

Le calcul de roulements par éléments finis dans

FRANÇOIS LOUF, MICHEL POSS⁽¹⁾

L'illustration de démarches de dimensionnement basées sur des outils analytiques peut se faire en utilisant au mieux les possibilités offertes par les codes de calcul éléments finis intégrés aux logiciels de CAO. Les auteurs le démontrent dans cet article qui propose de comparer les résultats classiques de la théorie de Hertz – appliqués à l'étude du comportement interne d'un roulement à billes à contact radial –, avec ceux de la simulation numérique sous un modèleur comme Catia V5.

Introduction

Les moyens logiciels de conception assistée par ordinateur sont parfois associés à des outils de simulation numérique par éléments finis. C'est notamment le cas de Catia V5 ou de SolidWorks. Le fait que ces codes de calcul soient intégrés au logiciel de CAO rend la mise en données du problème mécanique à résoudre beaucoup plus aisée que dans un code classique industriel. Les possibilités sont par contre souvent moindres, mais ils permettent d'obtenir des résultats rapides dans une phase d'avant-projet, d'initier de façon conviviale les étudiants aux méthodes de calcul de structures modernes, et aussi d'illustrer des méthodes de calculs analytiques classiquement enseignées dans des domaines variés tels que **1a** :

- Le dimensionnement de liaison encastrement par adhérence **1a**
- La théorie de Hertz **1b**
- La rigidité d'un engrènement **1c**
- Le comportement statique de roulements **1d**
- Le comportement statique de liaisons boulonnées

Dans cet article, on tente d'illustrer le comportement statique d'un roulement à contact radial avec prise en compte du jeu. Dans un premier temps, on présente la démarche classique (celle de *Systèmes mécaniques*, voir la bibliographie) qui conduit, à partir du comportement local au contact entre les éléments roulants et les bagues défini par la théorie de Hertz, au comportement global du composant.

Dans une deuxième partie, une première analyse éléments finis est réalisée. Le chargement imposé est purement axial de façon à obtenir, par symétrie, un modèle de petite taille comportant un seul élément roulant. Ainsi, il est possible d'effectuer des calculs relativement fins, et de tester la concordance avec les résultats analytiques.

Mots-clés

CAO-DAO, postbac, résistance des matériaux, mécanique, simulation

La troisième partie étend le modèle précédent au cas d'un chargement axial et radial combiné. Puisqu'une seule symétrie subsiste, la moitié du roulement doit être modélisée. L'objectif des calculs menés sera la comparaison des charges locales au niveau des éléments roulants entre les modèles analytique et numérique.

Enfin, le calcul d'un roulement complet est réalisé afin d'observer la variation des efforts globaux en fonction de la position angulaire du plan de chargement par rapport aux éléments roulants.

Étude analytique du roulement

On s'intéresse au comportement statique d'un roulement à billes à contact radial. En particulier, on aimerait retrouver les résultats classiques obtenus à partir de la théorie des roulements, pour un chargement donné :

- Effort transmis au niveau de chaque élément roulant
- Angle de contact sous charge
- Nombre d'éléments roulants chargés

Un roulement à billes à contact radial peut transmettre un effort axial d'autant plus grand qu'il présente un jeu interne important. Ce jeu interne résulte, comme le montre la figure **2a**, du fait que :

– Le rayon de la bille est inférieur aux petits rayons des pistes intérieure et extérieure :

$$r_w < r_i \quad \text{et} \quad r_w < r_e$$

– La différence des grands rayons des pistes extérieure et intérieure est supérieure à deux fois le diamètre de la bille :

$$D_e - D_i > 4r_w$$

Géométrie

La géométrie du roulement considéré dans cette étude est donnée **2a** :

Bagues : $\varphi_i = 35 \text{ mm}$; $\varphi_e = 62 \text{ mm}$

Pistes : $D_i = 40,546 \text{ mm}$; $D_e = 56,448 \text{ mm}$; $r_i = 4,25 \text{ mm}$;

$r_e = 4,29 \text{ mm}$

Billes : $r_w = 3,969 \text{ mm}$

Paramétrage

Les distances entre les centres des petits rayons des bagues et le centre de la bille sont :

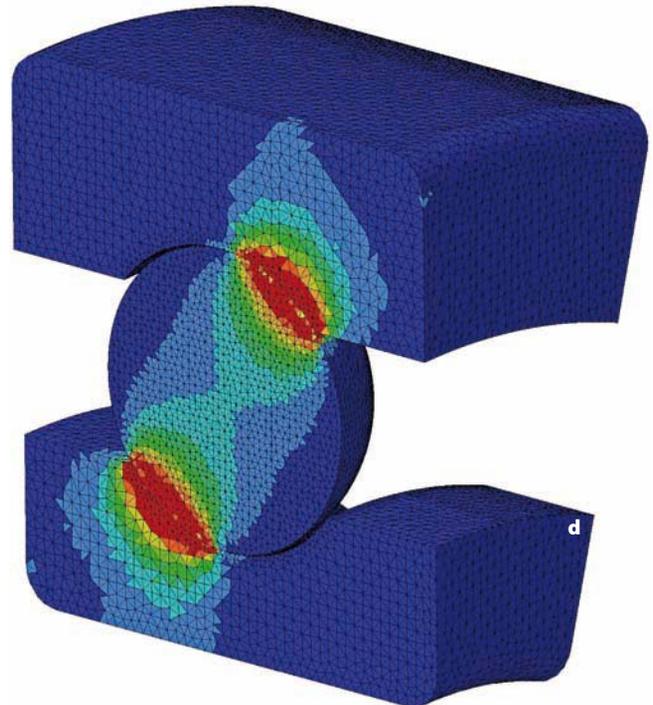
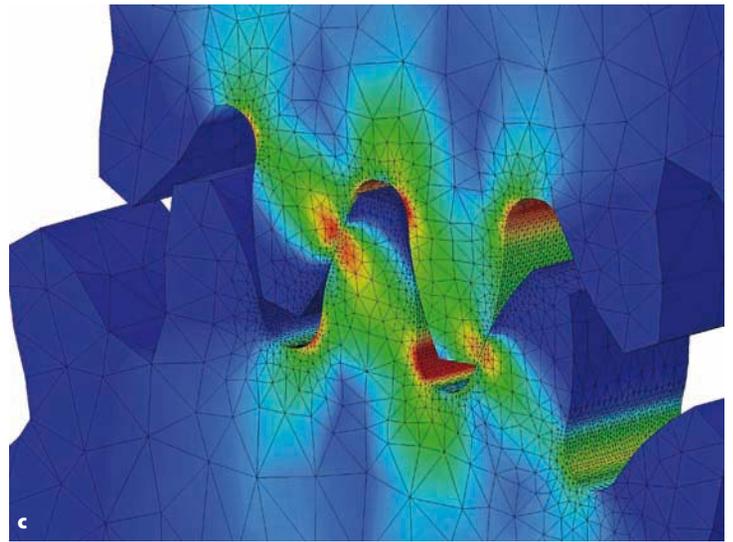
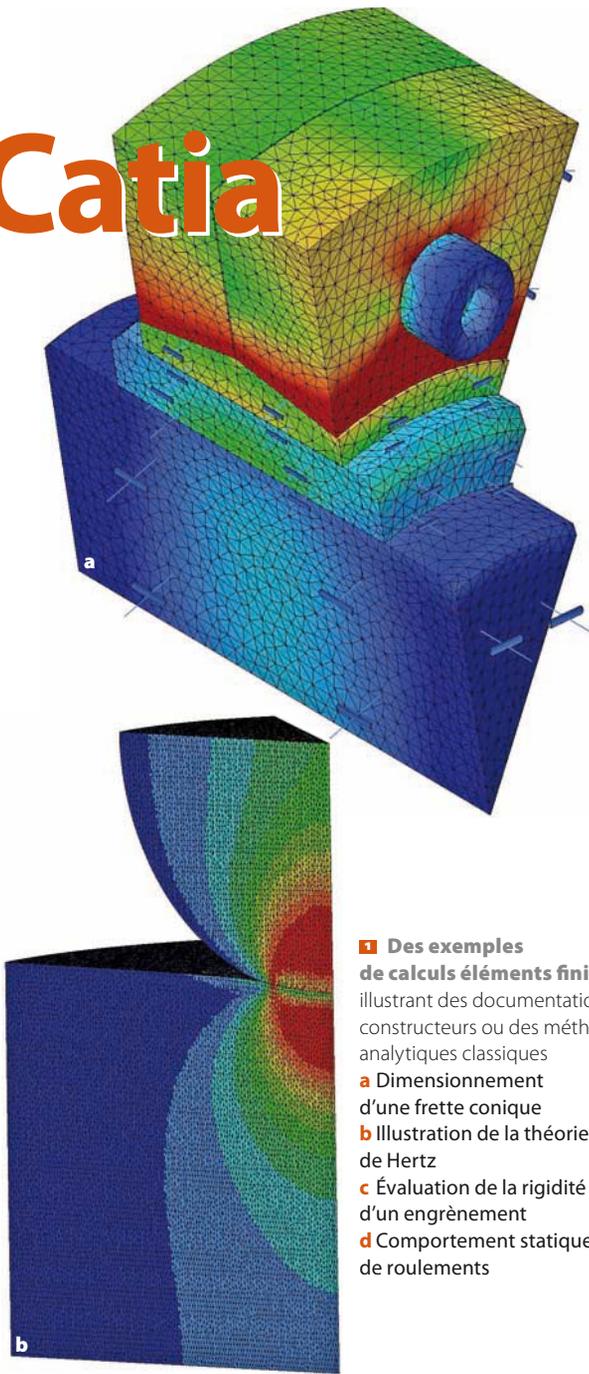
$$O_w O_i = r_i - r_w$$

