

Maquettes sensorielles en dynamique

DEUXIÈME PARTIE

YVES BRACCINI, ROBERT GOURHANT*

Quel est l'enjeu de la dynamique ? Quels sont les effets physiques ? Après une première partie sur la dynamique du solide en translation, cette deuxième partie aborde la dynamique du solide en rotation, toujours au moyen de maquettes sensorielles didactiques.

Le zéro émission de CO₂ du scooter électrique se fait-il au détriment de ses performances si on le compare à un scooter thermique ? L'approche consistant à utiliser des maquettes sensorielles nous permet, concrètement, d'identifier les paramètres influant sur l'accélération d'un scooter. Il ne s'agit pas ici d'en faire une étude exhaustive, mais, dans un premier temps, d'identifier les paramètres influents et leurs effets.

Cet article fait suite à l'approche de l'énergétique par la démarche sensorielle (*Technologie* n^{os} 200 et 201) et de la dynamique d'un solide en translation (n^o 205). La séquence présentée s'appuie sur ces prérequis. Selon un découpage des objectifs plus ou moins ambitieux et un niveau d'autonomie de l'élève plus ou moins grand – définis par l'enseignant –, cette approche peut intéresser les STI2D, les BTS ou les CPGE.

La dynamique est appliquée, ici, aux systèmes sans frottements. L'objectif est d'établir la relation couple moteur, inertie, accélération. Un troisième article abordera l'influence des frottements sur l'accélération du scooter et de la récupération de l'énergie électrique sur son autonomie.

La nouvelle norme européenne Euro 4 (applicable au 1^{er} janvier 2017) impose une réduction plus stricte des émissions polluantes. Elle aura pour conséquence d'éliminer du marché des scooters à moteurs thermiques deux temps de 50 cm³. Un scooter électrique – sensiblement de même puissance – répond-il à la demande des utilisateurs ?

Les caractéristiques techniques d'un scooter électrique **1** et d'un scooter thermique équivalent sont données dans le tableau **2**. La chaîne cinématique du sous-ensemble « motorisation » est définie en **3**.

MOTS-CLÉS

dynamique, énergétique, modélisation, équipement didactique, prébac, postbac

Remarquons que, pour des raisons de clarté, la poulie réceptrice réelle et la boîte relais, situées dans le moyeu, ont été remplacées par une poulie équivalente, de plus grand diamètre, directement liée à la roue, donnant le même rapport de réduction et la même inertie.

Objectifs de la séquence

Pour comparer et justifier les accélérations de ces deux types de scooters, il sera nécessaire d'énoncer et d'appliquer le théorème du moment dynamique.

Nous commençons par demander aux élèves : « Quels sont les facteurs qui vont augmenter l'accélération au démarrage ? » Ils répondent en général, dans un ordre dispersé : la puissance du moteur, le Cx, la résistance de l'air, le poids du scooter, celui du passager, le type de pneus, les frottements, etc.

Certains élèves, pratiquant le moto-cross, citent plus particulièrement le couple moteur. Puissance ou couple ? Quelle est la grandeur la plus importante pour le problème posé ? La réponse n'est pas évidente ; c'est cet obstacle qui va permettre d'enclencher un processus d'apprentissage.

Quand on fait remarquer aux élèves que le scooter thermique, qui a une puissance légèrement supérieure à celle du scooter électrique (4,36 kW contre 3 kW), un poids plus faible (90 kg contre 115 kg), accélère malgré tout un peu moins vite (12,45 s contre 12,30 s aux 100 m départ arrêté), des interrogations se font jour. La motivation pour l'expérimentation, qui dépasse la simple constatation sensible, va se construire sur ce paradoxe apparent.

Cette phase de recueil des représentations préalables prépare donc l'entrée dans les protocoles expérimentaux qui vont suivre, la prise en compte de tel ou tel paramètre – et son influence sur le comportement du système – donne du sens aux apprentissages.

Dans cette première étude, l'influence des pertes dans l'embrayage et l'échelonnement de la boîte de vitesses du scooter thermique, au regard de la transmission directe du scooter électrique, ne seront pas pris en compte.

