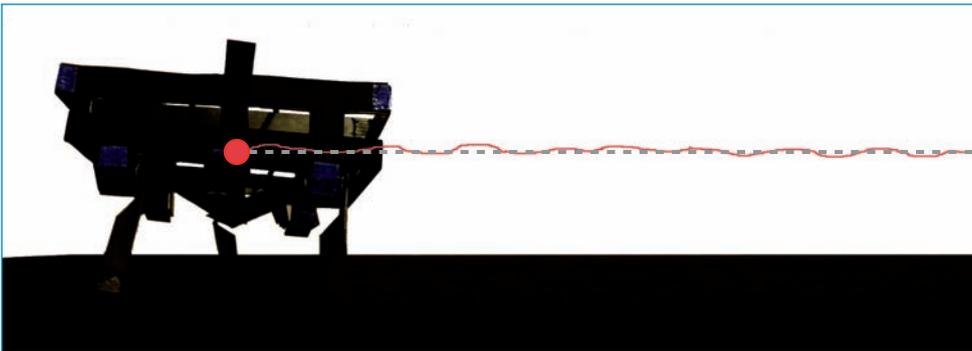
Et enfin, au neuvième essai, nous avons changé le dessin des pattes pour avoir plus de souplesse au niveau de la liaison rotule 16.

● Les matériaux

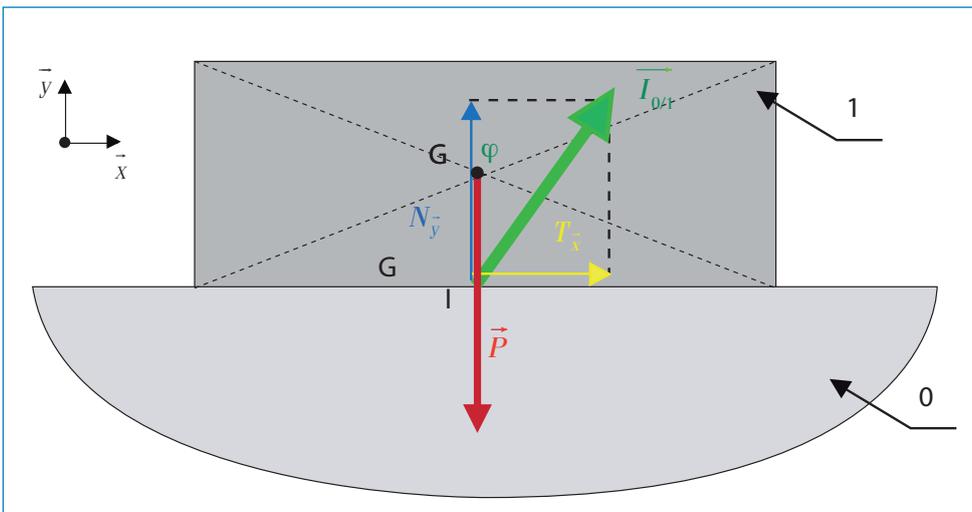
Le corps du robot est en polycarbonate. Toutes les parties du corps sont



16 La version aboutie du prototype



17 Le centre de masse suit approximativement une trajectoire sinusoïdale en rouge, très proche de la ligne en pointillés, qui représente la trajectoire idéale du centre de masse, rectiligne. Notre robot se déplace ici à 1 m/s



18 La modélisation du robot

collées entre elles, avec de la colle cyanoacrylate pour les liaisons rigides, ou avec du ruban adhésif armé pour les liaisons flexibles.

● Les composants

Notre robot comprend donc :

- un motoréducteur
- Il met la partie mobile en mouvement de translation circulaire pour déplacer le robot.
- une batterie
- Elle assure l'alimentation et l'autonomie du robot.
- un circuit intégré

une diode électroluminescente
Elle permet la radiocommande du robot par l'intermédiaire d'une télécommande.

