Annexe : Les critères de plasticité - complément

Identification de modèles de comportements pour le crash-test automobile

école normale supérieure paris—saclay

Renaud MERLE – Jean-Loup PRENSIER

Edité le 01/12/2005

La courbe de traction (contrainte-déformation) d'un acier a généralement l'allure donnée par la figure 1.

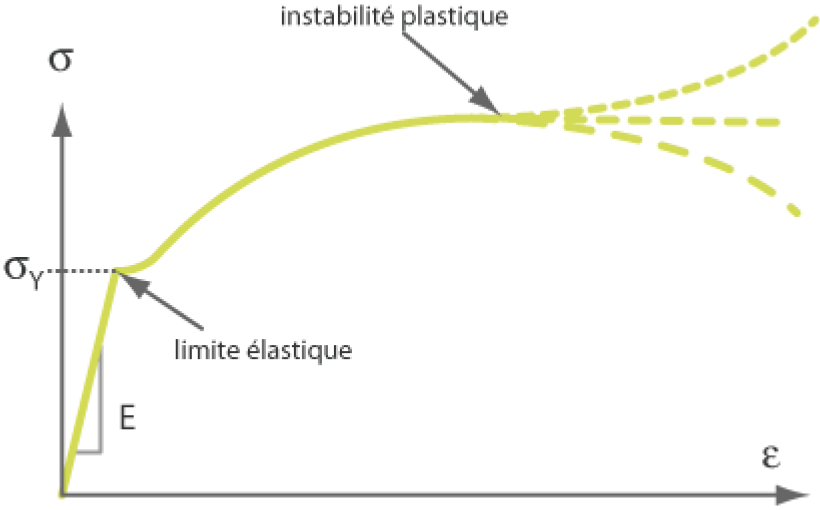

Figure 1 : Allure générale d'une courbe de traction pour un acier

On observe classiquement sur la courbe une zone élastique (élasticité linéaire), une zone pendant laquelle la contrainte croit avec la déformation (écrouissage du matériau) et une zone d'instabilité plastique qui se traduit par une striction de l'éprouvette.

De manière à définir un critère de plasticité du matériau utilisable dans un code, on fait l'hypothèse tout d'abord que la partie élastique des déformations est négligeable. De plus, nous ne ferons pas intervenir l'écrouissage. La courbe de traction d'un matériau modélisé de cette manière serait la suivante :

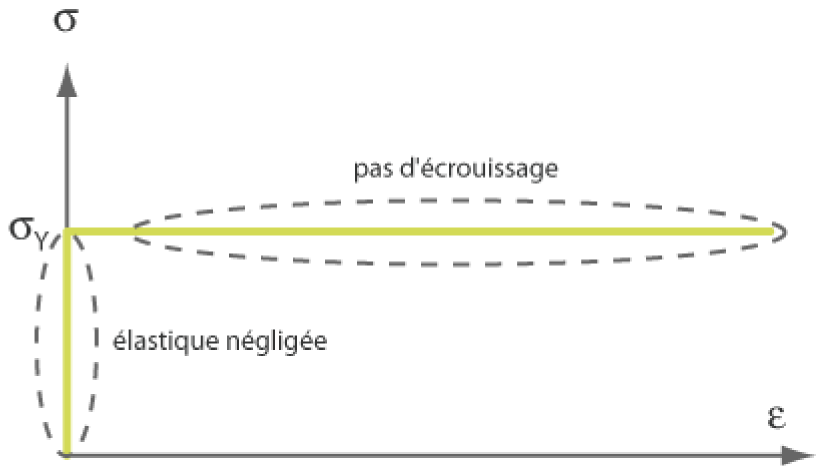

Figure 2 : Courbe de traction pour un matériau dont la partie élastique est négligée et ne possédant pas d'écrouissage

En prenant ce modèle de comportement, les critères de plasticité sont considérés comme des seuils à partir desquels l'écoulement plastique se développe. Certains critères font appel à la courbe intrinsèque du matériau (comme le critère de Tresca par exemple) d'autres que nous présentons ici faisant appel à la notion de contrainte équivalente (comme le critère de Von Mises).

Pour passer de l'essai de traction à une compréhension 3D du problème, une contrainte équivalente au tenseur des contraintes est définie. Une norme de « tenseur des contraintes » est définie, que l'on pourra comparer avec la valeur de la contrainte d'écoulement plastique.

En prenant l'hypothèse d'un matériau isotrope (mêmes propriétés dans toutes les directions), cette contrainte est invariante par changement de repère ce qui impose qu'elle s'exprime en fonction des invariants du « tenseur des contraintes ».

Rappel : LES INVARIANTS D'UN TENSEUR DES CONTRAINTES

Soit le tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Il existe trois invariants définis par :

$$\begin{aligned} J_1 &= Tr\left|\underline{\underline{\sigma}}\right| = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ J_2 &= Tr\left|\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\sigma}}\right| \\ J_3 &= \det \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

La dernière hypothèse prise en compte dans ce modèle est l'incompressibilité plastique (ou encore, une pression hydrostatique ne permet pas de plastifier un métal) qui se traduit par le fait que seule la partie déviatorique du tenseur des contraintes est prise en compte

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{3}Tr\underline{\underline{\sigma}} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \frac{1}{3}Tr\underline{\underline{\sigma}} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \frac{1}{3}Tr\underline{\underline{\sigma}} \end{pmatrix}$$

Un exemple : le critère de Von Mises

Le critère de Von Mises est construit à partir du deuxième invariant du tenseur, en ne prenant en compte que la partie déviatorique du tenseur. La contrainte équivalente sera donc écrite à partir de l'invariant

$$Tr\left(\underline{\underline{\sigma}}_D.\underline{\underline{\sigma}}_D\right)$$

La fonction choisie pour le critère de Von Mises est la suivante:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}Tr\left(\underline{\underline{\sigma}}_D.\underline{\underline{\sigma}}_D\right)}$$

On peut vérifier la cohérence avec la valeur de la contrainte d'écoulement en traction simple :

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{11} \end{pmatrix}$$

et on peut vérifier que

$$Tr\left(\underline{\underline{\sigma}}_D . \underline{\underline{\sigma}}_D\right) = \frac{2}{3}\sigma_{11}$$

et donc vérifier le critère pour la traction.

Quelques expressions du critère de Von Mises

Selon la forme du tenseur des contraintes, le critère de Von Mises prendra des écritures différentes. Dans le cas général, il s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right)}$$

La contrainte équivalente doit bien sûr être inférieure à la contrainte d'écoulement plastique pour rester dans le domaine élastique du matériau.

Autres critères de plasticité

A partir du même concept (construire une contrainte équivalente que l'on vient ensuite comparer à la contrainte d'écoulement plastique du matériau), d'autres critères existent. L'intérêt de chaque critère dépend de son adéquation au comportement des matériaux. Par exemple, le critère de Hill généralise le critère de Von Mises en introduisant des coefficients d'anisotropie (utilisable pour des matériaux anisotropes).

C'est l'interprétation des essais matériaux qui permettra de choisir le critère le mieux adapté pour l'étude.