$$O_w O_e = r_e - r_w$$

Le décalage axial entre les bagues et le centre de la bille est tel que :

$$\left| \overrightarrow{O_w O_i} \cdot \vec{X} \right| = (r_i - r_w) \sin(\alpha_0)$$

Catia



- 1 Des exemples de calculs éléments finis** illustrant des documentations constructeurs ou des méthodes analytiques classiques
- a** Dimensionnement d'une frette conique
 - b** Illustration de la théorie de Hertz
 - c** Évaluation de la rigidité d'un engrènement
 - d** Comportement statique de roulements

$$|\vec{O_w O_e} \cdot \vec{x}| = (r_e - r_w) \sin(\alpha_0)$$

Le décalage axial entre les bagues extérieure et intérieure est donc égal à la somme de ces deux distances :

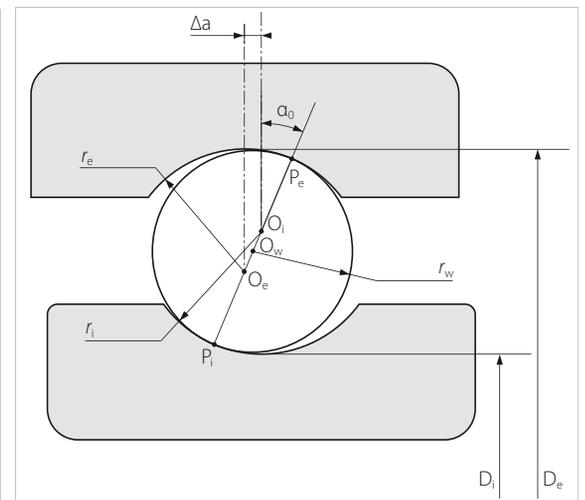
$$\Delta_a = (r_i + r_e - 2r_w) \sin(\alpha_0)$$

La distance d du centre de la bille à l'axe du roulement est donnée par les deux expressions :

$$d(O_w, \vec{x}) = d = \frac{D_i}{2} + r_i - (r_i - r_w) \cos(\alpha_0)$$

$$d(O_w, \vec{x}) = d = \frac{D_e}{2} - r_e + (r_e - r_w) \cos(\alpha_0)$$

[1] Respectivement maître de conférences et sous-directeur de laboratoire des Écoles normales supérieures (SDEN), département de génie mécanique, École normale supérieure de Cachan. Courriels : francois.louf@dgm.ens-cachan.fr ; michel.poss@dgm.ens-cachan.fr



2 La géométrie d'un roulement à billes à contact radial avec jeu – paramétrage

De ces deux expressions se déduit l'angle initial de contact, avant chargement, tenant compte du jeu :

$$\alpha_0 = \arccos \left(\frac{1}{2} \frac{D_i - D_e + 2(r_e + r_i)}{r_e + r_i - 2r_w} \right)$$

Ces relations permettent de positionner correctement les différents éléments du roulement, une fois que toutes les dimensions internes et externes du roulement sont entrées comme paramètres du modèle CAO. Pour le roulement considéré, on obtient les valeurs suivantes :

$$\alpha_0 = 11,93^\circ \quad \Delta_a = 0,124 \text{ mm}$$

Hypothèses

Le mouvement des surfaces de la bague intérieure chargée, en contact avec l'arbre, correspond à un mouvement de corps rigide. Les surfaces de contact entre la bague extérieure et le bâti sont immobiles.

Relation de comportement locale

Le comportement local obéit à la théorie de Hertz : le contact entre l'élément roulant et chaque bague est ponctuel. On peut alors écrire une relation entre l'effort Q_p appliqué par la bague intérieure ou extérieure à la bille et le rapprochement des deux bagues selon la normale de contact δ_p :

$$Q_p = K\delta_p^t$$

avec ici $t = 3/2$ puisque le contact est ponctuel.

Le coefficient de raideur peut être obtenu par la démarche suivante, présentée notamment dans *Systèmes mécaniques*.

La première étape consiste à obtenir les courbures des solides en contact. Celles de la bille sont claires :

$$\rho_1^b = \rho_2^b = \frac{1}{r_w}$$

Celles de la gorge des bagues intérieure et extérieure dépendent en partie de l'angle de contact :

$$\rho_1^i = \frac{1}{r_i}, \quad \rho_2^i = \frac{1}{\frac{d}{2} \cos(\alpha) - r_w}$$

$$\rho_1^e = \frac{1}{r_e}, \quad \rho_2^e = \frac{1}{\frac{d}{2} \cos(\alpha) + r_w}$$

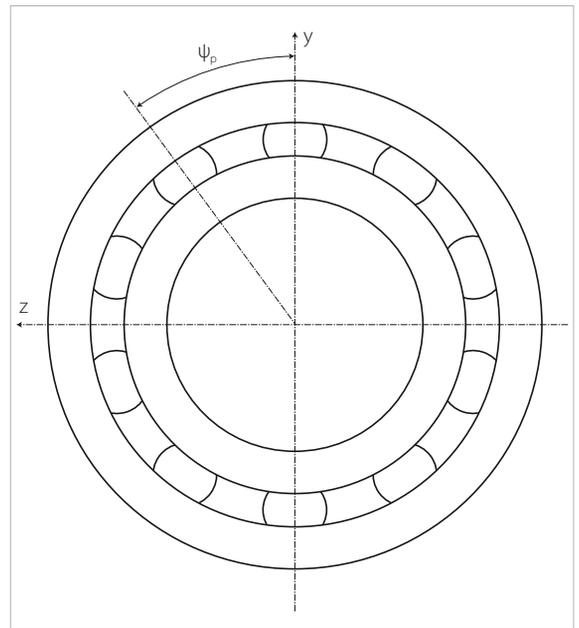
On définit alors la somme des courbures pour chacun des contacts :

$$S_p^i(\alpha) = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{\frac{d}{2} \cos(\alpha) - r_w} + \frac{2}{r_w}$$

$$S_p^e(\alpha) = \frac{1}{r_e} + \frac{1}{\frac{d}{2} \cos(\alpha) + r_w} + \frac{2}{r_w}$$

On définit ensuite les fonctions :

$$F_p^i(\alpha) = \frac{1}{S_p^i} \left[\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_w} \right) + \left(\frac{1}{\frac{d}{2} \cos(\alpha) - r_w} - \frac{1}{r_w} \right) \right]$$



3 Le paramétrage de la position de l'élément roulant n° p

$$F_p^e(\alpha) = \frac{1}{S_p^e} \left[\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w} \right) + \left(\frac{1}{\frac{d}{2} \cos(\alpha) + r_w} - \frac{1}{r_w} \right) \right]$$

On définit ensuite le paramètre matériau :

$$k = \frac{1 - \nu^2}{\pi E}$$

Le grand axe de la zone de contact elliptique est donné par :

$$a_i = m_i \sqrt[3]{\frac{3\pi k}{S_p^i} Q} \quad \text{et} \quad a_e = m_e \sqrt[3]{\frac{3\pi k}{S_p^e} Q}$$

Les coefficients m_i , m_e , γ_i , et γ_e dépendent de la géométrie : rayons de courbure principaux et angles entre les plans de courbure principaux. Les rapprochements de la bille et de la bague intérieure, de la bille et de la bague extérieure sont alors respectivement donnés par :

$$\delta_i = \gamma_i \frac{3\pi k}{2a_i} Q = \gamma_i \frac{\sqrt[3]{2S_p^i} (3\pi k)^{2/3}}{2m_i} Q^{2/3}$$

$$\delta_e = \gamma_e \frac{3\pi k}{2a_e} Q = \gamma_e \frac{\sqrt[3]{2S_p^e} (3\pi k)^{2/3}}{2m_e} Q^{2/3}$$

