

Les stratifiés sont des structures composites courantes, formées par l'empilement de plusieurs couches adhérant l'une à l'autre (voir ressource « *Matériaux composites et structure en composite* »). Les couches étant anisotropes (voir ressource « *Modélisation du comportement des composites : l'élasticité anisotrope* ») et possédant des orientations différentes, ces structures ont des comportements compliqués, que les modèles homogènes et isotropes ne permettent pas de simuler correctement. Cette ressource s'intéresse au cas particulier des poutres stratifiées, et montre comment la résistance des matériaux peut être adaptée pour prévoir leur comportement.

1 - Du pli unidirectionnel au stratifié

Dans la ressource « *Modélisation du comportement des composites : l'élasticité anisotrope* », nous avons caractérisé le comportement élastique d'un pli unidirectionnel, c'est-à-dire une couche de fibres parallèles prises dans une matrice. Nous avons vu que ce comportement est anisotrope et proposé quelques modèles d'élasticité anisotropes (mais homogènes, ce qui est justifié si l'on se place à une échelle « suffisamment grande » devant le diamètre des fibres). Nous nous intéressons maintenant à une structure stratifiée (ou plus simplement un stratifié), formée par la superposition de plusieurs plis unidirectionnels.

Dans un stratifié, chacun des plis possède une orientation différente, que l'on repère par l'angle formé entre la direction des fibres et une direction de référence liée à la structure (par exemple, la direction la plus sollicitée). Ainsi, un stratifié noté $[0,90]$ est constitué de deux plis : un pli dont les fibres sont parallèles à la ligne de référence, et un autre dont les fibres sont perpendiculaires (figure 1). Ces plis sont supposés adhérer parfaitement entre eux, ce qui est réaliste tant que le composite reste intact.

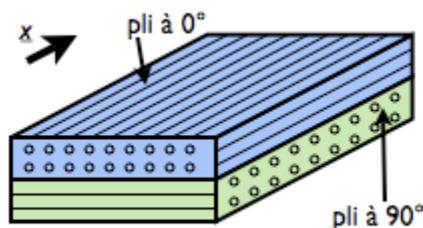


Figure 1 : Un stratifié $[0,90]$.

Connaissant un modèle du comportement de chacun des plis, nous souhaitons modéliser la pièce stratifiée afin de simuler son comportement sous charge, dans son environnement. Pour ce faire, il est important de se souvenir que la rigidité d'un pli n'est pas la même dans toutes les directions de l'espace : elle dépend de l'angle entre la direction des fibres et la direction des sollicitations. Or, la direction des fibres varie d'un pli à l'autre (figure 1). Deux plis de constitutions identiques mais d'orientations différentes doivent donc être modélisés par des tenseurs d'élasticité différents (figure 2). En d'autres termes, pour modéliser les structures stratifiées, il est nécessaire d'abandonner l'hypothèse d'homogénéité en plus de l'hypothèse d'isotropie.

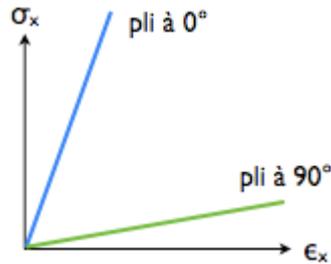


Figure 2 : Effet de l'orientation : deux plis orientés différemment ont des rigidités différentes dans une direction x donnée. Le stratifié est donc considéré comme hétérogène.

Le solveur doit naturellement être adapté à ces particularités. Les structures stratifiées étant la plupart du temps de faible épaisseur, la simulation s'appuie généralement sur des théories mécaniques adaptées : la théorie des plaques ou la théorie des coques. Un cas particulier de cette dernière dédié aux stratifiés anisotropes, nommé théorie des stratifiés, a été développé.

2 - Application de la RdM aux poutres stratifiées

Dans cette ressource, afin de simplifier la présentation, nous supposons que la géométrie du stratifié permet de modéliser celui-ci par une poutre droite. Il est donc possible de faire appel à la résistance des matériaux (RdM) pour simuler son comportement par de simples calculs « à la main ».