* Co-inventeurs des « Maquettes didactiques sensorielles de liaisons mécaniques » (breveté), les auteurs poursuivent et prolongent ici la mise en œuvre de leur démarche kinesthésique exposée dans la revue *Technologie* pour l'étude des « liaisons » en statique (n^{os} 134 et 137), pour celle des « poutres » en résistance des matériaux (n^{os} 161 et 162) et pour l'énergétique (n^{os} 200 et 201).



1 Scooter électrique Peugeot e-Vivacity

Pour un système isolé, la dynamique nous permet de calculer directement l'accélération à partir des forces extérieures (voir *Technologie* n° 205). Que devient l'effet d'inertie dans un mouvement de rotation ? Nous allons utiliser à nouveau l'accéléromètre sensoriel, soumis à une rotation, pour répondre à cette question.

Par ailleurs, le scooter est composé de solides dont certains sont en translation et d'autres en translation et rotation. Il faudra d'abord appliquer les théorèmes de l'énergétique à ce système pour fonder l'expérimentation avec les maquettes sensorielles soumises à une rotation seule.

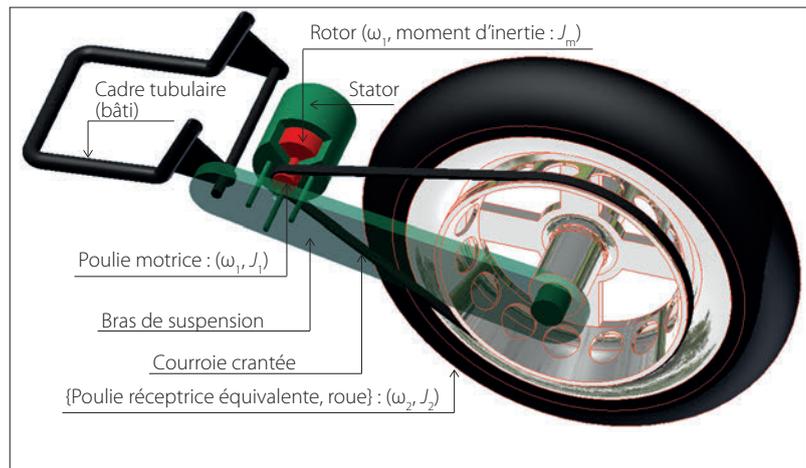
Prérequis de l'énergétique, de la dynamique du solide en translation, de la cinématique

Énergétique et inertie équivalente

L'énergie globale d'un système est la somme des énergies des solides qui le composent. Pour un scooter, l'ensemble $(S_T) = \{\text{cadre, stator moteur, passager, poulies, roues}\}$ possède une énergie cinétique de translation ; les solides rotor, poulies de transmission, engrenages, roues – qui tournent à des vitesses différentes – ont, en plus, une énergie cinétique de rotation. Ils constituent l'ensemble (S_R) .

	Scooter électrique Peugeot e-Vivacity	Scooter thermique Peugeot New Vivacity
Moteur	Synchrone <i>brushless</i> à aimants permanents	Thermique à 4 temps Cylindrée 50 cm ³
Puissance	$P = 3,1 \text{ kW}$	$P = 4,36 \text{ kW}$
Couple	$C_m = 14 \text{ N}\cdot\text{m}$ disponible à 0 tr/min	$C_m = 4,4 \text{ N}\cdot\text{m}$ disponible à 6 800 tr/min
Vitesse maxi	$v = 50 \text{ km/h}$	$v = 50 \text{ km/h}$
Masse	$P = 115 \text{ kg}$	$P = 95 \text{ kg}$
Transmission	Prise directe, courroie crantée, boîte relais moyeu	Embrayage, boîte de vitesses, chaîne
Stockage énergie	Batterie type lithium ion (16 kg)	Réservoir essence
Autonomie	60 km	
100 m départ arrêté	12,30 s	12,45 s
Prix (2016)	4 299 € (avec un chargeur)	2 700 €

2 Caractéristiques des deux scooters



3 Modélisation de la chaîne de motorisation

Système équivalent en rotation (S_R) d'un système en translation (S_T)

Pour réaliser une expérimentation, un calcul de dimensionnement de moteur, il est souvent plus simple de ramener les énergies cinétiques de translation et de rotation à l'arbre moteur 4.

Nous allons établir l'équivalence entre l'énergie cinétique de translation de (S_T) (masse m du scooter, vitesse v) et l'énergie cinétique de rotation d'un système équivalent (moment d'inertie équivalent à la translation J_{eT} , vitesse angulaire ω_1 , celle de l'arbre moteur 1).