Le rapprochement local de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure selon la normale de contact est alors :

$$\delta_p = \delta_i + \delta_e = \left(\gamma_i \frac{\sqrt[3]{2S_p^i}}{2m_i} + \gamma_e \frac{\sqrt[3]{2S_p^e}}{2m_e} \right) (3\pi k)^{2/3} Q^{2/3}$$

Cinématique globale et locale

Les déplacements locaux (c'est-à-dire les rapprochements locaux des deux bagues selon la normale de contact au niveau de l'élément roulant n° p, positionné angulairement par le paramètre ψ_p 3) sont liés au déplacement global de la bague intérieure via la relation :

$$\delta_p = \delta_a \sin(\alpha) + \delta_r \cos(\alpha) \cos(\psi_p)$$

Le déplacement local maximal est noté δ_{\max} et vaut :

$$\delta_{\max} = \delta_a \sin(\alpha) + \delta_r \cos(\alpha)$$

On introduit ensuite le paramètre de charge (défini par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_a}{\delta_r} \tan(\alpha) \right)$$

Le paramètre de charge ε est adimensionné et permet notamment de décrire rapidement la manière dont est chargé un roulement :

- Si $\varepsilon = 0,5$, la moitié des éléments roulants est chargée.
- Si $\varepsilon > 1$, tous les éléments roulants sont chargés.
- Si $\varepsilon \ll 0,5$, moins de la moitié des éléments roulants sont chargés, ce qui est considéré comme mauvais pour le roulement.

Le paramètre de charge ε donne facilement l'angle du demi-secteur angulaire comprenant des éléments roulants chargés, c'est-à-dire correspondant à $\delta_p > 0$:

- Si $\varepsilon \ll 1$, alors $\psi_0 = \arccos(1 - 2\varepsilon)$.
- Si $\varepsilon > 1$, alors $\psi_0 = 180^\circ$.

Le déplacement local δ_p peut alors s'exprimer en fonction du paramètre de charge :

$$\frac{\delta_p}{\delta_{\max}} = 1 - \frac{1 - \cos(\psi_p)}{2\varepsilon}$$

Équilibre statique de la bague intérieure

L'équilibre de la bague intérieure donne les relations entre les efforts axial F_a , radial F_r , la réaction F_z dans le déplacement nul imposé selon \vec{z} et les efforts locaux Q_p :

$$F_a = \sin(\alpha) \sum_{p=1}^Z Q_p$$

$$F_r = \cos(\alpha) \sum_{p=1}^Z Q_p \cos(\psi_p)$$

$$F_z = \cos(\alpha) \sum_{p=1}^Z Q_p \sin(\psi_p)$$

Relation de comportement globale

Les relations précédentes combinées permettent d'écrire un premier lien entre les quantités cinématiques et statiques globales :

$$F_a = K\delta_{\max}^t \sin(\alpha) \sum_{p=1}^Z \left\langle 1 - \frac{1 - \cos(\psi_p)}{2\varepsilon} \right\rangle^+$$

$$= K\delta_{\max}^t \sin(\alpha) G_a(\varepsilon, Z)$$

$$F_r = K\delta_{\max}^t \cos(\alpha) \sum_{p=1}^Z \left\langle 1 - \frac{1 - \cos(\psi_p)}{2\varepsilon} \right\rangle^+ \cos(\psi_p)$$

$$= K\delta_{\max}^t \cos(\alpha) G_r(\varepsilon, Z)$$

$$F_z = K\delta_{\max}^t \cos(\alpha) \sum_{p=1}^Z \left\langle 1 - \frac{1 - \cos(\psi_p)}{2\varepsilon} \right\rangle^+ \sin(\psi_p)$$

$$= K\delta_{\max}^t \cos(\alpha) G_z(\varepsilon, Z)$$

La partie positive, désignée par $\langle \cdot \rangle^+$, permet de ne sélectionner dans l'équilibre que les éléments roulants en contact ($\delta_p > 0$). Ces relations constituent les

relations de comportement globales, les déplacements globaux étant cachés dans le paramètre de charge ε et dans l'écrasement maximal δ_{\max} .

Très classiquement, les sommes sur le nombre d'éléments roulants peuvent être approximées par des intégrales définies sur le secteur angulaire des éléments roulant chargés. On obtient alors les approximations des efforts :

$$F_a = K\delta_{\max}^t \sin(\alpha) J_a(\varepsilon)$$

$$\text{avec } J_a(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\psi_0} \left(1 - \frac{1 - \cos(\psi)}{2\varepsilon} \right)^t d\psi$$

$$F_r = K\delta_{\max}^t \cos(\alpha) J_r(\varepsilon)$$

$$\text{avec } J_r(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\psi_0} \left(1 - \frac{1 - \cos(\psi)}{2\varepsilon} \right)^t \cos(\psi) d\psi$$

$$F_z = K\delta_{\max}^t \cos(\alpha) J_z(\varepsilon)$$

$$\text{avec } J_z(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \left(1 - \frac{1 - \cos(\psi)}{2\varepsilon} \right)^t \sin(\psi) d\psi = 0$$

Des relations précédentes, on peut déduire que :

$$\frac{F_a}{F_r} = \frac{J_a(\varepsilon)}{J_r(\varepsilon)} \tan(\alpha)$$

Remarque : On dit parfois qu'un roulement est un générateur de vibrations. En effet, le passage des fonctions sommes aux fonctions intégrales supprime la dépendance des efforts à l'angle $\tilde{\psi}$ d'un plan méridien passant par une bille par rapport au plan méridien contenant le vecteur déplacement. D'ailleurs, l'effort selon l'axe \vec{z} est nul si on le calcule via l'intégrale, mais non nul initialement si l'on ne fait pas l'approximation $J_z(\varepsilon) \approx G_z(\varepsilon, Z)$. Les efforts « exacts » sont décrits par les fonctions suivantes en fonction du décalage angulaire $\tilde{\psi}$:

$$F_a(\tilde{\psi}) = K\delta_{\max}^t \sin(\alpha) \sum_{p=1}^Z \left\langle 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \cos\left(p \frac{2\pi}{Z} + \tilde{\psi}\right) \right) \right\rangle^+$$

$$F_r(\tilde{\psi}) = K\delta_{\max}^t \cos(\alpha) \sum_{p=1}^Z \left\langle 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \cos\left(p \frac{2\pi}{Z} + \tilde{\psi}\right) \right) \right\rangle^+ \cos\left(p \frac{2\pi}{Z} + \tilde{\psi}\right)$$

$$F_z(\tilde{\psi}) = K\delta_{\max}^t \cos(\alpha) \sum_{p=1}^Z \left\langle 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \cos\left(p \frac{2\pi}{Z} + \tilde{\psi}\right) \right) \right\rangle^+ \sin\left(p \frac{2\pi}{Z} + \tilde{\psi}\right)$$

On observe que tous les efforts sont de période $T_F = 2\pi/Z$. Il sera intéressant de retrouver ces résultats par éléments finis.

La vitesse de rotation de la cage par rapport au bâti, dans le cas d'un arbre tournant et d'une bague extérieure fixe, est liée à celle de l'arbre par la relation :

$$\begin{aligned} \omega_c &= \frac{D_i + 2 r_i (1 - \cos(\alpha))}{D_i + 2 r_i (1 - \cos(\alpha)) + D_e - 2 r_e (1 - \cos(\alpha))} \omega \\ &= \frac{d - r_w \cos(\alpha)}{2d} \omega \end{aligned}$$

Cette relation permet de trouver la fréquence d'excitation introduite par le roulement en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre.

L'approximation réalisée est tout à fait valable. En effet, le tracé comparatif des sommes et intégrales pour un roulement à 10 éléments roulants présentés sur la figure 4 montre une grande ressemblance entre les deux courbes, pour un paramètre de charge supérieur à la valeur critique 0,5. Au-dessous de cette valeur, une nette différence apparaît, mais le roulement est alors réellement mal chargé : cette situation est de toutes les façons à éviter.

Obtention par éléments finis de la rigidité axiale du roulement

Conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées sont représentées sur la figure 5.

La bague extérieure est supposée introduite sans jeu dans un logement rigide et en appui sur un plan.

La bague intérieure est chargée via un déplacement purement axial.

Enfin, des blocages correspondant à la périodicité angulaire et aux symétries sont imposés sur les bagues intérieures et extérieures : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Chargement

Le chargement correspond ici à un déplacement imposé des surfaces de la bague intérieure en contact avec l'arbre par rapport au bâti. Le déplacement selon l'axe est noté : δ_a .