2.1 - RdM et modèles hétérogènes anisotropes : ce qui change

Le principe est exactement le même que pour un modèle homogène et isotrope. En effet, l'anisotropie et l'hétérogénéité ne remettent en cause aucun des postulats de base de la RdM (figure 3) :

- Ni le principe de Saint-Venant, qui permet de décrire les efforts de cohésion dans une section de la poutre par leur torseur résultant ;
- Ni l'hypothèse de Navier, qui suppose l'absence de gauchissement, c'est-à-dire que les sections droites restent planes ;
- Ni même l'hypothèse de Bernoulli, qui suppose que les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne.

Du moins, cela est vrai pour un stratifié intact, dont les plis adhèrent parfaitement les uns aux autres ; la modélisation du délaminage exige l'emploi d'outils plus sophistiqués.

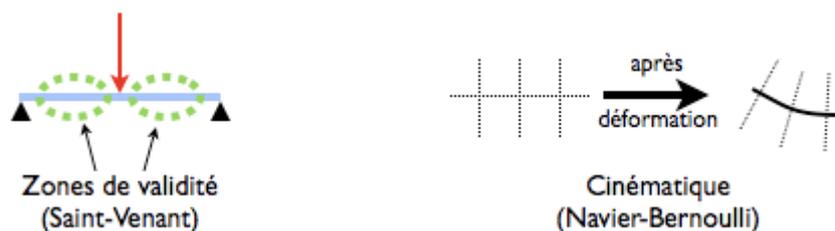


Figure 3 : Les bases de la RdM : le principe de Saint-Venant et les hypothèses de Navier-Bernoulli.

Le domaine de validité de la RdM est donc inchangé : il faut toujours que la poutre soit suffisamment élancée (i.e. qu'elle ait une dimension beaucoup plus grande que les deux autres), qu'elle ne présente aucune variation brutale de section, que sa courbure soit faible ou nulle, et que ses déformations restent faibles, de sorte que les postulats de la RdM soient vérifiés.

En revanche, les résultats faisant appel à l'homogénéité et à l'isotropie du matériau ne sont naturellement plus utilisables tels quels. Plus particulièrement, deux résultats classiques de la RdM sont remis en question.

1. La répartition des contraintes au sein de la section diffère : les contraintes sont maintenant discontinues d'un pli à l'autre. En effet, les coefficients d'élasticité sont homogènes par morceaux, et donc discontinus d'un pli à l'autre (alors qu'ils étaient constants dans toute la section en RdM « classique »), tandis que l'allure des déformations reste inchangée (puisque les hypothèses de Navier et de Bernoulli sont toujours vérifiées).
2. Par conséquent, les relations de comportement des sections droites, reliant le torseur de cohésion aux déformations généralisées, sont elles aussi différentes. En effet, le calcul de ces relations fait intervenir la répartition des contraintes dans la section.

2.2 - Méthodologie

Lorsque l'on étudie un stratifié, il n'est donc pas possible d'exprimer directement les résultats cherchés (comme une contrainte maximale ou un déplacement maximal) en fonction des efforts de cohésion, par simple utilisation d'un formulaire « RdM homogène isotrope » : il faut recalculer la répartition des contraintes au sein des sections droites.

Pour cela, une méthode possible est la suivante (figure 4) :

1. Identifier la nature des sollicitations dans chaque section droite, par exemple en effectuant des coupures ;
2. Postuler, à l'aide des hypothèses de Navier et de Bernoulli, l'allure de la répartition des déformations dans la section, en fonction des sollicitations identifiées ;
3. Appliquer la loi de Hooke dans chaque pli (en prenant garde à l'anisotropie !) et en déduire la répartition des contraintes.
4. Calculer la résultante et le moment des contraintes dans la section pour trouver le torseur de cohésion.

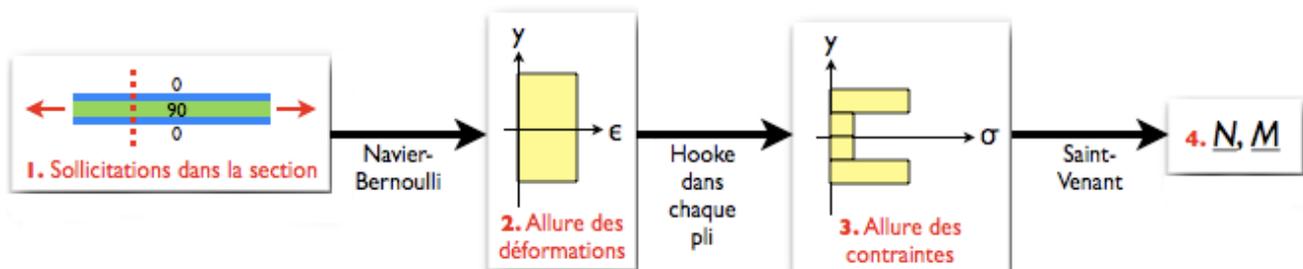


Figure 4 : Méthodologie d'étude d'une section droite d'un stratifié pour une analyse de RdM.