On écrit que :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J_{eT}\omega_1^2$$

d'où :

$$J_{eT} = \frac{mv^2}{\omega_1^2} \tag{1}$$

Remarquons l'énergie emmagasinée en translation, m est la somme de la masse totale du scooter (95 kg ou 115 kg) et du passager (75 kg).

Inerties équivalentes de solides en rotation avec des vitesses différentes

Les solides en rotation de la chaîne cinématique d'inerties J_m, J_1, J_2 tournent à des vitesses différentes ω_1 et ω_2 3 4. Nous allons ramener l'inertie J_2 à l'arbre moteur 1 tournant à la vitesse ω_1 en définissant le moment d'inertie équivalent J_{e2} 4.

L'énergie accumulée dans l'arbre 2 est :

$$Ek_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

Ramenée à l'arbre 1, elle devient :

$$Ek_2 = \frac{1}{2} J_{e2} \omega_1^2 \text{ d'où } J_{e2} = J_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \quad (2)$$

Le moment d'inertie total du système équivalent J_{eTR} est la somme des deux inerties équivalentes J_{eT} (1) et J_{eR} (3) :

$$J_{eTR} = J_{eT} + J_{eR} \quad (3)$$

avec : $J_{eR} = J_1 + J_m + J_{e2}$

J_1 , le moment d'inertie poulie motrice

J_m , le moment d'inertie rotor.

Maquette sensorielle équivalente

Le moment d'inertie équivalent sensoriel J_{es} du volant de la maquette sensorielle modélise¹ le moment d'inertie J_{eT} (translation du scooter) augmenté du moment d'inertie J_{eR} (solides en rotation de la chaîne cinématique) 5.

De même, le palier de guidage de la maquette sensorielle modélise l'ensemble des paliers du scooter. L'action de l'élève moteur sur le fil enroulé modélise le couple moteur.

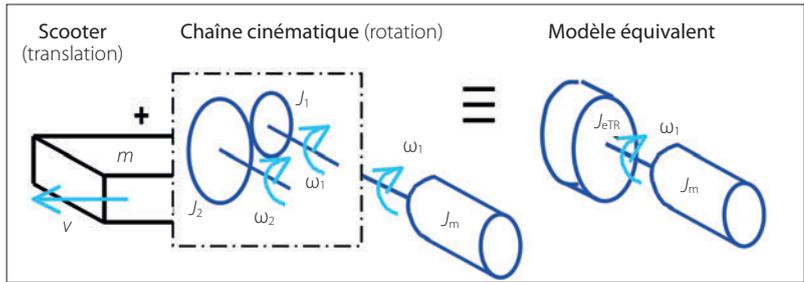
Le chiffrage des grandeurs relève d'expérimentations sur le système réel et/ou de logiciels de calcul.

Inertie d'une masse ponctuelle en rotation

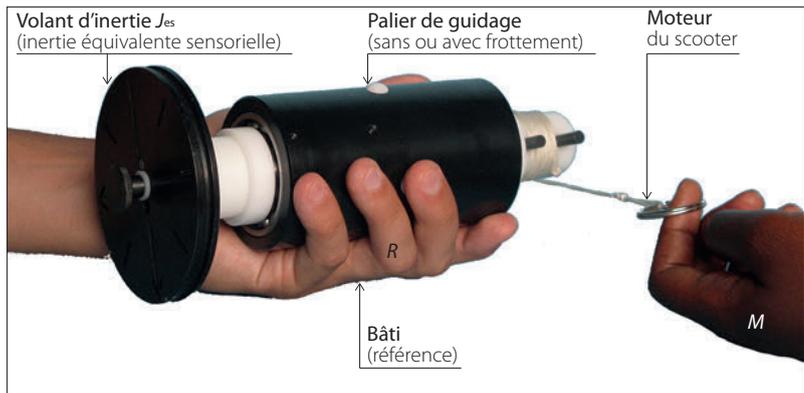
Le disque d'inertie peut être considéré comme un ensemble de points matériels M_i de masses élémentaires m_i . Chaque point a un mouvement circulaire de rayon r_i 6.