Connexions entre pièces

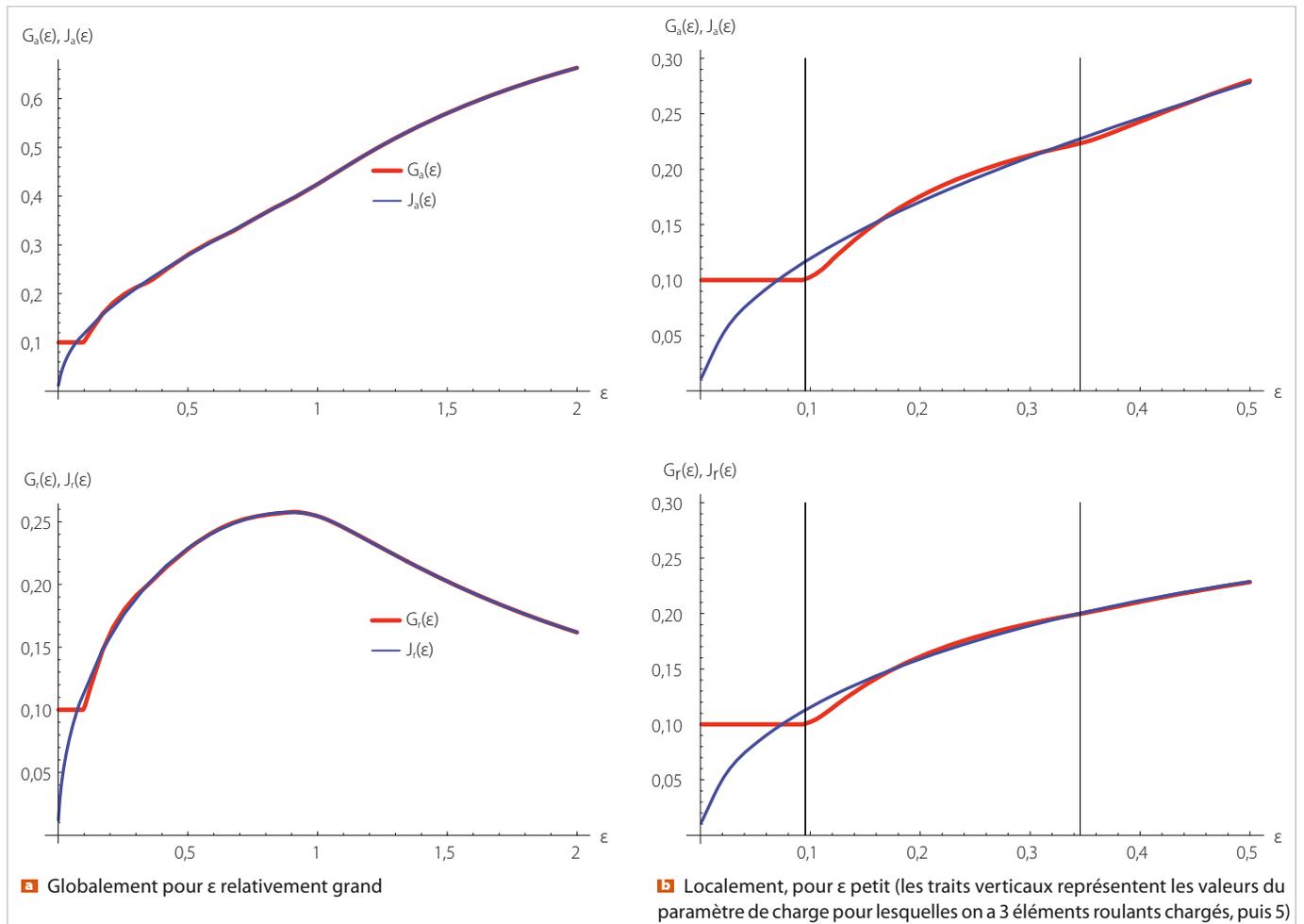
Les degrés de liberté des différents maillages réalisés sont pour le moment totalement indépendants. Il faut :

- préciser que les degrés de libertés en surface de la bille seront reliés à ceux des chemins de roulement ;
- préciser quel est ce lien en pratique (contact dans notre cas).

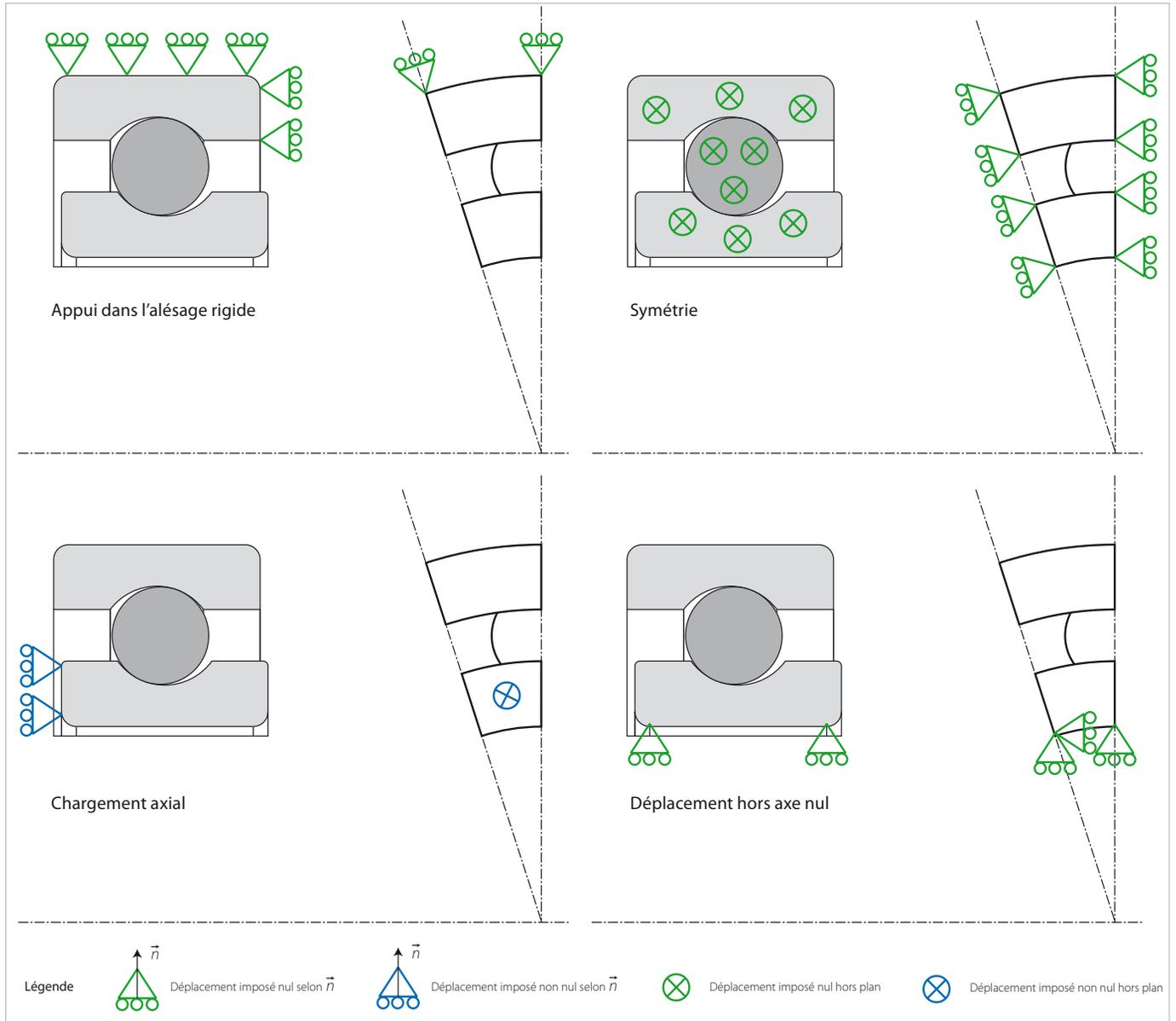
Mouvement de corps rigide

Le calcul ne pourra pas être effectué tant que les mouvements de corps rigides parasites n'auront pas été bloqués. Ce blocage doit se faire sans perturber la solution du problème. Le mouvement de corps rigide présent est constitué par la rotation propre de la demi-bille représentée.

Une façon simple de bloquer ce mouvement dans Catia est d'utiliser une « Pièce virtuelle ressort souple ».



4 Le tracé comparatif des sommes G_r , G_s , et des intégrales J_r , J_s en fonction du paramètre de charge (pour $\dot{\psi} = 0$)



5 Les conditions aux limites utilisées dans le calcul éléments finis portant sur un secteur angulaire du roulement : chargement purement axial

L'aspect souple de la pièce virtuelle permet de ne pas rigidifier la surface de la bille, et l'aspect ressort permet de lier la poignée au bâti par une raideur très faible dans la direction du mouvement de corps solide. Cela suffit à rendre la matrice de rigidité non singulière et ne perturbe pas la solution calculée par éléments finis. La poignée de la pièce virtuelle doit ensuite être bloquée.

