

Le point sur les pressions de contact entre les solides (deuxième partie)

BRUNO LOUARN, CHRISTIAN TEIXIDO¹

Cette deuxième partie, faisant suite à celle parue dans le numéro 117, a pour objectif de présenter les différentes modélisations de répartition des pressions au sein du contact cylindrique ; modélisations qu'un professeur de mécanique se doit de connaître.

MOTS-CLÉS mécanique, liaison, modélisation, postbac

Dans la première partie de cet article, nous avons analysé le contact étroit et le contact en grande surface. Pour ce dernier, le modèle de pression uniforme a été envisagé, que le contact soit plan, cylindrique ou sphérique.

Le second modèle, correspondant à une pression fonction de la déformation, a fait l'objet de développements détaillés quant au contact plan.

Il s'agit à présent de se pencher sur le contact cylindrique (court ou long), fréquemment rencontré dans les systèmes industriels.

LE CONTACT CYLINDRIQUE

On ne prend en compte que la déformation de l'alésage. Cette hypothèse simplificatrice est pratiquement vérifiée dans le cas des paliers lisses ; la déformation de la surface de contact de l'arbre en acier est négligeable par rapport à celle du palier, en matériau plus tendre.

Il est alors nécessaire de définir le champ des déformations. Celui-ci est composé :

- de la déformation radiale ;
- de la déformation longitudinale.

La déformation radiale

La modélisation du problème est représentée sur la figure 1 (rappelez que seule la déformation de l'alésage est prise en compte).

Le calcul de $\delta(M) = \delta(\theta)$ s'effectue en écrivant la fermeture géométrique du triangle BNM :

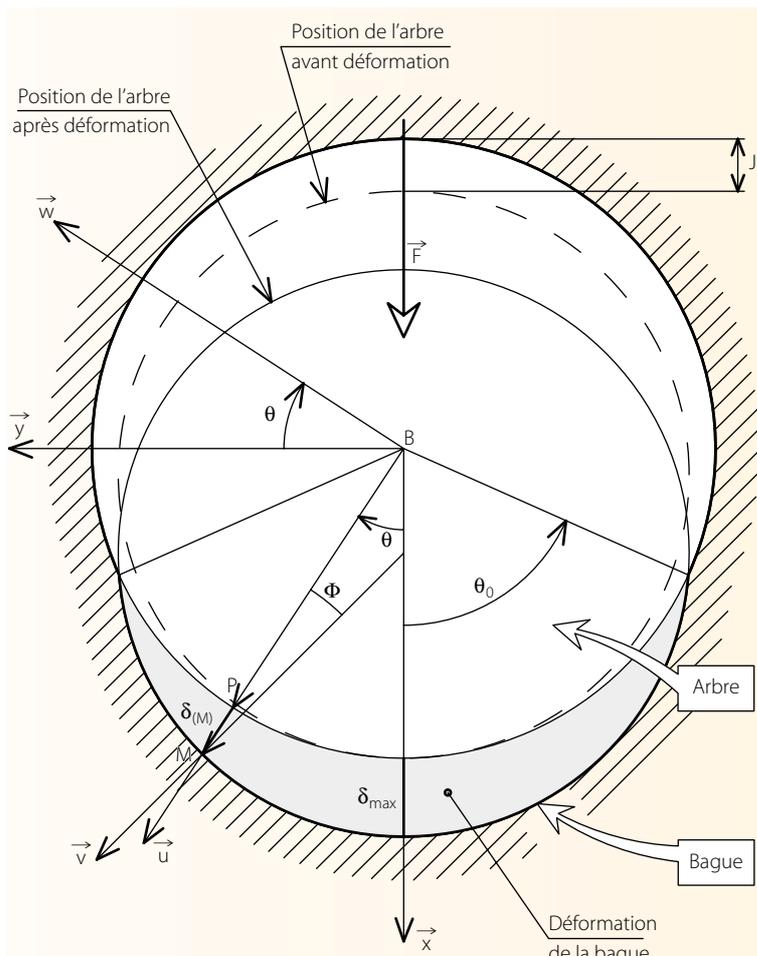
$$\vec{BN} + \vec{NM} + \vec{MP} + \vec{PB} = \vec{0},$$

avec $\vec{BN} = (J/2 + \delta_{\max})\vec{x}$
 $\vec{NM} = d/2\vec{v}$
 $\vec{MP} = -\delta(M)\vec{u}$
 $\vec{PB} = -D/2\vec{u}$