L'étude dynamique du robot

L'étude du robot en fonctionnement montre que son centre de masse, que nous assimilerons à son centre de gravité G, suit une trajectoire quasi rectiligne, comme on peut le voir sur la figure 17, où il est suivi pendant 0,5 s. Sa trajectoire est donc considérée comme rectiligne. La trajectoire du robot pouvant être assimilée à celle de son centre

masse, elle correspond au mouvement recherché – rectiligne et uniforme –, et suit le modèle de « glissement » attendu. De plus, le robot étant proche du sol, la perte énergétique est minimale, et le déplacement le plus rapide possible.

L'étude des forces extérieures au système

- Système isolé : {robot}
- Référentiel : terrestre galiléen
- Inventaire des forces extérieures : La liaison entre 1 et 0 n'est pas parfaite, le système est donc soumis à son poids P et à des réactions avec le sol I_{0/1}.

$\vec{P} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} mg$	$\vec{I}_{0/1} \begin{vmatrix} T \\ N \\ 0 \end{vmatrix}$
---	---

Le mouvement est supposé rectiligne et uniforme, donc, d'après la 1^{re} loi de Newton, la somme des forces extérieures appliquées au système 18 est nulle :

$$\vec{I}_{0/1} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$P = mg = 0,025 \times 9,81 = 0,25 \text{ N}$$

Sur \vec{x} : $T = 0 \text{ N}$

Sur \vec{y} : $N - P = 0 \Rightarrow N = mg$
donc $N = 0,25 \text{ N}$

Nous cherchons à déterminer la variation de l'énergie mécanique du système : notre système perd-il de l'énergie au cours du mouvement ?

Définissons l'énergie mécanique du système. Elle est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie cinétique du système :

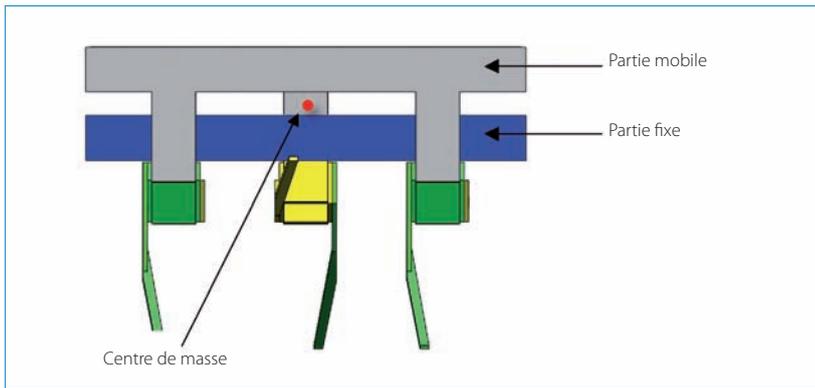
$$E_M = E_K + E_{pp}$$

La variation de l'énergie mécanique du système est donc :

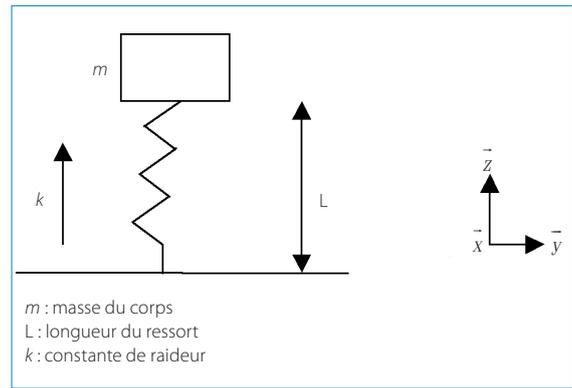
$$\Delta E_M = \Delta E_K + \Delta E_{pp}$$

● Calcul de la variation d'énergie cinétique ΔE_K

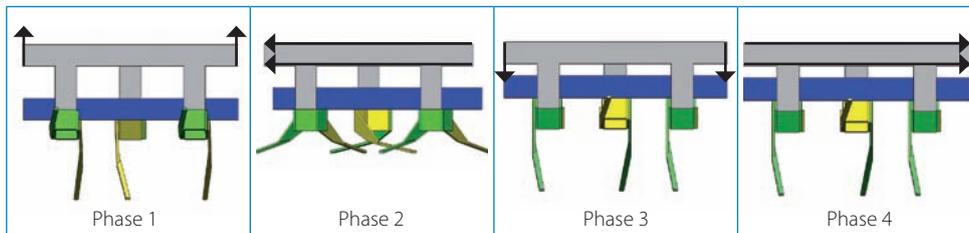
L'énergie cinétique d'un système est l'énergie que possède un solide du fait de son mouvement. C'est la somme des travaux des forces extérieures qui agissent sur le système.