Post-traitement

Dans le logiciel, on récupère la réaction R_a dans le déplacement axial imposé, qui conduit à l'estimation de l'effort axial total pour le roulement complet :

$$F_a = 2ZR_a$$

On récupère également le glisseur transmis par l'élément roulant. La donnée des composantes axiale Q_a et radiale Q_r permet de calculer l'angle de contact pour le chargement considéré :

$$\tan(\alpha) = Q_a/Q_r$$

Résultats de calculs

La figure 5 montre les courbes de comportement axial du roulement considéré issues :

- du calcul éléments finis ;
- de la théorie de Hertz sans modification de la valeur de l'angle de contact au cours du chargement ;
- de la théorie de Hertz avec modification de la valeur de l'angle de contact au cours du chargement. La valeur prise pour l'angle de contact dans le calcul analytique est celle obtenue par le calcul éléments finis.

On montre ainsi que la variation de l'angle de contact doit être prise en compte dans l'estimation de la rigidité du roulement sous peine d'une très forte sous-estimation de la rigidité. Le fait que le calcul éléments finis présente une rigidité plus faible que celle issue de la modélisation par la théorie de Hertz peut difficilement s'expliquer par un maillage trop grossier. En effet, de façon générale, un maillage grossier rigidifie une structure. En revanche, on peut noter que la théorie de Hertz

ne prend en compte que les déformations locales, proches du contact, alors que le calcul par éléments finis prend également en compte les déformations dans les zones chargées des bagues intérieure et extérieure, et des billes. Celles-ci sont linéaires en fonction du chargement. Cette hypothèse peut donc expliquer la rigidité excessive du modèle issu de la théorie de Hertz. Une façon de la vérifier consiste à tracer l'écart entre les deux solutions. La figure 1 présente cet écart ainsi que son approximation par une droite. Le coefficient de corrélation obtenu montre que l'hypothèse faite est recevable pour expliquer l'écart observé.

Chargement non purement axial et configuration symétrique

Conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées sont représentées sur la figure 1.

La bague extérieure est supposée introduite sans jeu dans un logement rigide et en appui sur un plan.

Enfin, des blocages correspondant à la symétrie sont imposés sur les bagues intérieure et extérieure :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow u_y = 0$$

Le chargement correspond ici à un déplacement imposé des surfaces de la bague intérieure en contact avec l'arbre par rapport au bâti. Selon l'axe, le déplacement est noté δ_a . Selon la direction normale à l'axe, dans le plan de symétrie, le déplacement est noté δ_r .

Connexions entre pièces

Les degrés de liberté des différents maillages réalisés sont totalement indépendants. Il faut :

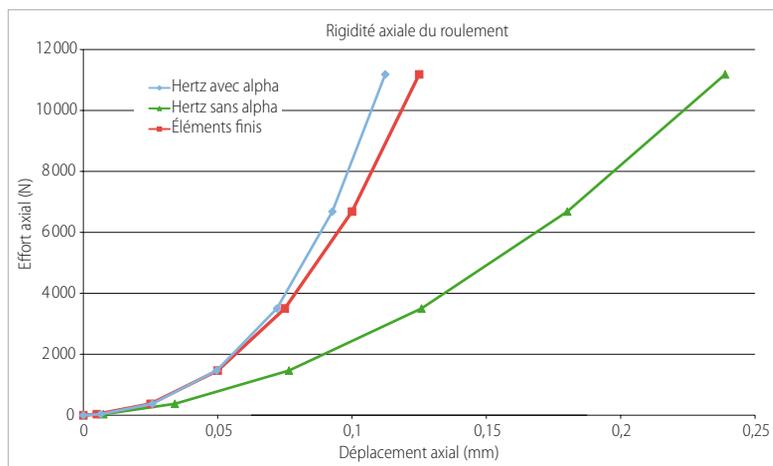
- préciser que les degrés de libertés en surface des billes seront reliés à ceux des chemins de roulement ;
- préciser quel est ce lien en pratique (contact dans notre cas).

Mouvements de corps rigides

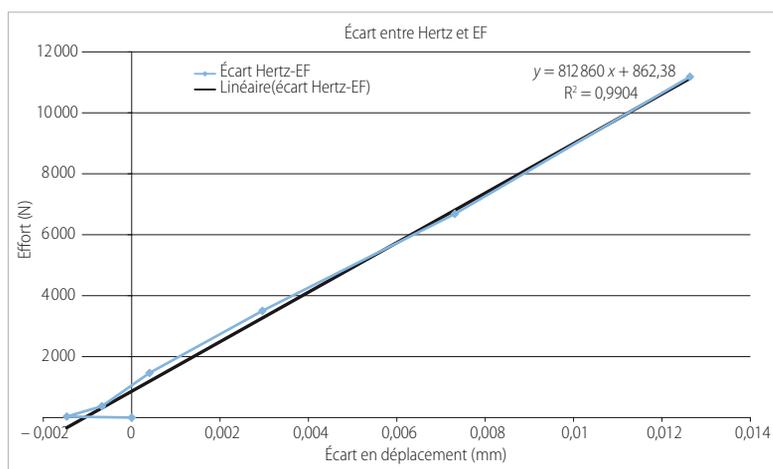
Comme pour le calcul précédemment réalisé, il est nécessaire de bloquer les mouvements de corps rigides. Les mouvements de corps rigides sont ici constitués par :

- les trois rotations propres de chacune des billes complètes ;
- la rotation propre autour d'un axe perpendiculaire au plan de symétrie des demi-billes ;
- les rotations des billes non coupées autour de l'axe du roulement.

Il existe donc toujours 18 mouvements de corps rigides. De nouveau, on utilise dans Catia les pièces virtuelles souples pour – associées à chacun des éléments roulants – bloquer les mouvements de corps solides. Les raideurs associées aux directions dans lesquelles il n'existe pas de mouvement de corps rigide sont imposées nulles. Les autres sont faibles comparées à la rigidité de la structure.



1 Les courbes de comportement axial du roulement issues d'un calcul éléments finis et de la théorie de Hertz avec et sans prise en compte de la variation de l'angle de contact au cours du chargement



1 L'évolution de l'écart en déplacement entre la solution issue de la théorie de Hertz et la solution éléments finis – droite de régression linéaire associée

Post-traitement

Une fois le calcul effectué, le champ de déplacement interpolé sur les fonctions de forme éléments finis est connu. Il reste à calculer, à partir de ce champ, les quantités qui nous intéressent :

- Efforts locaux transmis par chacune des Z billes : Q_p , $p \in \{1, \dots, Z\}$
- Effort globaux de réaction dans les déplacements imposés : F_a , F_r