Pour étudier les effets d'inertie sur ces masses élémentaires m_i , nous pouvons utiliser l'accéléromètre sensoriel unidirectionnel, en rotation. Sa description est détaillée dans la revue *Technologie* n° 205. Sa masselotte sera assimilée à une masse m ponctuelle en rotation (rayon de giration R).

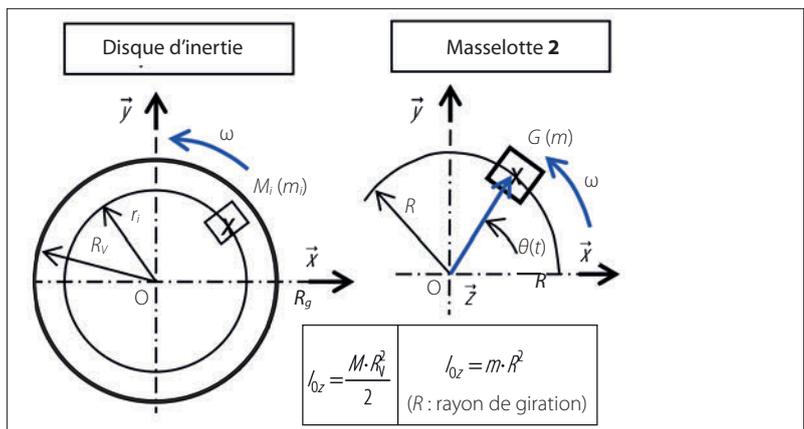
L'utilisateur saisit le corps 1 de l'accéléromètre de telle sorte que la direction de déplacement de la



4 Modèle équivalent du scooter



5 Maquette sensorielle équivalente du scooter

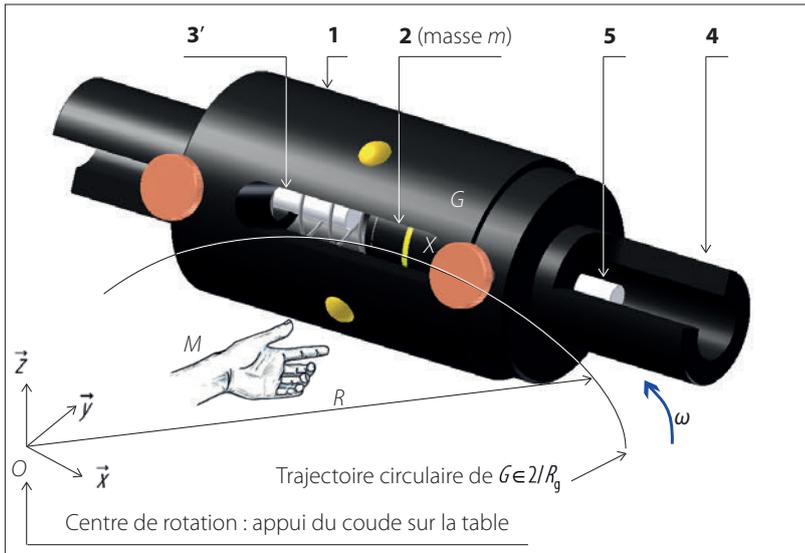


6 Équivalence inertie disque et masse ponctuelle

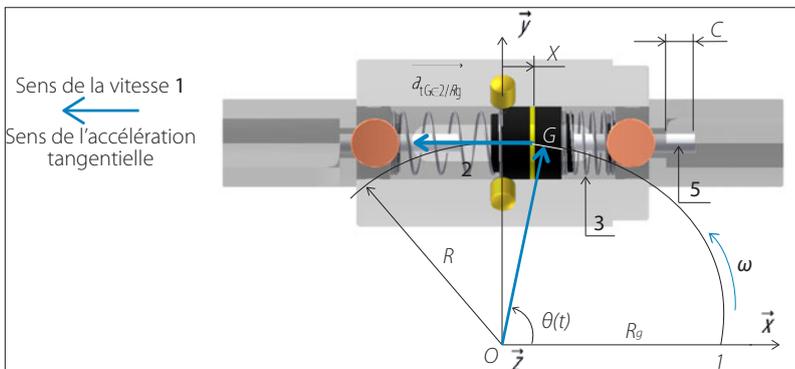
masselotte 2 soit perpendiculaire à son avant-bras qui pivote autour du coude, posé sur la table en O.