A l'issue de ce calcul, il est possible de poursuivre la résolution comme pour une poutre homogène et isotrope. Ainsi, si l'on cherche à calculer la déformée de la poutre, la méthode donne la relation de comportement reliant le torseur de cohésion aux déformations généralisées (qui « pilotent » les déformations de la section droite) ; et si l'on cherche à calculer les contraintes dans une section droite, la méthode donne également leur expression.

Cette méthode s'applique très bien aux sollicitations composées ; le comportement des plis étant supposé élastique linéaire, il est tout à fait possible d'appliquer le principe de superposition. En revanche, des difficultés peuvent survenir lorsque certains plis ne sont orientés ni parallèlement à la ligne moyenne, ni perpendiculairement : comme expliqué précédemment, ces plis peuvent avoir un comportement inhabituel. Ces difficultés seront abordées à la fin de la ressource.

3 - Quelques illustrations

Nous illustrons maintenant cette méthodologie sur un stratifié simple, et présentons quelques exemples de comportements inhabituels que l'on peut observer dans les structures stratifiées.

3.1 - Etude d'un stratifié simple

Considérons le stratifié de la figure 5, noté $[0,90]_s$; l'indice S, pour symétrique, signifie que les angles entre crochets ne correspondent qu'à une moitié de l'empilement, l'autre moitié étant symétrique par rapport au plan moyen du stratifié. Nous supposons que les quatre plis formant ce stratifié sont de même géométrie et de même constitution, seule l'orientation des fibres changeant d'un pli à l'autre.

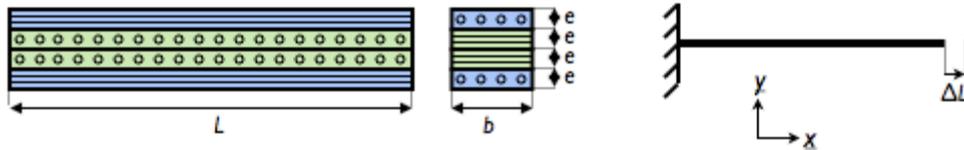


Figure 5 : Schéma d'un stratifié $[0,90]_s$ et modélisation par la RdM avec conditions aux limites.

Ce stratifié est encastree à une extrémité et un allongement ΔL est imposé à l'autre extrémité (ce choix est arbitraire ; les résultats seraient similaires avec un effort imposé). Nous souhaitons calculer l'effort correspondant ainsi que les contraintes dans chacun des plis. Pour cela, nous étudions une section droite du stratifié. Nous supposons qu'il existe une déformation longitudinale $\varepsilon = \Delta L/L$ constante dans cette section droite (ainsi qu'une déformation transversale due à l'effet de Poisson), ce qui est vraisemblable compte tenu des sollicitations.

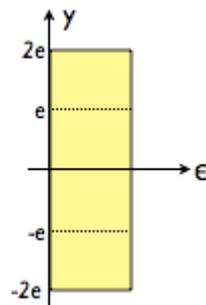


Figure 6 : Répartition des déformations dans une section droite du $[0,90]_s$.

Nous calculons les contraintes en appliquant la loi de Hooke dans chacun des plis, en tenant bien compte de leurs orientations respectives. Ici, cela ne pose aucune difficulté car les fibres sont soit parallèles, soit perpendiculaires à la ligne moyenne, et on obtient donc uniquement des contraintes normales :

$$\sigma_0 = E_L \varepsilon$$

$$\sigma_{90} = E_T \varepsilon$$

où E_L et E_T désignent respectivement les modules d'Young longitudinal et transversal d'un pli (définis dans ressource « Modélisation du comportement des composites : l'élasticité anisotrope »). Remarquons que ces contraintes sont différentes dans chaque pli et ne sont donc pas constantes dans la section (voir figure 7), contrairement à ce qu'indiquerait un modèle homogène et isotrope.

