Eléments finis et différences finies

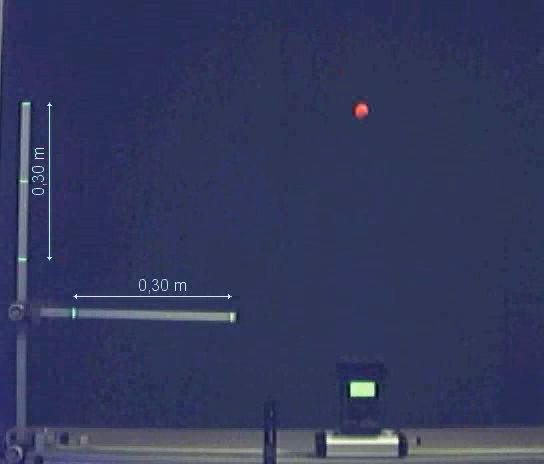
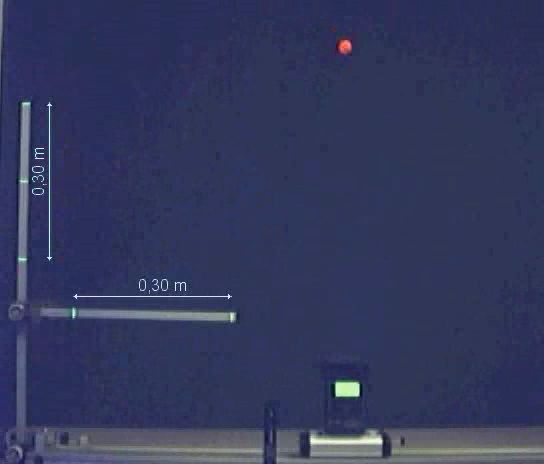
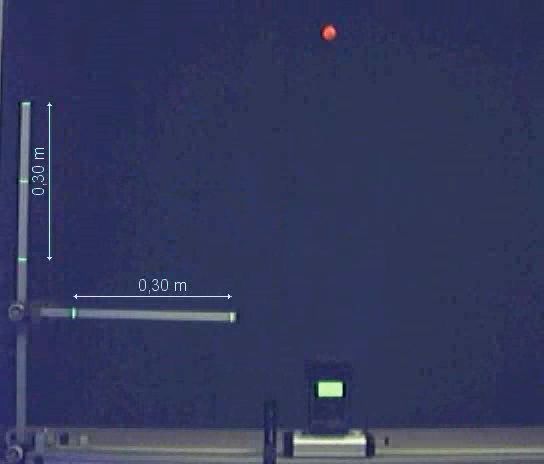
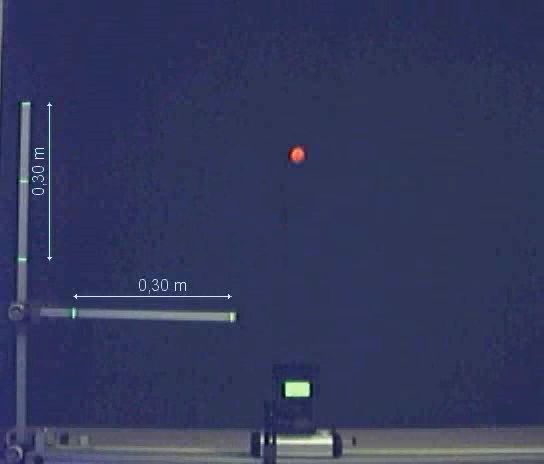
Application à la cinématique



# Le problème à résoudre

On souhaite connaitre les vitesses et accélérations d’un point d’un système en mouvement. Pour ce faire on réalise une vidéo de son mouvement.

A l’aide d’une échelle des distances (petit marqueur 0,30m) on peut connaitre sa position en x et y pour une image.