L'axe de l'alsage est donc tangentiel à la trajectoire circulaire de rayon R 7 8. L'utilisateur impose un mouvement de la droite vers la gauche, autour de O, centre fixe dans $R_g(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, repère galiléen lié à la terre. $\theta(t)$ est l'angle variable en fonction du temps entre le vecteur position \vec{OG} et l'axe (O, \vec{x}) . Dans la phase de démarrage, l'élève observe que la masselotte 2 se déplace d'une faible distance x vers la droite par rapport au corps 1, comprime le ressort 3 jusqu'à toucher le palpeur 5 8. La masselotte revient ensuite au centre de l'accéléromètre dans la phase de vitesse constante, puis se déplace vers la gauche dans la phase freinage. L'accélération de la masselotte 2, par rapport à R_g , que l'on observe, est l'accélération tangentielle a_t du mouvement de rotation de cette dernière : $a_t = R \cdot \omega'$.

1. Dimension qualitative et quantitative (non chiffrée) des paramètres influant sur le comportement du système réel, accessible aux perceptions de la main.



7 Accéléromètre sensoriel en rotation / (O, z)



8 Accéléromètre en accélération

En appliquant le PFD à la masselotte 2 isolée, nous pouvons écrire le théorème de la résultante dynamique dans R_g , projeté sur la direction tangentielle \vec{t} :

$$m \cdot \overrightarrow{a_{tG \in 2/R_g}} = \overrightarrow{F_R}, \text{ avec } \overrightarrow{F_R} = k \cdot x \cdot \vec{t} \quad (1)$$

Nous pouvons définir un effet d'inertie tangentiel, à l'origine de la compression du ressort :

$$\overrightarrow{e_{It}} = -m \cdot \overrightarrow{a_{tG \in 2/R_g}}$$

comme $a_{tG \in 2/R_g} = \frac{dv}{dt}$; avec $v = R \cdot \omega$; $\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$

Pour calculer l'accélération angulaire à partir de l'accéléromètre, en scalaire, on écrit que :

$$m \cdot R \cdot \frac{d\omega}{dt} = k \cdot x \text{ ou } m \cdot R \cdot \omega' = k \cdot x \quad (2)$$

d'où : $\omega' = \frac{k \cdot x}{m \cdot R}$

avec :

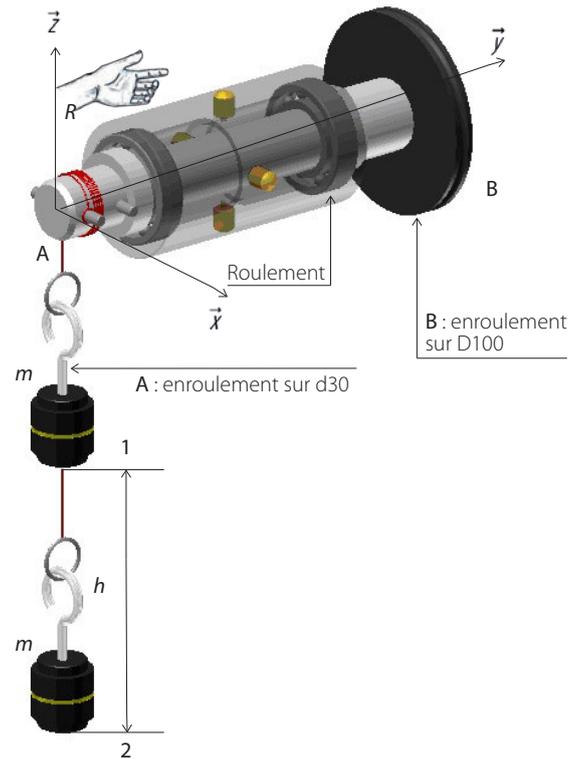
ω' , l'accélération angulaire (rad/s)

k , la raideur du ressort (N/m)

x , la course du palpeur (m)

m , la masse de la masselotte (kg)

R , le rayon de la trajectoire circulaire (m).



9 Force motrice constante – Couple variable A/B

Recherche de l'expression du théorème du moment dynamique

Pour la rotation, le moment dynamique est intéressant. Nous allons multiplier les deux membres de l'équation (2) par R . Nous pouvons faire apparaître le moment de la force du ressort par rapport à O et celui de la quantité d'accélération tangentielle : l'équation (2) devient : $m \cdot R \cdot \omega' \cdot R = k \cdot x \cdot R$, d'où : $m \cdot R^2 \cdot \omega' = F_R \cdot R$.