20 La schématisation du robot



22 Le modèle « masse-ressort » ou « solide-ressort »



21 Les 4 phases du mouvement

$$E_k = \sum [W(\vec{F})_{A \rightarrow B}]$$

Au cours du mouvement, les caractéristiques des trois forces extérieures appliquées au système, T_x , N_y et \vec{P} , sont inchangées. Ces trois forces sont donc constantes, et leurs travaux définis ainsi 19 :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cdot (AB) \cdot \cos \alpha$$

● Analyse des travaux des forces extérieures

$$W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = P \cdot (AB) \cdot \cos \alpha$$

Or $\cos \alpha = \cos \pi/2 = 0$ donc $W(\vec{P}) = 0$

$$W(T_x) = T_x \cdot \vec{AB} = T \cdot (AB) \cdot \cos \alpha = 0 \cdot (AB) \cdot 1 = 0$$

$$W(N_y) = N_y \cdot \vec{AB} = R_n \cdot (AB) \cdot \cos \alpha = N \cdot (AB) \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Donc

$$\sum [W(\vec{F})_{A \rightarrow B}] = 0 \text{ et } E_k = 0$$

Entre les instants A et B, on a donc

$$\Delta E_k = 0$$

● Calcul de la variation d'énergie potentielle de pesanteur ΔE_{pp}

L'énergie potentielle de pesanteur est l'énergie qu'un objet possède du fait de son interaction avec la Terre. Elle varie donc en fonction de l'altitude de l'objet considéré.

Par définition :

$$E_{pp} = + m \cdot g \cdot h$$

Or

$$W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = -m \cdot g \cdot h$$

donc :

$$E_{pp} = -W(\vec{P}) = 0$$

Entre les instants A et B, on a donc : $\Delta E_{pp} = 0$

L'énergie mécanique du système est donc constante au cours du mouvement :

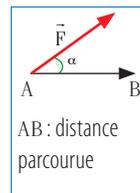
$$\Delta E_M = \Delta E_k + \Delta E_{pp} = 0 \Rightarrow E_M = Cte$$

Conclusion, notre système est *conservatif* : au cours du mouvement, le robot ne perd pas d'énergie.

Mais l'étude des réactions avec le sol doit être poussée plus avant pour que l'on comprenne les transferts d'énergie internes au système. Nous commencerons par déterminer les forces internes au système.

L'étude des forces internes : forces avant-arrière

La schématisation du robot est donnée en figure 20.



19 Le travail de la force \vec{F}

Lorsque le robot décrit une trajectoire rectiligne, le mouvement peut être décomposé en quatre phases 21.

Rappelons qu'au cours du mouvement la partie mobile décrit un mouvement de translation circulaire par rapport à la partie fixe.

Il existe aujourd'hui un système de modélisation qui permet de cerner les particularités du mouvement étudié, de modéliser les transferts d'énergie au cours de la locomotion : le modèle *masse-ressort* ou *solide-ressort*. C'est le modèle le plus souvent utilisé pour décrire le mouvement des pattes ou jambes des êtres vivants.

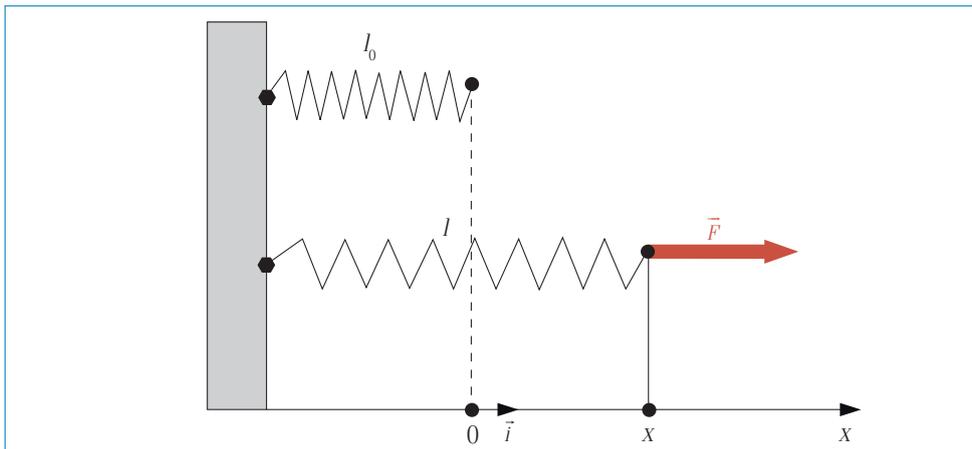
L'étude des forces internes : transferts d'énergie interne aux pattes