Projetons la relation dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$. Compte tenu de ce

$$\vec{x} = \cos\theta\vec{u} - \sin\theta\vec{w},$$

$$\vec{v} = \cos\Phi\vec{u} + \sin\Phi\vec{w}$$



D : diamètre de la bague } $J = D - d$ (jeu diamétral)
d : diamètre de l'arbre
 $2\theta_0$: angle au centre de la zone de contact
 $\delta_{(M)}$: écrasement de la bague au point M
 δ_{\max} : écrasement maximal

Figure 1. Déplacement radial de l'arbre dans le palier

et que Φ reste petit, c'est-à-dire que $\cos\Phi \approx 1$ et $\sin\Phi \approx \Phi$, il vient :

$$- \text{sur } \vec{u}, (J/2 + \delta_{\max}) \cos\theta + d/2 - \delta(M) - D/2 = 0;$$

$$- \text{sur } \vec{w}, -(J/2 + \delta_{\max}) \sin\theta + (d/2) \Phi = 0.$$

La relation projetée sur \vec{u} permet d'écrire :

$$\delta(M) = 0,5 [(J + 2\delta_{\max}) \cos\theta - J].$$

On peut déduire l'expression de δ_{\max} en fonction de J et de θ_0 .

Pour $\theta = \theta_0$, on a : $\delta(M_0) = 0$.

Portons cette valeur dans $\delta(M)$. On obtient :

$$\delta_{\max} = \frac{J(1 - \cos\theta_0)}{2 \cos\theta_0}$$

Cette relation définit l'enfoncement maximal de l'arbre dans la bague en fonction du jeu diamétral J et de l'étendue angulaire de la zone de contact.

1. Professeurs de construction mécanique au lycée Jean-Jaurès d'Argenteuil.

Le calcul de l'effort radial F

Celui-ci s'effectue en écrivant que l'action du palier sur l'arbre s'oppose à F.

La loi de comportement de la bague permet de relier la pression radiale à la déformation. Arbre et coussinet étant supposés rester alignés, la pression ne varie que circonférenciellement.

L'équation d'équilibre s'écrit suivant \vec{x} :

$$\vec{F} \cdot \vec{x} + \int_S -p(M) \vec{n}(M) \cdot \vec{x} dS = 0$$

avec $p(M) = 0,5 K [(J + 2 \delta_{\max}) \cos \theta - J]$

et $\vec{n} = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}$.

Posons $p(M) = A \cos \theta + B$

avec $A = 0,5 K (J + 2 \delta_{\max})$

et $B = -0,5 K J$.

L'équation d'équilibre devient alors :

$$\vec{F} \cdot \vec{x} + \int_S - (A \cos \theta + B) \cos \theta (D/2) d\theta dz = 0$$

$$\vec{F} \cdot \vec{x} + (D/2) \int_0^L dz \int_{-\theta_0}^{\theta_0} - (A \cos \theta + B) \cos \theta d\theta = 0$$

Après intégration, il vient

$$F = DLKJ/4 \left(\frac{\theta_0}{\cos \theta_0} - \sin \theta_0 \right)$$

On peut enfin déduire la pression maximale p_{\max} .

Puisque

$$\delta_{\max} = \frac{J (1 - \cos \theta_0)}{2 \cos \theta_0}$$

$$p_{\max} = K \delta_{\max}$$

$$F = DLKJ/4 \left(\frac{\theta_0}{\cos \theta_0} - \sin \theta_0 \right)$$

on déduit

$$K = \frac{8 F \cos(\theta_0)}{JDL[2\theta_0 - \sin(2\theta_0)]}$$

et enfin

$$p_{\max} = \frac{4 F [1 - \cos(\theta_0)]}{DL[2\theta_0 - \sin(2\theta_0)]}$$

Les conséquences

L'annexe met en évidence trois cas de modélisation.

- Le premier modèle, correspondant à des diamètres D et d différents, est le plus proche de la réalité. La répartition des pressions est sinusoïdale et se réalise sur une zone radiale inférieure à π caractérisée par l'angle $2\theta_0$.

Dans ce cas,

$$p_{\max} = \frac{4 F (1 - \cos \theta_0)}{DL[2\theta_0 - \sin(2\theta_0)]}$$

Malheureusement, il n'est pas possible aujourd'hui de connaître la valeur du paramètre θ_0 pour un chargement donné et en fonction des caractéristiques du palier. Ainsi, sauf cas particuliers, ce modèle est peu utilisable.