Nous faisons l'hypothèse que la masselotte 2 est une masse ponctuelle (son diamètre, $d = 30$ mm, est faible par rapport à la longueur de l'avant-bras, $l = 350$ mm, de l'utilisateur). $J_{2/Oz} = m \cdot r^2$ est donc le moment d'inertie de la masselotte 2 par rapport à l'axe (O, \vec{z}) .

Le couple moteur de la force du ressort F_R sur 2 par rapport à O est : $C_m = F_R \cdot R$.

Nous pouvons écrire l'expression du théorème du moment dynamique appliqué à 2 :

$$J_{2/Oz} \cdot \omega' = C_m$$

Il s'énonce à partir de l'expérience sur l'accéléromètre sensoriel et de cette relation : dans un repère galiléen, pour un solide (S) isolé, le couple moteur C_m est égal au produit du moment d'inertie $J_{S/Oz}$ de (S) par l'accélération angulaire ω' autour de son axe fixe de rotation (O, \vec{z}) .

Lorsque l'accéléromètre dans le prolongement de l'avant-bras est animé d'une vitesse angulaire constante, nous observons que la masselotte s'éloigne du centre de rotation. Cette observation est conforme à l'expression de l'accélération normale :

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Cinématique et accélération angulaire

En faisant l’hypothèse que, pendant le déroulement du fil 5, le couple moteur et le couple résistant (frottement sec) sont constants, le mouvement de l’ensemble (S) = {arbre 2, volant 3} est une rotation uniformément accélérée (accélération θ'' constante).

On peut écrire, dans la phase de démarrage, que :

$$\theta = \frac{1}{2} \theta'' t^2$$

θ (rad) est l’angle de rotation de l’arbre, pendant le déroulement du cordon de 1 m. θ se calcule à partir du nombre n de tours du fil sur l’arbre ($d = 30$ mm), compté par l’élève au moment de l’enroulement (ici $n = 10$ tours).

Le temps t (s) est celui du déroulage du cordon ; il est imposé par l’élève moteur (1 s, par exemple).

L’accélération angulaire θ'' (rad/s) est donc :

$$\theta'' = \frac{2\theta}{t^2}$$

avec $\theta = 10 \times 2\pi$ rad : $\theta'' = \frac{40\pi}{t^2}$

Si $t = 2$ s, $\theta'' = 10\pi$ rad/s².

Si $t = 1$ s, $\theta'' = 40\pi$ rad/s².

On notera la règle suivante : si nous divisons par 2 le temps de déroulage (passage de 2 à 1 s), l’accélération angulaire est multipliée par 4.

Ces trois parties, préalables à l’expérimentation proprement dite, peuvent être traitées en cours ou en TD – elles réactivent les prérequis – et préparent le TP qui suit.

Expérimentation TP1 – Liaisons parfaites

Le TP se fait avec l’hypothèse « liaisons parfaites », sans jeu et sans frottement. L’élève se concentre sur les forces motrices.

Dans les protocoles expérimentaux, l’élève manipule les maquettes sensorielles en modifiant successivement les grandeurs physiques, en relation avec celles des deux scooters à comparer, ce qui donne du sens aux manipulations.

La masse du passager des deux scooters est estimée à 75 kg, constante.

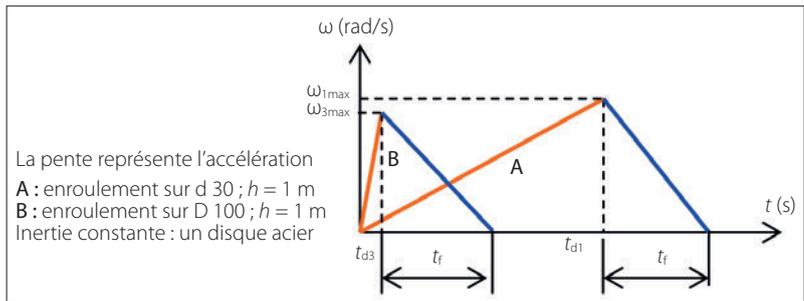
Influence du couple moteur du scooter

Le scooter électrique a un couple maximum de 14 N·m dès 0 tr/min, le moteur thermique a un couple de 4,4 N·m à 6 800 tr/min. Quelle est l’influence du couple sur les accélérations ?