Le modèle masse-ressort ou solide-ressort est un système mécanique à un degré de liberté composé des éléments suivants 22 :

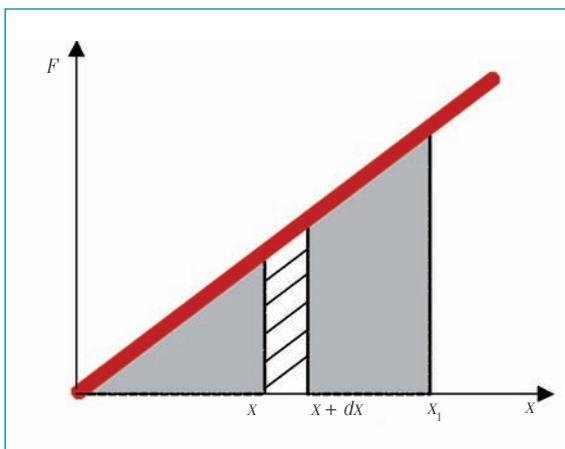
- un ressort linéaire simple, représentant usuellement une jambe, dans notre cas une patte, contraint à se déplacer suivant un axe unique, ici \vec{z} ;
- une masse, fixée au ressort, qui englobe la masse totale du système.

Nous cherchons à déterminer l'énergie mécanique du système. L'énergie mécanique d'un système masse-ressort se décompose en deux énergies : c'est la somme de l'énergie potentielle élastique du ressort et de l'énergie cinétique de la masse.

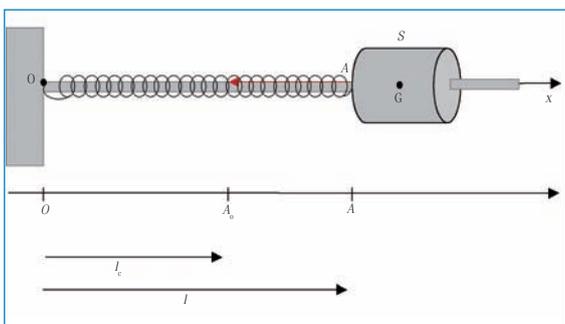
Qu'est-ce que l'énergie potentielle élastique d'un ressort ? Pour bander la corde d'un arc, par exemple, ou déformer un ressort, on doit exercer une force dont le point d'application se déplace. Cette force effectue un travail moteur et fournit au ressort de l'énergie qu'il emmagasine. Elle est



23 La caractérisation du ressort



24 Le travail élémentaire de la force exercée sur le ressort (aire hachurée) et le travail de la force pour un allongement x_1 (aire grisée)



25 La modélisation d'un oscillateur horizontal

d'autant plus importante que le ressort ou l'élastique est tendu. Calculons cette force, que l'on nommera \vec{F} .