Comme chaque image est prise à un intervalle de temps donné (FPS de la vidéo = nombre d’images par secondes). On obtient ainsi facilement une liste de coordonnées en fonction du temps :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Temps en s | Position X en m | Position Y en m |
| 0,05 | 1,05625 | 0,70625 |
| 0,1 | 1,09375 | 0,5 |
| 0,15 | 1,11875 | 0,33125 |
| 0,2 | 1,15 | 0,21875 |
| 0,25 | 1,175 | 0,1375 |

Le problème est que l’on ne connait pas la fonction mathématique qui relie les points de la trajectoire :

La cinématique stipule que la vitesse se calcule grâce à la dérivée de la position :

Et l’accélération est la dérivée seconde de la position :

Malgré le fait que l’on ne connaisse pas les fonctions f et g on connait des valeurs de passage « discrètes » de ces fonctions.

Les méthodes suivantes permettent de calculer des dérivées si l’on connait des valeurs de passage d’une fonction.

# La méthode des différences finies

Traçons l’évolution de la position selon y en fonction du temps. Attention on ne connait pas la courbe, seulement les points !

Y en m

Temps en s

En tout point on peut considérer que la droite passant par le point précédent et le point suivant le point courant est de même pente que la tangente au point courant :

DT

DT

Pi+1

Pi-1

Pi

Y en m

Temps en s

Comme la tangente est la dérivée alors on peut dire que :

Enfin la dérivée seconde est la variation de tangence, on calcule ainsi la tangente avant et après et l’on détermine sa variation :

DT

DT

Pi+1

Pi-1

Pi

Y en m

Temps en s



CONSTATS :

Avec cette méthode on connait seulement les valeurs de vitesses et accélérations aux « nœuds »

Pour le premier et dernier nœud il est impossible de calculer des dérivées (il faut un nœud avant et un après)

# La méthode des éléments finis

Cette méthode permet de palier aux défauts de la méthode précédente mais est un peu plus lourde en calculs.

Le principe de base est simple : relier les nœuds par des courbes de type polynômes. En déterminant ces polynômes nous pourrons ensuite les dériver et obtenir les vitesses et accélérations. Chaque polynôme porte le nom d’élément fini.

## Eléments linéaires :

La forme la plus simple d’élément fini est une droite.

Elément 4

Elément 3

Elément 2

Elément 1

Ainsi la fonction de forme (équation de la droite) de l’élément entre les nœuds Pi-1 et Pi est de type linéaire :

On trouve ainsi a et b pour chaque élément.

Ensuite pour connaitre la vitesse on dérive y(t) :

Pour avoir l’accélération on dérive une seconde fois : …. Ce modèle ne convient pas car il ne permet pas de calculer d’accélération.

Constat :

Ce type de méthode permet d’obtenir des positions et vitesses pour tout temps t et pas seulement aux nœuds.

Si l’élément est linéaire sa dérivée est constante et sa dérivée seconde nulle.

## Eléments de degré plus élevé

Pour avoir une accélération :

* Constante, il faut une fonction de forme du second ordre de type : y(t)=a.t²+b.t+c
* Variable, il faut au moins une fonction du troisième ordre : y(t)=a.t3+b.t²+c.t+d

Dans ces cas les éléments passent par plus de 2 nœuds :

* 3 nœuds pour l’ordre 2
* 4 nœuds pour l’ordre 3
* …

Exemple pour l’ordre 2 :

P3

P1

Elément n+1

Elément n

L'équation est de la forme : .t +c

Le système d'équation pour **l'élément n** est :

La fonction de forme de **l'élément n** est donc (après résolution) :

Exemple pour l’ordre 3 :

P4

Elément n

P3

P1

L'équation est de la forme :

Le système d'équation pour **l'élément n** est :

La fonction de forme de **l'élément n** est donc (après résolution) :

Ainsi la vitesse est :

Après calcul avec l'exemple :

Et l'accélération a

Après calcul avec les valeurs proposées :