Variation sensorielle du couple moteur

Approche 1 5

Pour la manipulation, à inertie constante (un disque acier) :



10 Graphe des vitesses – Couple variable A/B

1. bloquer l’arbre avec un doigt sur une goupille 5 et tendre le fil à la main jusqu’à l’obtention de la force recherchée (effet sensoriel et/ou dynamomètre) ;

2. libérer la rotation de l’arbre et mesurer le temps du déroulement t_d jusqu’au décrochage du fil. Pour le scooter thermique, le couple moteur est plus faible, il faudra démarrer bloqué avec une force initiale plus faible et mesurer le temps t_d jusqu’au décrochage ;

3. refaire d’autres essais :

– tirer plus fort, fil enroulé sur le d30,

– tirer avec une même force, fil enroulé sur un diamètre 30 mm, puis 100 mm.

Remarquons qu’il est possible de moduler l’effort pendant le déroulage du fil pour modéliser un couple constant ou variable.

On constate que l’accélération augmente avec la force motrice et/ou le rayon d’enroulement, c’est-à-dire avec le couple moteur (facteur favorable au scooter électrique).

Variation quantifiée du couple moteur

Approche 2 9

Cette expérimentation, à inertie constante, plus précise, correspond à un moteur qui fournit un couple rigoureusement constant pendant la durée de l’essai.

Essai 1 : on accroche une masselotte, fil enroulé sur le d30 (A). L’énergie potentielle d’entrée est : $E_p = m \cdot g \cdot h$; le couple moteur : $C_m = m \cdot g \cdot d/2$.

Le temps de déroulage sur 10 tours est t_{d1} 10.

Essai 2 : on accroche deux masselottes, fil enroulé sur d30 (A) (non illustré). Le couple et l’énergie d’entrée doublent : $C_m = 2m \cdot g \cdot d/2$ et $E_p = 2m \cdot g \cdot h$.

Le temps de déroulage t_{d2} est plus faible, mais deux paramètres ont varié en même temps.

Essai 3 : on accroche une seule masselotte et on enroule le fil sur le diamètre D100 (B). Le couple devient $C_m = m \cdot g \cdot D/2$ (multiplié sensiblement par 3), l’énergie d’entrée est toujours la même : $E_p = m \cdot g \cdot h$.

Le temps de déroulage sur trois tours est t_{d3} 10.

On constate que pour une même énergie d’entrée :

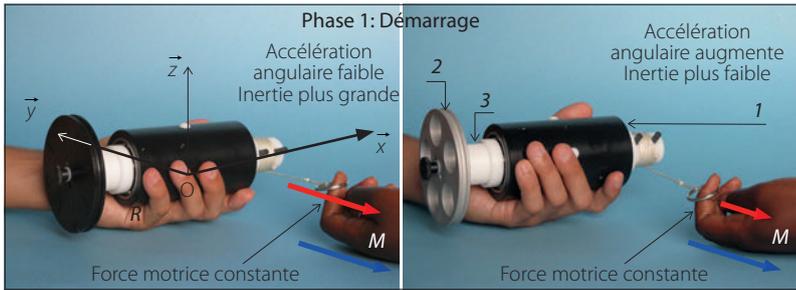
– le temps de déroulage t_{d3} est plus faible que t_{d1} ;

– l’arbre monte en vitesse plus rapidement dans

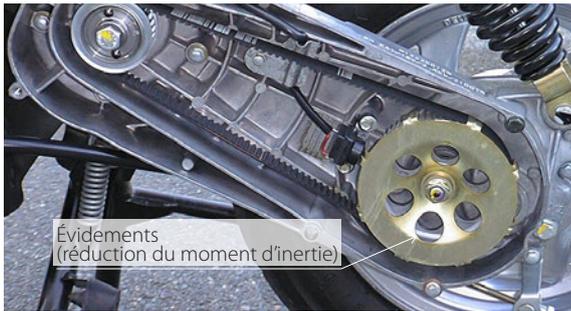
l’essai 3. L’accélération angulaire est :

$$\omega' = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ ou } \omega' = \frac{\omega_{3\max}}{t_{d3}}$$

Elle est plus grande (pente plus importante 10).