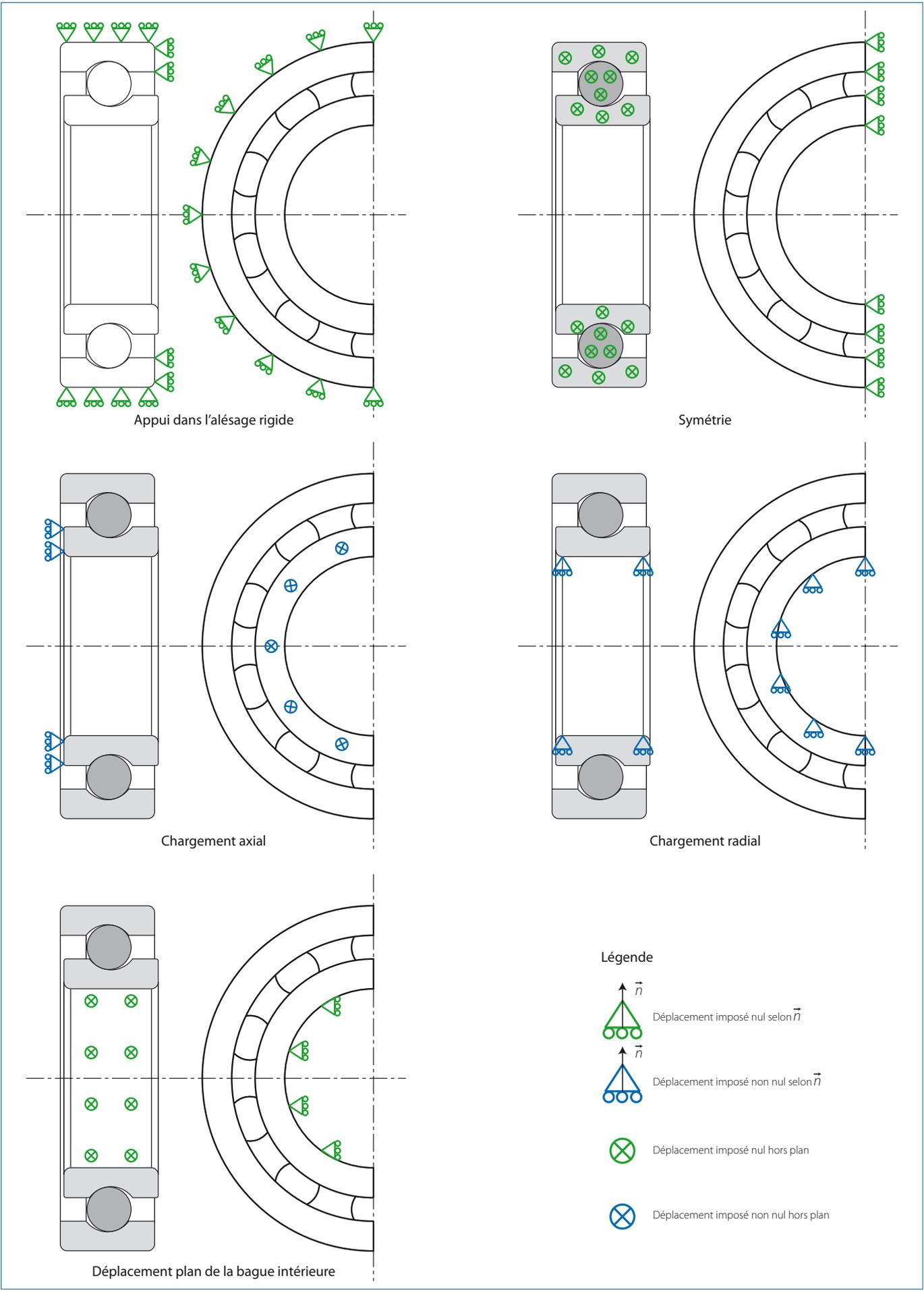
Ces grandeurs peuvent ensuite être comparées à celles issues du modèle analytique précédemment proposé selon la démarche présentée ci-dessous.

La donnée des déplacements globaux δ_a et δ_r et des efforts calculés F_a , F_r dans ces déplacements imposés permet de trouver le paramètre de charge et l'angle de contact α via la résolution des équations non linéaires :

$$\frac{F_a}{F_r} = \frac{J_a(\varepsilon)}{J_r(\varepsilon)} \tan(\alpha)$$

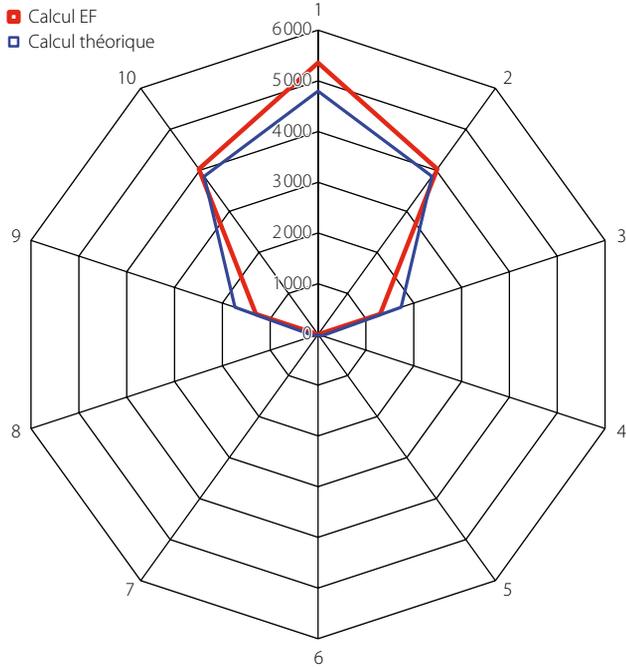
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_a}{\delta_r} \tan(\alpha) \right)$$

Suite p. 43 →



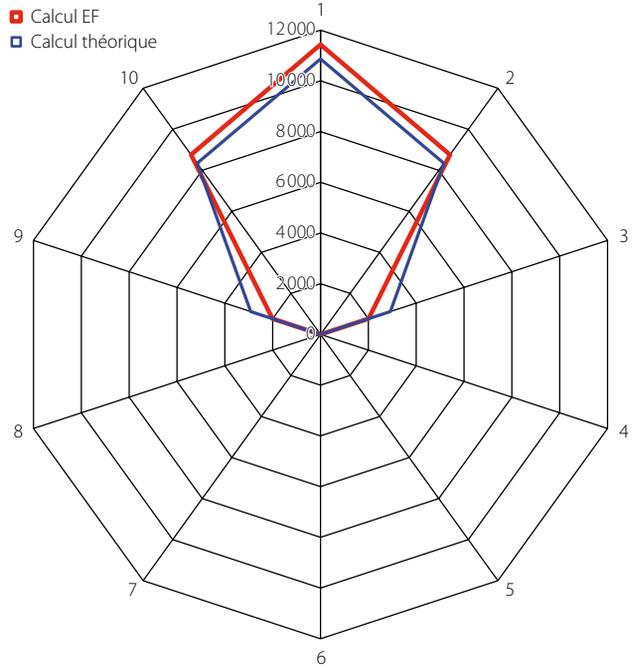
Les conditions aux limites : symétrie, chargement axial et radial, prise en compte des appuis dans le bâti

Da = 0,075 mm - Dr = 0,05 mm



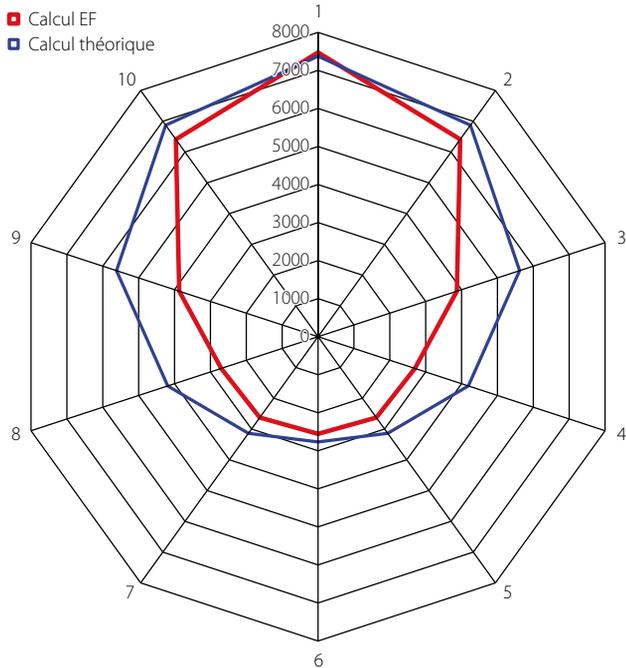
a $\epsilon = 0,59$; $\alpha = 13,8^\circ$