- Le deuxième modèle suppose que les diamètres D et d sont pratiquement égaux, ce qui entraîne une liaison à jeu négligeable. Le contact s'effectue sur un demi-cylindre ($2\theta_0 = \pi$) et le maximum de la pression se trouve au droit de la charge. La valeur se déduit de la formule générale précédente en faisant $\theta_0 = \pi/2$, soit :

$$p_{\max} = \frac{4 F}{\pi DL}$$

- Enfin, l'annexe rappelle le troisième modèle (toujours adopté par les manufacturiers de bagues), pour lequel le jeu est considéré nul et la répartition des pressions uniforme.

Ainsi :

$$p_{(M)} = p_0 = \frac{F}{DL}$$

Il est intéressant de savoir que, d'après les résultats de certaines recherches, cette dernière valeur de la pression (pression

conventionnelle) est trois à quatre fois inférieure à celle déterminée en prenant en compte le jeu (premier modèle).

La déformation longitudinale

Rappelons que l'on ne prend en compte que la déformation de l'alésage (figure 2), donc $\delta(M) = az + b$, avec $a = 0$ pour les paliers courts.

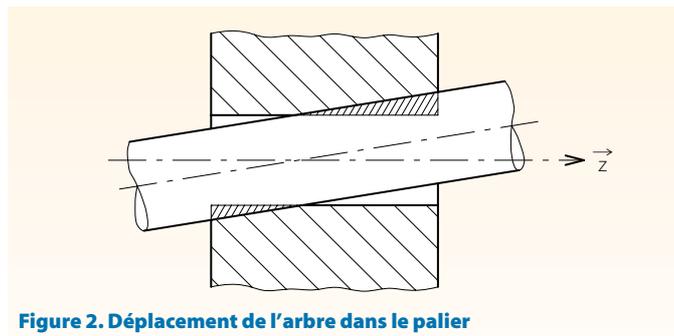


Figure 2. Déplacement de l'arbre dans le palier

La répartition des pressions dans le cas de la liaison pivot-gissant

Rappelons que, si le chargement est centré, le calcul se ramène à celui d'un palier court (voir première partie).

Si le chargement est excentré, il est nécessaire d'adopter un champ de pressions réparti :

- sinusoïdalement en radial ;
- linéairement en longitudinal.

La figure 3 met en évidence la modélisation adoptée avec les hypothèses suivantes :

- jeu nul ;
- liaison parfaite ;
- torseur d'efforts transmissibles :

$$\{T_{\text{efforts trans.}}\}_H = \begin{Bmatrix} Z \cdot \vec{z} \\ M \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_H$$

Les relations entre les éléments de réduction du torseur d'efforts transmissibles et les pressions extrêmes p_e et p_f s'obtiennent en écrivant les égalités suivantes :

$$\vec{\mathcal{F}} = Z \cdot \vec{z} = \int_S \vec{p} \cdot d\vec{s} = - \int_S p(x, \theta) \vec{n} ds$$

$$\vec{\mathcal{M}}_H = M \cdot \vec{z} = \int_S \vec{r} \wedge \vec{p} ds = \int_S (x \cdot \vec{x} + r \cdot \vec{n}) \wedge [(-p(x, \theta) \vec{n}) ds]$$

avec $p(x, \theta) = \sin \theta (Ax + B)$,

sachant que $A = \frac{p_e + p_f}{2c}$ et $B = \frac{p_e - p_f}{2c}$

le développement des calculs donne :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}} &= -r \int_S \sin \theta (Ax + B) (\cos \theta \cdot \vec{y} + \sin \theta \cdot \vec{z}) dx d\theta \\ &= -r \int_{S_1} (Ax + B) dx \int_{S_2} \sin \theta (\cos \theta \cdot \vec{y} + \sin \theta \cdot \vec{z}) d\theta \\ &= -r \left\{ \left[A \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\mu} + B [x]_{\mu}^c \right) \left(\left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} \vec{y} + \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} \vec{z} \right) \right\} \\ &\quad - r \left\{ \left[A \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-c}^{\mu} + B [x]_{-c}^{\mu} \right) \left(\left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_{-\pi}^0 \vec{y} + \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi}^0 \vec{z} \right) \right\} \end{aligned}$$

soit $\vec{\mathcal{F}} = -r \pi c B \cdot \vec{z} = -r \pi c \left(\frac{p_e - p_f}{2} \right) \cdot \vec{z} = Z \cdot \vec{z}$;