11 Accélération constante ; couple moteur et inertie variables



12 Moments d'inertie des solides en rotation

Le système met moins de temps pour atteindre ω_{\max} dans l'essai 3. L'énergie mécanique d'entrée constante E_m a été consommée plus rapidement. Cette expérience ouvre à la définition de la puissance mécanique :

$$P = \frac{E_m}{t} \text{ (en W)}$$

Influence de la masse du scooter

Le scooter électrique est plus lourd que le scooter thermique. Quelle incidence cela a-t-il sur la performance ? Réalisons l'essai suivant 11 :

- monter successivement :
 - un disque en acier,
 - un disque alu ajouré ;
- tirer sur le fil avec la même intensité ;
- observer l'accélération et mesurer le temps de déroulage t_d du fil ;
- comparer, formaliser.

On constate que, à couple moteur constant, l'accélération augmente lorsque l'inertie diminue (facteur favorable au scooter thermique).

En relation avec les expériences précédentes, dans une séance de synthèse, on pourra alors :

- écrire le théorème du moment dynamique pour chaque élément ponctuel entourant un point M_i de masse m_i . On s'appuie sur la manipulation plus haut de l'accéléromètre sensoriel 6 7 8 (rappel du déplacement de la masselotte sous l'effet d'inertie tangentielle, opposé à l'accélération) :

- $e_{it} = -m \cdot a_{tG \in 2} / Rg$
- en effectuant la somme de ces éléments, on pourra définir le moment d'inertie du disque :

$$J_{Ox} = \sum (r^2 \cdot m_i)$$

- énoncer le théorème du moment dynamique, pour un solide en rotation : $C_m = J_{Gx} \cdot \theta''$ (I) ; liaisons parfaites, couples résistants nuls.

Application numérique

Disque acier : diamètre $D = 100$ mm
 Masse $m = 0,564$ kg
 Temps de déroulage $t_d = 1$ s
 Diamètre de l'arbre $d = 30$ mm
 Calculer l'accélération angulaire, le couple moteur et la force de traction exercés par l'élève.

Réponses

Moment d'inertie : $J_{Ox} = \frac{mR^2}{2}$; $J_{Ox} = \frac{0,564 \times 0,05^2}{2}$;

$J_{Ox} = 0,0007 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

Accélération : $\theta'' = \frac{40\pi}{t^2}$; $\theta'' = 125,66 \text{ rad/s}$

Couple moteur : $C_m = 0,0007 \times 125,66$; $C_m = 0,087 \text{ N}\cdot\text{m}$

Force de traction : $F = \frac{C_m}{R} = \frac{0,087}{0,015}$; $F = 5,8 \text{ N}$

L'élève constate un écart possible entre ce résultat et la valeur du dynamomètre dans l'essai réel.

En synthèse, on notera que l'accélération d'un système (S) isolé augmente lorsque :

- le couple moteur augmente :
 - moteur *brushless* : $C_{m \max} = 14 \text{ N}\cdot\text{m}$,
 - moteur thermique : $C_{m \max} = 4,4 \text{ N}\cdot\text{m}$;
- son moment d'inertie et sa masse diminuent :
 - scooter thermique : $m = 95 \text{ kg}$;
 - scooter électrique : $m = 115 \text{ kg}$ (batteries 16 kg) ;
 - scooter électrique : moins de pièces en rotation dans la chaîne de transmission et réduction des moments d'inertie par évidement d'une poulie 12.

Pour conclure : le couple du scooter électrique, supérieur de 318 %, compense l'augmentation de 121 % de sa masse, d'où une meilleure performance par rapport au scooter thermique, malgré sa puissance légèrement plus faible (3,1 kW au lieu de 4,36 kW).

Les protocoles expérimentaux que nous utilisons font varier successivement les paramètres liés aux grandeurs influentes des deux scooters. Grâce aux maquettes sensorielles équivalentes, nous avons pu ressentir dans la main l'augmentation de la force motrice (couple moteur) lorsque l'inertie augmente et voir l'augmentation de l'accélération. Nous avons pu percevoir la liaison entre le moment d'inertie, le couple moteur et l'accélération. Cette mémoire du corps aide à la compréhension des comportements en relation avec les lois théoriques. Elle peut être réactivée dans d'autres situations. ■