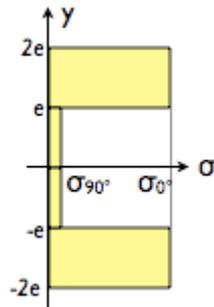


Figure 7 : Répartition des contraintes dans une section droite du [0,90]s.

Finalement, nous calculons la résultante et le moment de ces contraintes sur la section pour trouver le torseur de cohésion. Seul l'effort normal est non nul, sa valeur est :

$$\begin{aligned}
 N &= \int_S \sigma dS \\
 &= 2beE_L \varepsilon + 2beE_T \varepsilon \\
 &= S \frac{E_L + E_T}{2} \varepsilon
 \end{aligned}$$

où l'on a noté $S=4be$ la section de la poutre. Nous connaissons à présent la relation de comportement de la section droite en traction : elle est directement donnée par l'équation ci-dessus ! Nous pouvons donc relier l'allongement du stratifié à l'effort de traction, comme en RdM « classique » :

$$N = S \frac{E_L + E_T}{2} \frac{\Delta L}{L}$$

et, en remplaçant ε , exprimer les contraintes dans chaque pli en fonction de l'effort de traction :

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 &= \frac{N}{S} \frac{2E_L}{E_L + E_T} \approx 1,8 \frac{N}{S} \\
 \sigma_{90} &= \frac{N}{S} \frac{2E_T}{E_L + E_T} \approx 0,2 \frac{N}{S}
 \end{aligned}$$

On constate que les contraintes sont beaucoup plus élevées dans le pli à 0° que dans le pli à 90° . Les applications numériques ont été réalisées pour un rapport des deux modules d'Young égal à 10 ; il s'agit d'une valeur typique pour un pli unidirectionnel carbone/époxy. La contrainte maximale prédite par le modèle vaut alors près du double de ce que donnerait un modèle homogène et isotrope, à savoir N/S . Cela illustre bien qu'il est nécessaire d'abandonner les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie pour dimensionner une structure stratifiée.

3.2 - Couplages traction/flexion hors plan

L'exemple ci-dessus correspond à un cas « simple » : hormis la répartition et la valeur des contraintes qui doivent être recalculées, le comportement du stratifié est somme toute assez peu différent de celui d'une poutre homogène et isotrope. Il existe cependant des cas plus compliqués. Considérons par exemple la poutre [0,90] ci-dessous, là encore soumise à un allongement imposé (figure 8) :

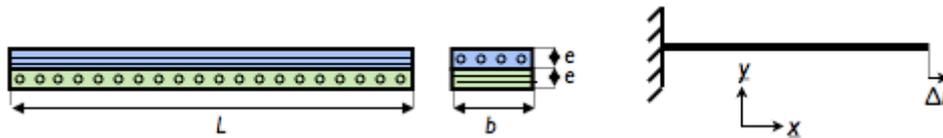


Figure 8 : Schéma d'un stratifié [0,90] et modélisation par la RdM avec conditions aux limites.

Un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent donne une répartition des déformations, puis des contraintes, correspondant à celle de la figure 9.

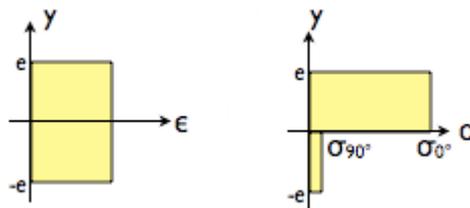


Figure 9 : Répartition des déformations et des contraintes dans une section droite du [0,90].

En calculant la résultante et le moment de ces contraintes sur la section, on obtient alors un moment fléchissant non nul au centre d'inertie de la section ! En d'autres termes, on obtient un couplage entre traction et flexion : pour soumettre le stratifié à une déformation purement longitudinale, il faut lui exercer un effort normal, mais aussi un moment de flexion. Réciproquement, on peut montrer que si l'on exerçait un effort purement normal, on observerait une déformation de flexion en plus de l'allongement (figure 10).



Figure 10 : Couplage traction/flexion obtenu avec un [0,90].

Une conséquence notable de ce couplage concerne le comportement des stratifiés lorsqu'ils se refroidissent après leur fabrication (celle-ci s'effectue souvent à chaud). En effet, la dilatation thermique d'un pli est anisotrope, tout comme son comportement mécanique : lors d'une variation de température, les plis se déforment beaucoup moins parallèlement aux fibres que perpendiculairement. Par conséquent, un stratifié [0,90] initialement plan va avoir tendance à se gondoler au cours du refroidissement (figure 11), selon un mécanisme tout à fait similaire à celui expliqué ci-dessus.