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_H &= -r \int_S [x \cdot \vec{x} + r (\cos \theta \cdot \vec{y} + \sin \theta \cdot \vec{z})] \wedge \sin \theta (Ax + B) (\cos \theta \cdot \vec{y} + \sin \theta \cdot \vec{z}) dx d\theta \\ &= -r \int_S x \cdot \sin \theta (Ax + B) (\cos \theta \cdot \vec{z} - \sin \theta \cdot \vec{y}) dx d\theta \\ &= -r \left\{ \left[A \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\mu} + B \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\mu}^c \right) \left(-\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} \vec{y} + \left[\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} \vec{z} \right) \right\} \\ &\quad - r \left\{ \left[A \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-c}^{\mu} + B \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-c}^{\mu} \right) \left(-\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi}^0 \vec{y} + \left[\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_{-\pi}^0 \vec{z} \right) \right\} \end{aligned}$$

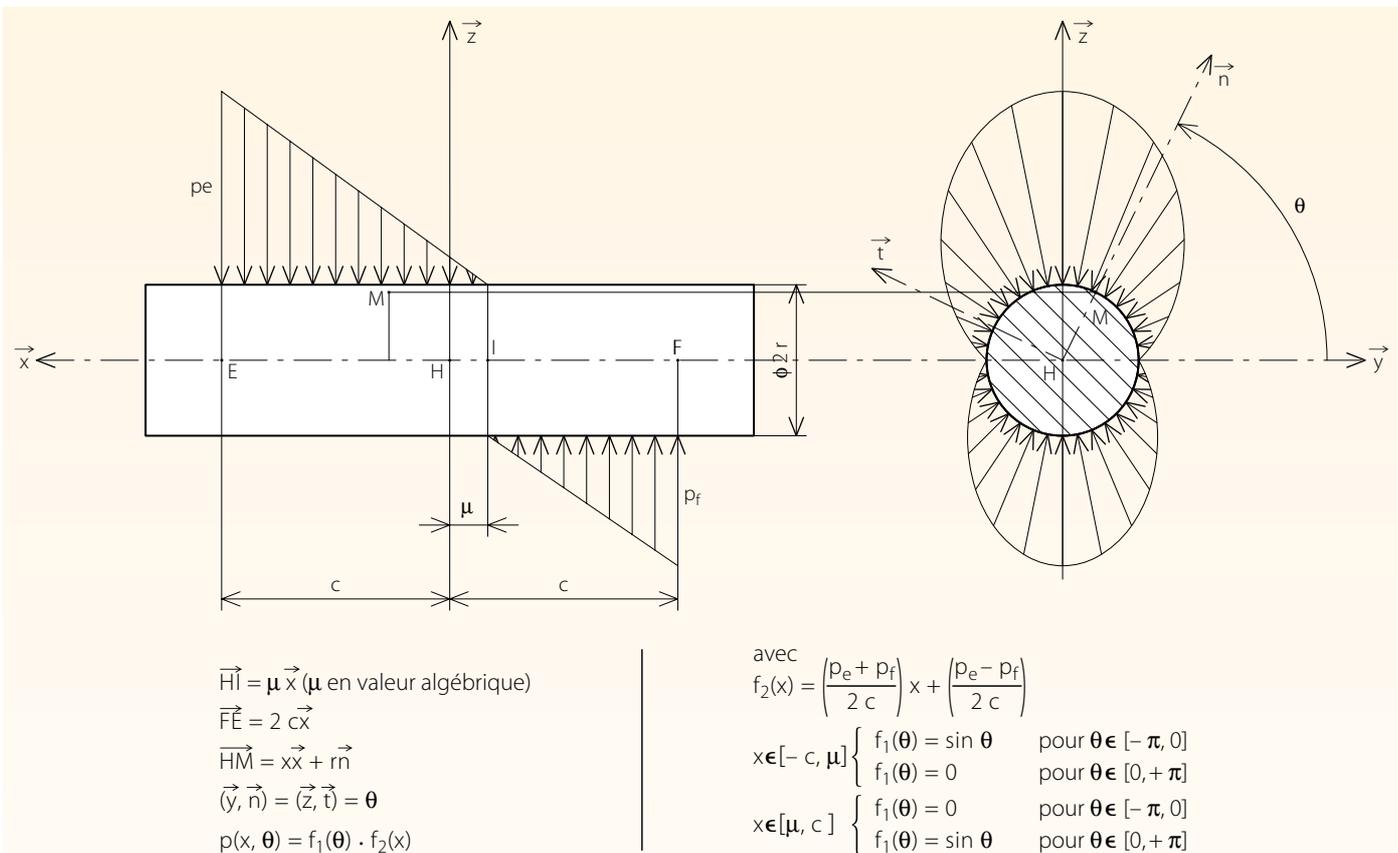


Figure 3. Modèle de répartition de pressions pour une liaison pivot-glissant

soit $\vec{M}_H = + r \pi \frac{A}{3} c^3 \vec{y} = + r \pi c^2 \left(\frac{p_e + p_f}{6} \right) \cdot \vec{y} = M \cdot \vec{y}$