Pour maintenir un allongement, on doit exercer une force F telle que 23 :

$$F = k(l - l_0)$$

- l_0 : longueur à vide du ressort
- l : longueur du ressort lorsqu'il est étiré ou comprimé
- $x = l - l_0$: l'allongement du ressort (de valeur algébrique positive pour un étirement et négative pour une compression)
- k : constante de raideur

Avec les notations de la figure 22 :

$$\vec{F} = k \cdot x \cdot \vec{x}$$

À partir de la longueur l , pour provoquer un déplacement supplémentaire $d\vec{l} = dx \cdot \vec{x}$ de l'extrémité A du ressort, la force \vec{F} exercée par l'opérateur doit fournir le travail :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = k \cdot x \cdot \vec{x} \cdot dx \cdot \vec{x} = k \cdot x \cdot dx$$

Le travail de la force exercée par l'opérateur pour provoquer un allongement final $x_1 = l_1 - l_0$, l'allongement passant de la valeur nulle au départ à la valeur finale x_1 , s'écrit sous la forme de l'intégrale suivante 24 :

$$W(\vec{F}) = \int_0^{x_1} k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} k \cdot x_1^2$$

Le travail d'une force appliquée à l'extrémité d'un ressort qui provoque un allongement x_1 partant de sa longueur naturelle est donc tel que :

$$W(\vec{F}) = \frac{1}{2} k \cdot x_1^2$$

L'énergie potentielle élastique emmagasinée dans un ressort est égale au travail effectué par un opérateur pour le déformer. L'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k , dont l'allongement est x , est donc égale à :

$$E_{p\text{élast}} = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Nous avons défini précédemment l'énergie mécanique d'un système comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie poten-

tielle de pesanteur. De façon analogue, nous pouvons définir l'énergie mécanique d'un système masse-ressort comme la somme de l'énergie cinétique de la masse et de l'énergie potentielle élastique du ressort. On néglige pour notre étude l'énergie de pesanteur du système, car ses variations sont trop infimes. Dans ces conditions :

$$E_M = E_c + E_{p\text{élast}}$$

Au cours d'une oscillation du système, lorsque la masse se rapproche de sa position d'équilibre ($x = 0$), l'énergie cinétique E_c augmente et l'énergie potentielle élastique $E_{p\text{élast}}$ diminue ; lorsque la masse s'éloigne de sa position d'équilibre, E_c diminue et $E_{p\text{élast}}$ augmente.

Au cours du mouvement, il y a transformation d'énergie cinétique en énergie potentielle élastique et réciproquement (et conservation de l'énergie mécanique).

De plus, rappelons que

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2$$

Reste à déterminer l'énergie cinétique de la masse. Pour ce faire, nous donnerons préalablement un certain nombre de notions indispensables à la compréhension de ce qu'est l'énergie cinétique de la masse d'un système masse-ressort.

De nombreux mécanismes oscillants, comme le système masse-ressort, sont modélisés par un solide relié à l'une des extrémités d'un ressort dont l'autre extrémité est fixe. Le solide peut se déplacer verticalement ou peut coulisser sans frottements sur un axe horizontal 25. Ce système constitue un *oscillateur élastique en translation*.

Lorsque le solide est écarté de sa position de repos, il effectue des oscillations libres très peu amorties. Ces oscillations sont périodiques. La période T_0 des oscillations dépend de la raideur du ressort et de la masse du solide en mouvement. Indépendante de l'amplitude des oscillations, elle est proportionnelle à la racine carrée de la masse m du solide et à la racine carrée de l'inverse de la raideur k du ressort :

$$T_0 = C \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Le même oscillateur peut effectuer des oscillations sur un axe vertical ; la période des oscillations est la même ; l'accélération de la pesanteur g n'intervient pas.

Dans notre cas, on considère un solide de masse m , astreint à se mouvoir sur un coussin d'air horizontal, relié à un ressort horizontal **26**.

● **Système isolé** : {solide sur coussin d'air}

● **Référentiel** : terrestre galiléen. Le système est repéré par l'abscisse x d'un de ses points, par exemple le point G . Lorsque le ressort n'est pas allongé, G est en G_0 .