Da = 0,075 mm - Dr = 0,1 mm



b $\epsilon = 0,70$; $\alpha = 15,1^\circ$

Da = 0,2 mm - Dr = 0,025 mm



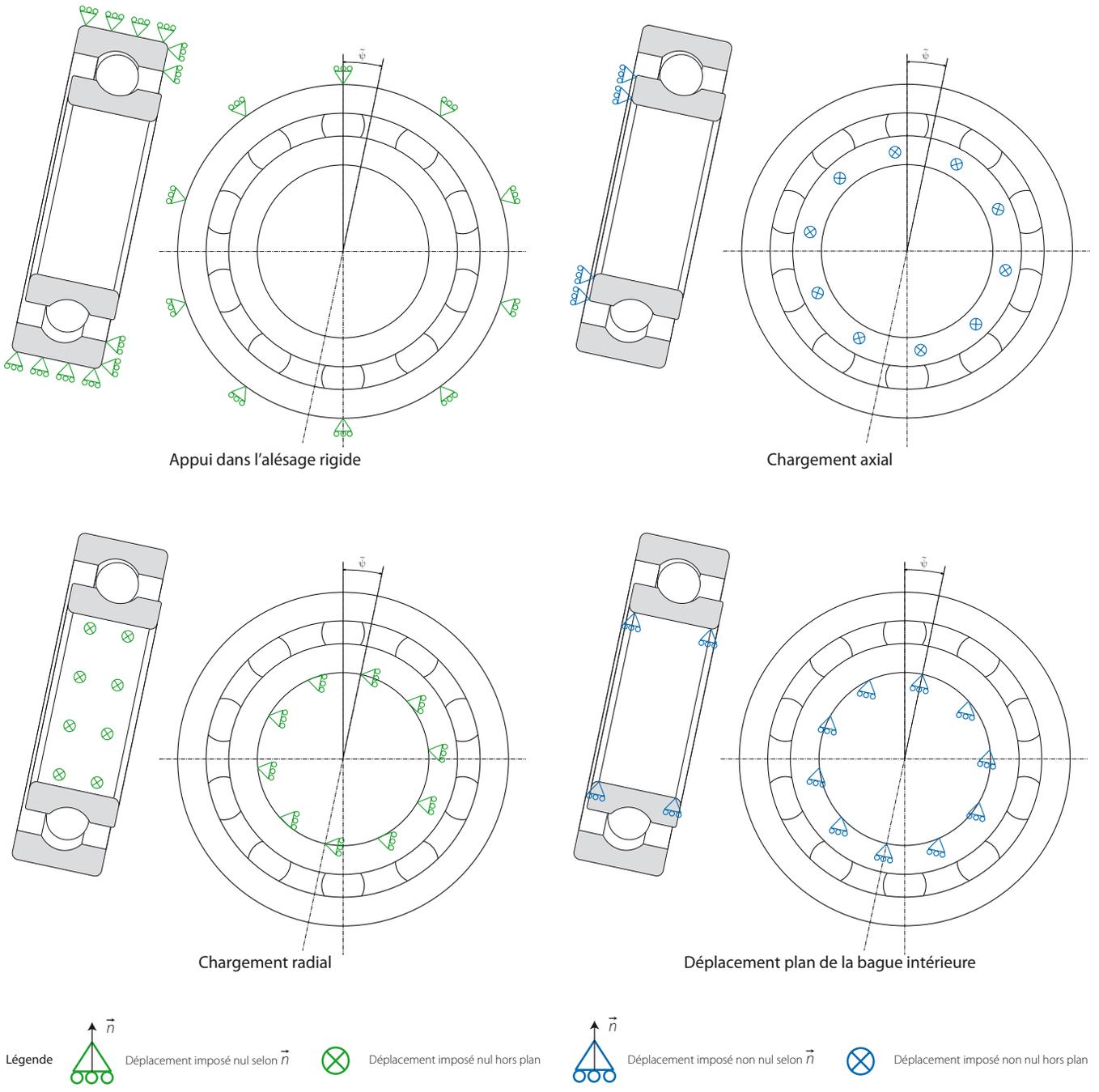
c $\epsilon = 1,31$; $\alpha = 22,1^\circ$

Da = 0,2 mm - Dr = 0,05 mm



d $\epsilon = 2,08$; $\alpha = 21,6^\circ$

Les graphes radar comparant les efforts locaux issus des résultats éléments finis et ceux estimés analytiquement pour différentes sollicitations axiales et radiales du roulement



Les conditions aux limites : chargement axial et radial, prise en compte des appuis dans le bâti

Si l'on combine les deux, le paramètre de charge peut être trouvé en résolvant numériquement :

$$\frac{F_a}{F_r} = \frac{J_a(\epsilon) \delta_r}{J_r(\epsilon) \delta_a} (2\epsilon - 1)$$

Dès que le paramètre de charge est connu, on trouve l'angle de contact α via :

$$\tan(\alpha) = \frac{\delta_r}{\delta_a} (2\epsilon - 1)$$

Il suffit alors de chercher l'effort local maximal donné par :

$$Q_{\max} = \frac{F_a}{\sin(\alpha) Z J_a(\epsilon)} \quad \text{ou} \quad Q_{\max} = \frac{F_r}{\cos(\alpha) Z J_r(\epsilon)}$$

En pratique, on pourra prendre la moyenne des deux valeurs. L'écart entre les deux valeurs donne déjà une estimation de la qualité :

- de la simulation éléments finis ;
- de la résolution numérique de l'équation non linéaire donnant le paramètre de charge.

La raideur K est ensuite donnée par :

$$K = \frac{Q_{\max}}{\delta_{\max}^t} = \frac{Q_{\max}}{(\delta_a \sin(\alpha) + \delta_r \cos(\alpha))^t}$$

Cette raideur peut être comparée à celle obtenue par la théorie de Hertz.

Enfin, les efforts locaux Q_p sont obtenus par :

$$Q_p = K\delta_p^t = Q_{\max} \left(\frac{\frac{\delta_a}{\delta_r} \tan(\alpha) + \cos(\psi_p)}{\frac{\delta_a}{\delta_r} \tan(\alpha) + 1} \right)^t$$

Analyse des résultats

Les graphes radar de la figure 14 permettent de visualiser les distributions théoriques et issues du calcul éléments finis obtenues. On observe que :

- Les efforts locaux calculés et estimés analytiquement sont proches ;
- Les distributions d'éléments roulants chargés et non chargés sont identiques.

Dépendance des efforts à la non-symétrie du roulement par rapport au plan de chargement

Objectifs et modélisation

Dans cette partie, on cherche à illustrer par la méthode des éléments finis la remarque faite précédemment sur le roulement « générateur de vibrations ». Le modèle utilisé est très proche du précédent aux détails suivants près :

- La géométrie sous-jacente est celle du roulement complet.
- Les conditions aux limites ne comportent plus aucune condition de symétrie.
- Le plan de chargement est mobile par rotation autour de l'axe du roulement d'un angle $\tilde{\psi}$ variant entre 0° et 108° , ce qui correspond à trois périodes T_F .

Résultats et comparaisons avec le modèle analytique

Afin de ne se soucier que de la périodicité et de l'allure des évolutions des efforts en fonction de l'angle $\tilde{\psi}$, les comparaisons seront effectuées sur les valeurs normées entre -1 et $+1$ et centrées sur 0.

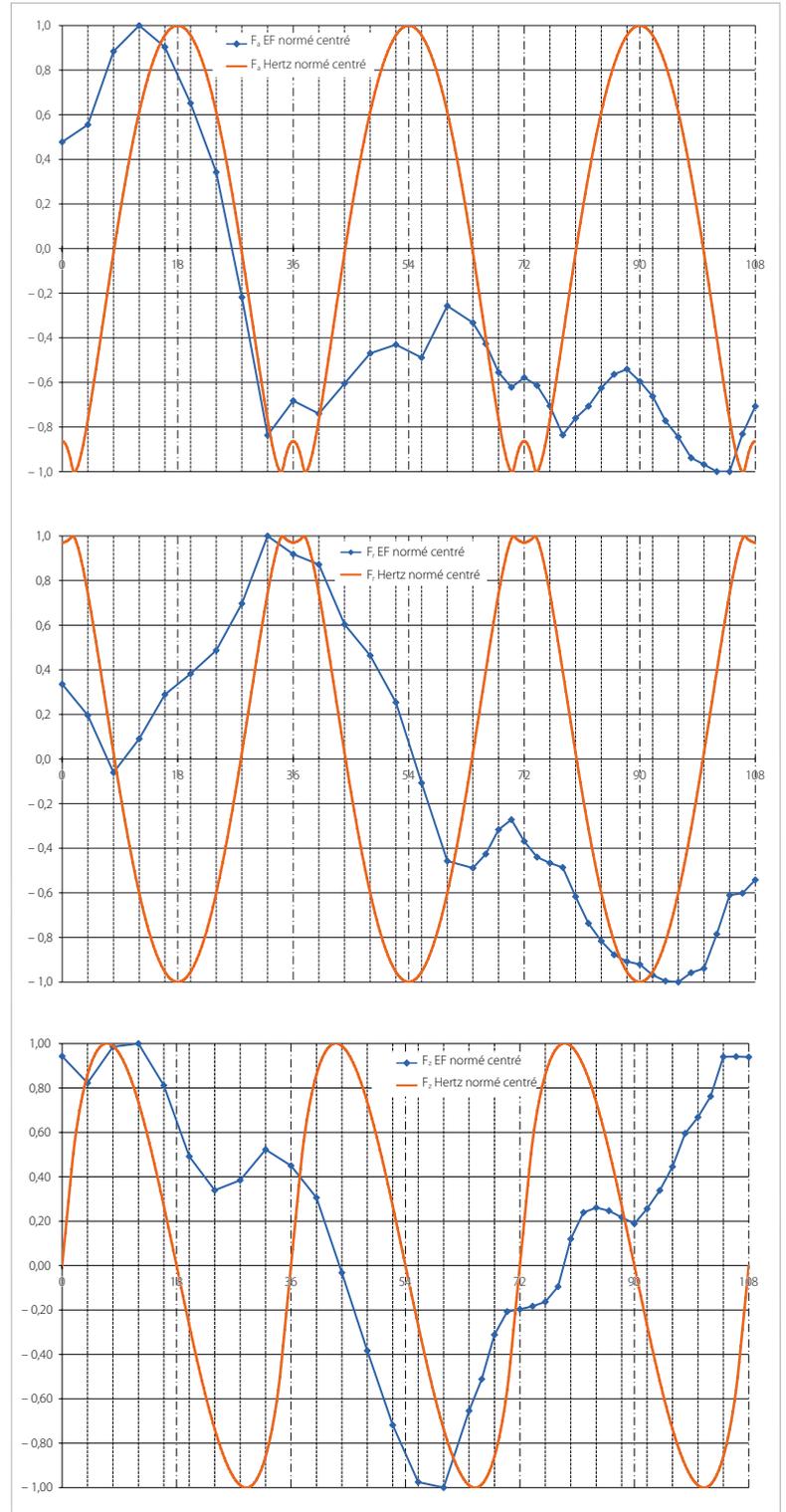
La quantité normée centrée $\bar{A}(\tilde{\psi})$ s'obtient à partir de la quantité brute $A(\tilde{\psi})$ via la transformation :

$$\bar{A}(\tilde{\psi}) = \frac{2A(\tilde{\psi}) - (\max(A(\tilde{\psi})) + \min(A(\tilde{\psi})))}{\max(A(\tilde{\psi})) - \min(A(\tilde{\psi}))}$$