Ainsi, connaissant les éléments de réduction du torseur d'efforts transmissibles (Z et M) et les caractéristiques dimensionnelles du palier (r et c), il est possible de calculer p_e et p_f , afin d'appliquer le critère de pression maximale admissible à la pression, p_e ou p_f , la plus élevée.

Une application

Celle-ci porte sur une pompe à huile commandée manuellement, dont un extrait du plan d'ensemble est donné sur la figure 4.

Les résultats de l'analyse fonctionnelle du besoin sont précisés sur les figures 5 et 6, à savoir :

- l'énoncé des fonctions de service (fonctions principales et contraintes) assurées par ce produit à partir du graphe d'interactions (pieuvre) mettant en évidence les éléments de l'environnement en relation avec la pompe lors de son utilisation ;
- la caractérisation de la fonction la plus significative (FP1) contenant les caractéristiques des éléments de l'environnement concernés et, surtout, les critères, niveaux, flexibilités traduisant les performances attendues lors de la transformation de l'énergie musculaire en énergie hydraulique.

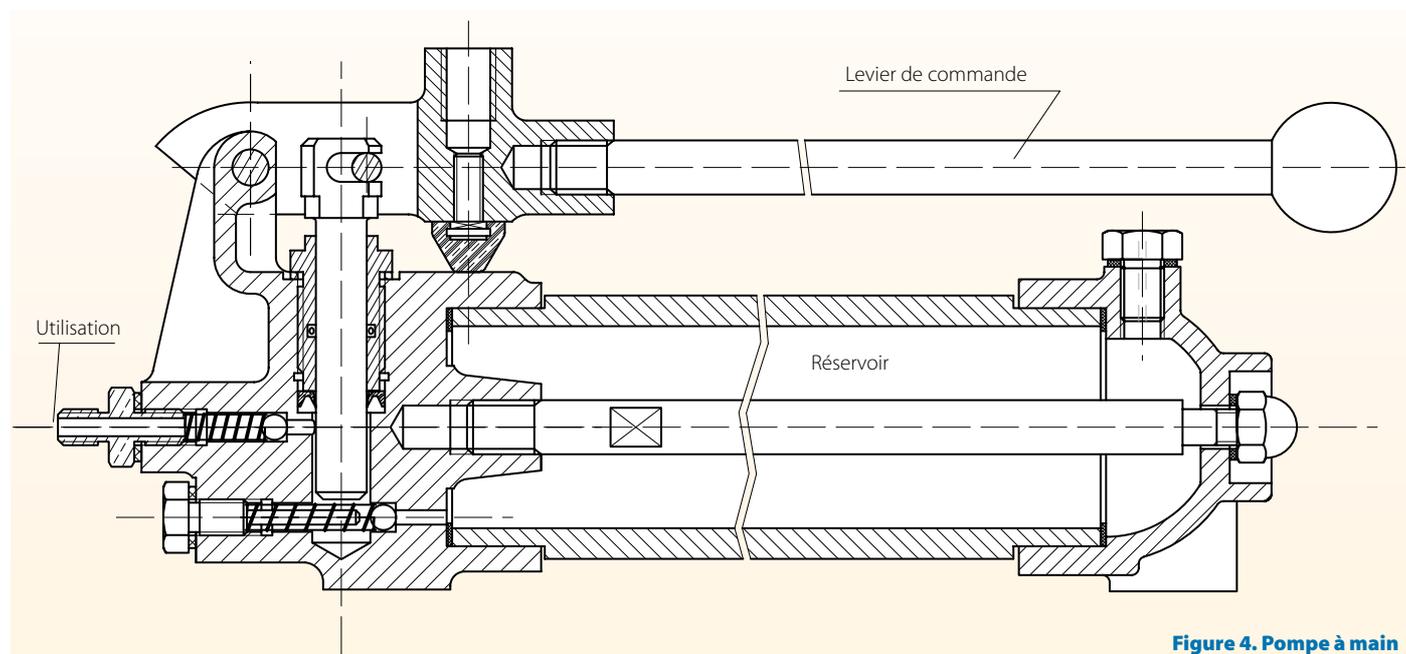


Figure 4. Pompe à main

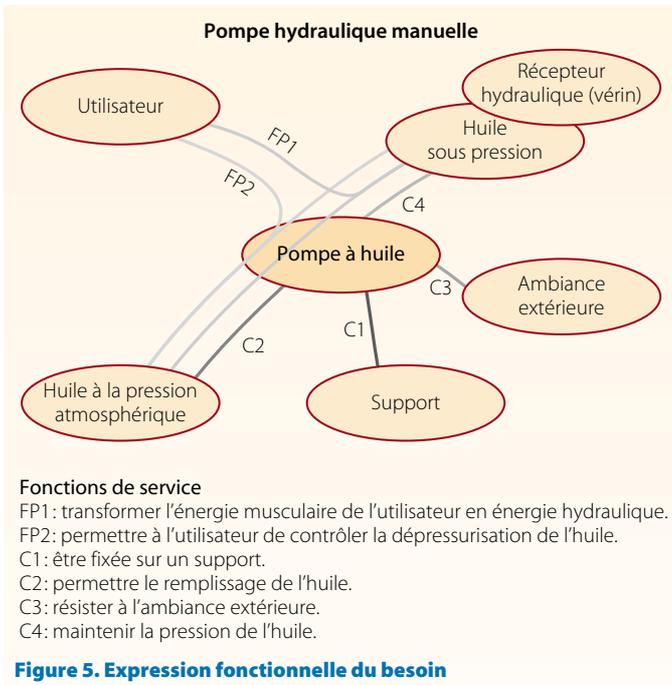


Figure 6. Caractérisation de FP1

FP1: transformer l'énergie musculaire de l'utilisateur en énergie hydraulique

Caractéristiques des éléments de l'environnement	Critères - Niveaux - Flexibilités