● **Inventaire des forces extérieures** : le solide est soumis à l'action de son poids \vec{P} et de la force de rappel \vec{F} exercée par le ressort hélicoïdal de raideur k . Par définition,

$$\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{x}$$

La deuxième loi de Newton nous dit que, dans un référentiel galiléen, la somme \vec{F} des forces (\vec{F}_{ap}) appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie G :

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_{ap} = m \cdot \vec{a}_G$$

En appliquant la deuxième loi de Newton au centre d'inertie de notre solide, on obtient :

$$\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Soit un repère de projection dont l'axe est parallèle au ressort et l'origine coïncide avec G_0 . On a

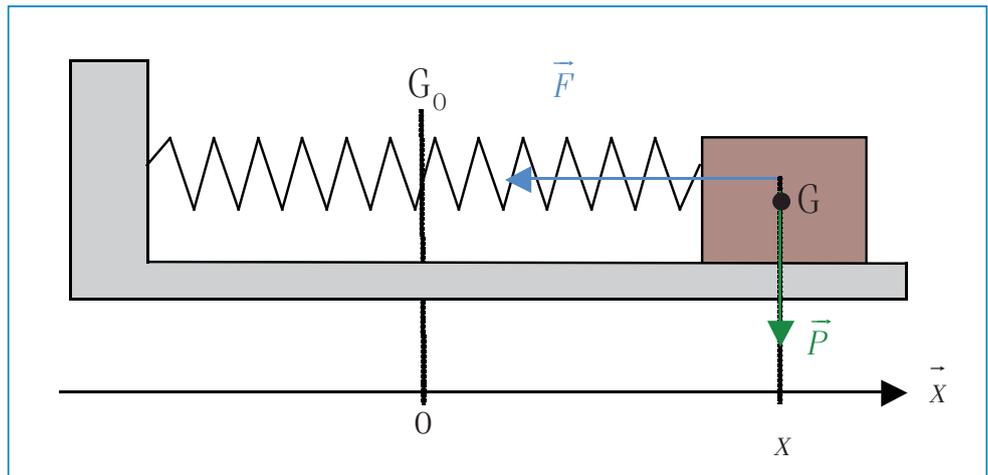
$$\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{x}$$

Par projection sur l'axe (O, \vec{x}) de l'égalité vectorielle exprimant la deuxième loi de Newton, on obtient :

$$0 - k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \quad (2)$$



26 La modélisation avec un solide sur coussin d'air

Nous obtenons une équation différentielle de second ordre :

$$P(X) = X^2 + \frac{k}{m}$$

On sait que :

● si $\Delta > 0$, alors (2) admet deux solutions réelles ;

● si $\Delta = 0$, alors (2) admet une solution réelle ;

● si $\Delta < 0$, alors (2) admet deux solutions complexes.

Dans notre cas,

$$\Delta = -4 \frac{k}{m} < 0$$

L'équation (2) admet donc deux solutions complexes.

Montrons qu'une fonction périodique de période T_0 égale à la période de l'oscillateur et de la forme suivante vérifie l'équation (2) :

$$x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right)$$

Dans cette expression, x_m est l'amplitude du mouvement ($x_m > 0$) ; φ_0 , la phase à l'origine des dates. Ces deux paramètres sont définis à l'instant $t = 0$, ils n'influent pas sur le résultat final.

Comment déterminer x_m et φ_0 ? Ces paramètres sont déterminés à partir des conditions initiales à l'origine des dates $t = 0$.

Par exemple, à l'instant $t_0 = 0$:

- le centre d'inertie du solide est situé au point G_0 d'abscisse $a > 0$;
- la vitesse initiale est $\dot{x}(0) = V_0 = 0$

Écrivons qu'à l'instant $t_0 = 0$ la solution proposée vérifie ces conditions initiales :

$$x(0) = x_m \cos \varphi_0 = a$$

et

$$\dot{x}(0) = -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin \varphi_0 = 0$$

Comme le paramètre x_m est non nul, la deuxième équation impose :

$$\sin \varphi_0 = 0$$

$$\text{soit } \varphi_0 = 0 \text{ ou } \varphi_0 = \pi$$

Or

$$\cos \varphi_0 > 0 \text{ car } a > 0 \text{ et } x_m > 0$$

Donc

$$\varphi_0 = 0$$

Avec ces conditions initiales, l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie s'écrit :

$$x = a \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

Dérivons une première fois (2) par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{x} = -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad (3)$$

Après une seconde dérivation, on a :

$$\ddot{x} = -x_m \cdot \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = -x_m \cdot \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) + \frac{k}{m} \cdot x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \left[\frac{k}{m} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}\right]$$