Les courbes représentatives des trois fonctions normées centrées correspondant aux trois efforts sont données sur la figure 14.

Les résultats obtenus sont assez décevants. En effet :

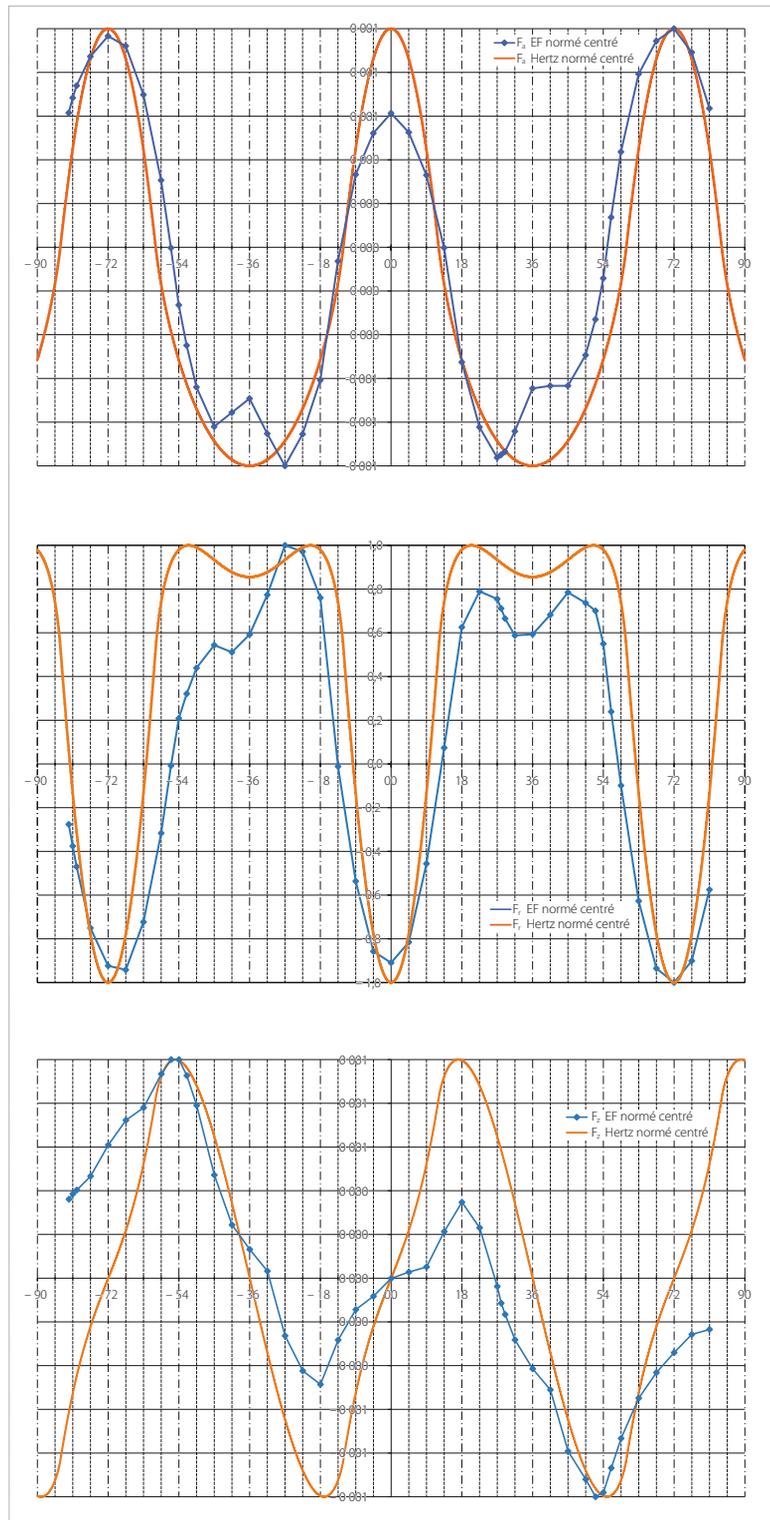
- On ne retrouve pas un profil périodique pour les trois efforts ;
- La correspondance avec les efforts normés centrés issus de la théorie de Hertz est inexistante ;
- Les valeurs de F_z ne sont pas nulles lorsque le plan de chargement passe par une bille.



14 La comparaison des variations des efforts normés centrés obtenus par la théorie de Hertz et de ceux calculés par éléments finis – roulement à 10 billes

Des tests supplémentaires ont permis de montrer une forte dépendance au maillage. Ce dernier présente les défauts suivants :

- Les maillages au niveau de chacune des zones de contact sont *a priori* différents, ce qui rompt la périodicité de la géométrie initiale.



12 La comparaison des variations des efforts normés centrés obtenus par la théorie de Hertz et de ceux calculés par éléments finis – roulement à 5 billes

- Les maillages au contact devraient être plus fins pour pallier ce défaut de périodicité, mais les temps de calcul sont alors rapidement rédhibitoires : en effet, avec une taille de 0,4 mm au contact, le temps de calcul (pour un seul plan de chargement) est déjà de l'ordre de trois heures sur une machine puissante et très récente.

Même avec l'utilisation du mailleur avancé de Catia, il n'a pas été possible de rendre identiques les maillages au niveau des zones de contact.

Ces résultats montrent les limites de l'utilisation de ce genre de code de calcul pour évaluer des quantités finement. En effet, les variations recherchées sont de l'ordre de quelques dixièmes de pour-cent par rapport aux efforts nominaux et sont alors bien trop sensibles aux tailles de maille et aux défauts du maillage.

Afin de vérifier cette hypothèse, des calculs similaires ont été menés sur un roulement comprenant uniquement 5 éléments roulant. Cela est bien entendu fortement irréaliste, mais permet néanmoins :

- de diminuer le nombre de solides à mailler, et donc de mailler plus finement les solides restants ;
- d'accroître les variations des efforts relativement à leur valeur moyenne.

Ainsi, on peut espérer obtenir une meilleure correspondance entre les résultats issus de la modélisation éléments finis et les résultats analytiques. La figure 12 répond à nos attentes : les oscillations des quantités normées centrées des efforts sont bien plus proches que celles observées avec le roulement à 10 billes. Malgré tout, les écarts sont encore assez importants, et cela montre qu'il ne faut pas chercher à estimer des quantités aussi fines sur un roulement complet.

Conclusion

Dans cet article, il a été montré qu'un code de calcul intégré à un logiciel de CAO permettait aisément de retrouver des résultats classiques de la théorie de Hertz appliquée aux roulements à billes à contact radial. Les efforts transmis par chaque bille, le nombre d'éléments roulants chargés ou la rigidité axiale du roulement peuvent être évalués tout à fait correctement. Mais des quantités plus fines, telles que les pressions de contact, les variations des efforts en fonction de la position angulaire du plan de chargement, ne peuvent être obtenues précisément qu'avec des maillages très fins au contact. Les temps de calcul associés étant bien trop long, il n'est pas possible pour le moment d'exploiter le modèle éléments finis à ces fins. ■

Bibliographie

- AUBLIN (M.), BONCOMPAIN (R.) et al., *Systèmes mécaniques – Théorie et dimensionnement*, Dunod, coll. Sciences sup, 1992
- DUFALLY (J.), rapport de stage, société SKF, 1972
- HARRIS (T. A.), *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley & Sons, 1991
- PALMGREEN, (A.), *Les roulements – Description, théorie, applications*, Compagnie d'applications mécaniques, 1967