Utilisateur Individu sans qualification particulière. Effort que peut fournir l'utilisateur : - fonctionnement normal $F < 90 \text{ N}$; - effort maximum (cas exceptionnel) 500 N . Diamètre de saisie : $20 < \varnothing < 40$. Course du poignet : 400 max. Rotation du poignet : 45° max. Vitesse du poignet : $0,7 \text{ m/s}$.	- Pression relative du réservoir : 0. - Pression d'utilisation : $4,5 \text{ MPa} \pm 0,1$. - Pression maximum (d'épreuve) : 45 Mpa sans détérioration des matériaux. - Débit à pression nulle $> 2 \text{ cm}^3/\text{s}$. - Fonctionnement intermittent : moins de dix utilisations par jour. - Durée de vie : dix ans.
Huile Quantité : $900 \text{ cm}^3 \pm 50$. Caractéristique de l'huile : type, viscosité...	

L'objectif des calculs qui suivent est de s'assurer du respect d'un critère lors de l'utilisation exceptionnelle de la pompe : la pression maximale de l'huile, en phase de refoulement, doit pouvoir atteindre 45 MPa sans détérioration des pièces constitutives, notamment au niveau du contact entre le piston et la bague de guidage en bronze (liaison pivot-glissant). Les catalogues donnent $p_{adm} \leq 180 \text{ daN/cm}^2$.

La modélisation cinématique de la pompe est donnée figure 7. Trois sous-ensembles sont présents :

- le bâti (1) ;
- le piston (2) ;
- le levier (3).

BIBLIOGRAPHIE

Systemes mécaniques. Théorie et dimensionnement ;
 M. Aublin, R. Boncompain, M. Boulaton, D. Caron, E. Jeay, B. Lacage, J. Réa ; éditions Dunod.

Guide de construction mécanique. Analyser - Choisir - Concevoir ;
 C. Teixido, J.-C. Jouanne, B. Bauwe, P. Chambraud, G. Ignatio, C. Guérin ; éditions Delagrave.

Guide du calcul en mécanique ;
 D. Spenlé, R. Gourhan ; éditions Hachette.