L'équation (2) est donc toujours vérifiée pour :

$$\frac{k}{m} - \frac{4\pi^2}{T_0^2} = 0$$

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{k}{m}$$

La période propre d'un oscillateur élastique en translation (horizontal ou vertical) est donc :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Nous avons vu précédemment que la position du centre d'inertie et la vitesse de la masse d'un pendule élastique sont données respectivement par les relations :

$$x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right)$$

$$V = \dot{x} = -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right)$$

Exprimons alors l'énergie mécanique totale :

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot V^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot x_m^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) + \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right)$$

Avec

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ soit } T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{k}$$

il vient :

$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 \cdot \left[\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \right]$$

Donc

$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2$$

● **Application numérique**

On mesure expérimentalement :

$$k = 28 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \text{ et } m = 25 \text{ g.}$$

La position initiale du solide est $x(0) = 0$.

La vitesse initiale du solide est $\dot{x}(0) = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,025}{28}} = 0,18\text{s}$$

$$\dot{x} = -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right)$$

À $t = 0$,

$$x(0) = 0 = x_m \cos \varphi_0 \quad (1)$$

et

$$\dot{x}(0) = 1 = -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin \varphi_0 \quad (2)$$

La relation (1) implique :

$$\varphi_0 = \pi / 2 \text{ ou } \varphi_0 = -\pi / 2$$

car $x_m \neq 0$

La relation (2) implique :

$$\sin \varphi_0 < 0 \text{ donc}$$

$$\varphi_0 = -\pi / 2 \text{ et } \sin \varphi_0 = -1$$

car $-x_m \cdot 2\pi / T_0 > 0$

On a donc

$$x_m = 1 \times T_0 / 2\pi = 2,9 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Donc

$$E_m = \frac{1}{2} 28 \times (2,9 \times 10^{-2})^2$$

$$E_m = 0,406 \text{ J}$$

L'énergie interne aux pattes est très petite. Les pertes énergétiques sont donc négligeables. Notre robot rentabilise ainsi au maximum l'énergie reçue. À l'image d'un hexapode vivant, *il minimise sa dépense énergétique.*

Conclusion

Pour aboutir à une modélisation fidèle du cafard, notre étude a suivi trois lignes directrices :

- l'observation du déplacement du cafard dans son environnement ;
- la modélisation de son mouvement, qui a conduit à la conception puis à la réalisation du robot hexapode ;
- l'étude dynamique du prototype.

Notre projet a été essentiellement basé sur l'observation de l'insecte,

ce qui nous a permis de déterminer les caractéristiques du mouvement d'un hexapode. La démarche d'un hexapode est caractérisée par le *mouvement alterné de deux tripodes* : chacun est constitué des deux pattes antérieure et postérieure d'un côté et de la patte centrale du côté opposé. Chaque tripode décrit, au cours du mouvement, une *trajectoire circulaire*, ce qui nous a permis de *modéliser la liaison entre le corps et la patte de l'hexapode par une liaison sphérique à doigt*. Nous avons ainsi défini des contraintes spécifiques à la démarche de l'hexapode que notre modèle doit respecter : alternance des deux tripodes, liaison rotule entre le corps et la patte. Notre robot doit aussi respecter le cahier des charges, qui nous impose légèreté, petite taille et faible coût de production.

Nous avons donc conçu un modèle qui répond à toutes ces contraintes. Ainsi nous avons, en nous inspirant du modèle de la marionnette, modélisé la démarche d'un hexapode et abouti à un robot hexapode.

L'observation externe de notre robot nous prouve que le système est conforme à la démarche d'un hexapode vivant. L'étude dynamique nous confirme la similitude de notre robot avec un cafard : au cours du mouvement, l'énergie reçue est réutilisée de manière optimale.

Notre robot hexapode est petit, léger et peu coûteux. Équipé d'une microcaméra, il pourrait être utilisé à des fins humanitaires. ■

► **Pour en savoir plus**

Sites

Olympiades de Sciences de l'Ingénieur :

www.olympiadessi.org

Union des professeurs de sciences et techniques industrielles :

www.upsti.fr

Dans Technologie

« Les Olympiades de sciences de l'ingénieur », n° 170, nov.-déc. 2010