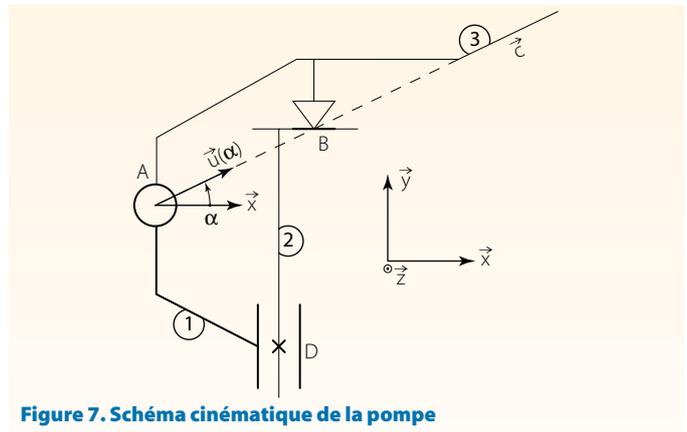


Figure 7. Schéma cinématique de la pompe

- Ils sont reliés par :
- une liaison pivot d'axe \vec{Az} entre (1) et (3) ;
 - une liaison pivot-glissant d'axe \vec{Dy} entre (1) et (2) ;
 - une liaison linéaire-rectiligne, de direction \vec{Bz} et de normale \vec{By} , entre (2) et (3).

Sachant que (l'unité étant le millimètre) :

$$0 \leq \alpha \leq 40^\circ,$$

$$\vec{AB} = 32 \cdot \vec{u}(\alpha),$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{x} = 26,$$

il est aisé de montrer que le déplacement horizontal du point B appartenant à (3), par rapport à l'axe du piston, s'exprime par :

$$x = \vec{DB} \cdot \vec{x} = 32 \cdot \cos \alpha - 26.$$

Le problème est considéré plan (plan \vec{Ax}, \vec{y}). On admet, en première approximation, que toutes les liaisons sont parfaites, avec un jeu négligé. Enfin, une étude statique suffit en raison des mouvements lents.

L'isolement du piston (2) fait ressortir trois torseurs d'actions extérieures :

- {pression \rightarrow 2}_D = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6924 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pour une pression de 45 MPa et un diamètre du piston de 14 mm ;
- {3 \rightarrow 2}_B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{3/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (linéaire-rectiligne) ;
- {1 \rightarrow 2}_D = $\begin{bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{1/2} \end{bmatrix}$ (pivot-glissant).

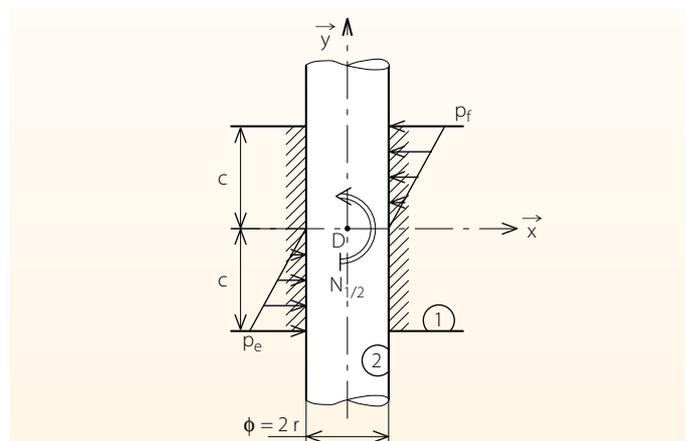
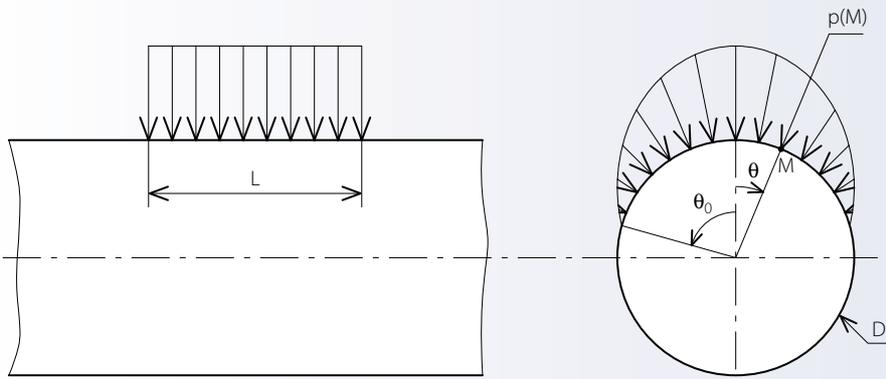


Figure 8. Répartition des pressions

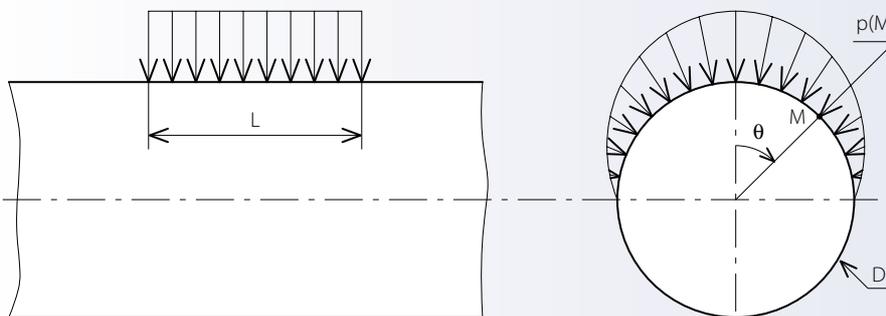
Modèles de répartition radiale des pressions de contact dans le cas d'un palier lisse



Premier modèle (le plus proche de la réalité)

La liaison entre l'arbre et le palier se fait avec un jeu.

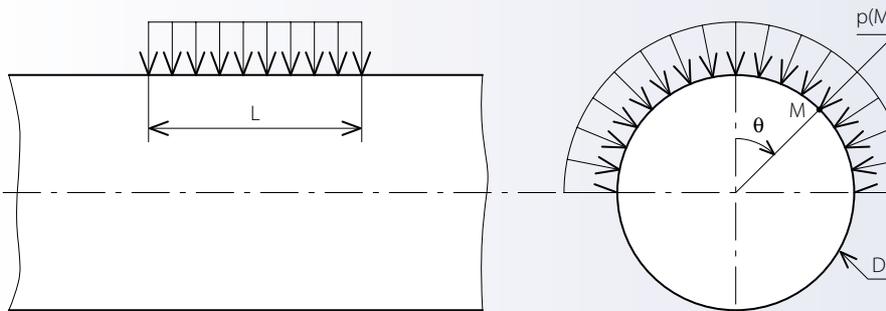
La répartition des pressions de contact radiales est proportionnelle à la déformation sur la surface latérale d'une portion de cylindre d'angle au centre $2\theta_0$.



Deuxième modèle

La liaison entre l'arbre et le palier se fait sans jeu.

La répartition des pressions de contact radiales est proportionnelle à la déformation sur la surface latérale d'un demi-cylindre d'angle. Dans ce cas, la pression en un point M est égale à : $p(M) = p_{\max} \cdot \cos \theta$.



Troisième modèle

La liaison entre l'arbre et le palier se fait sans jeu.

La répartition des pressions de contact radiales est uniforme sur la surface d'un demi-cylindre d'angle. Dans ce cas, la pression en un point M est égale à : $p(M) = p_0 = \text{constante}$.

La mise en équations de ce problème plan s'écrit au point D :

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{0} \quad \begin{cases} \vec{x} : X_{1/2} = 0 \\ \vec{y} : 6924 + Y_{1/2} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_D = \vec{0} \rightarrow \vec{z} : N_{1/2} + x \cdot Y_{1/2} = 0$$

On peut ainsi déduire l'expression du torseur relatif à la liaison pivot-glissant entre (1) et (2) en fonction de α :

$$\{1 \rightarrow 2\}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 6924(32 \cdot \cos \alpha - 26) \end{bmatrix}$$

Ce torseur couple est le plus élevé pour $\alpha = 0$, soit (en N·mm) :

$$\{1 \rightarrow 2\}_{\max} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 41544 \end{bmatrix}$$

D'après la figure 3 et les calculs associés reliant les éléments de réduction du torseur relatif à un pivot-glissant et les pressions extrêmes, on remarque que :

$$\vec{\mathcal{F}}\{1 \rightarrow 2\} = -r\pi c \left(\frac{p_e - p_f}{2} \right) \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

ce qui permet de déduire que $p_e = p_f$, soit une répartition opposée des pressions de chaque côté de D, comme l'indique la figure 8.

De plus, sachant que : $N_{1/2} = r\pi c^2 \left(\frac{p_e + p_f}{6} \right) = 41544$, on trouve $p_e = p_f = 14,2 \text{ MPa}$, soit 142 daN/cm^2 .

En conclusion, puisque la pression de contact maximale est inférieure à la pression admissible (180 daN/cm^2), le dimensionnement de la liaison est acceptable. ■