Figure 11 : Comportement d'un [0,90] lors du refroidissement après fabrication.

Bien que ces couplages puissent parfaitement être simulés par la RdM ou par éléments finis, ils correspondent à des comportements peu intuitifs et les concepteurs cherchent donc à les éviter. Pour cette raison, la plupart des stratifiés sont conçus selon des empilements symétriques, comme celui de l'exemple précédent : en comparant les répartitions des contraintes obtenues dans les paragraphes 3.1 et 3.2, on constate que le choix d'un empilement symétrique permet d'annuler le moment fléchissant, et ainsi de neutraliser le couplage entre traction et flexion hors plan.

3.3 - Couplages traction/flexion dans le plan

Un autre type de couplages peut survenir lorsque certains plis sont ni parallèles, ni perpendiculaires à la ligne moyenne, comme annoncé dans la paragraphe 2. Ces couplages s'expliquent par une particularité des matériaux anisotropes vue dans la première partie de la ressource : lorsqu'on sollicite un pli unidirectionnel dans une direction faisant un angle quelconque avec la direction des fibres, une contrainte de traction entraîne une déformation de cisaillement, et réciproquement. A l'échelle de la structure, cela se traduit par un couplage entre traction et flexion, cette fois-ci dans le plan du stratifié. Par exemple, un simple pli à $\pm 45^\circ$ sollicité par un effort normal pur aura tendance à fléchir dans son plan, comme le montre la figure 12.



Figure 12 : Couplage traction/flexion obtenu avec un pli à $\pm 45^\circ$.

Là encore, les concepteurs cherchent à éviter ces couplages. La parade est cette fois de concevoir des stratifiés équilibrés, c'est-à-dire comprenant autant de plis orientés à -45° que de plis à 45° (et, plus généralement, un pli à $-X^\circ$ pour chaque pli à X° , si X n'est pas un multiple de 90) : les contraintes de cisaillement planes à l'origine du couplage se neutralisent ainsi deux à deux. Au lieu d'un simple pli à 45° , on utilisera donc un empilement $[45^\circ, -45^\circ]_s$ constitué de quatre plis (naturellement, les conclusions du paragraphe 3.2 sur l'intérêt des empilements symétriques s'appliquent toujours ici !), comme indiqué sur la figure 13.

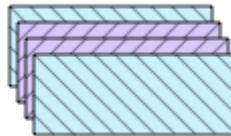


Figure 13 : Un stratifié $[45, -45]_s$, symétrique et équilibré.

4 - Bilan

Dans cette ressource, nous avons caractérisé le comportement de structures stratifiées simples, dans le cas particulier de poutres pouvant être étudiées par la résistance des matériaux. Nous avons vu que, du fait de l'anisotropie du comportement des plis et de la présence d'orientations différentes, un stratifié doit être modélisé comme une structure hétérogène : il est nécessaire d'abandonner l'hypothèse d'homogénéité en plus de l'hypothèse d'isotropie.

Du point de vue de la RdM, la principale conséquence est que la répartition des contraintes dans les sections droites n'est pas celle que l'on connaît pour les poutres homogènes et isotropes, et doit être recalculée pour chaque stratifié à partir des hypothèses de Navier-Bernoulli et de la loi de Hooke. Les contraintes dans un pli donné pouvant être sensiblement plus élevées que les valeurs prédites par la RdM « homogène et isotrope », il n'est naturellement pas question d'utiliser cette dernière pour dimensionner un stratifié.

Par ailleurs, l'anisotropie des plis fait que des couplages entre traction et flexion, quelque peu déroutants pour le concepteur non initié, peuvent survenir. Pour neutraliser ces couplages, une recommandation générale est de concevoir des empilements :

- Symétriques par rapport au plan moyen du stratifié

- Et équilibrés (c'est-à-dire comportant autant de plis à $-X^\circ$ que de plis à X°).

Cela illustre une des originalités de la conception en composites : le comportement du « matériau composite » et la conception de la « structure composite » sont intimement liés. On constate donc, encore une fois, que la frontière entre la structure et le matériau est beaucoup moins nette en composites qu'avec les matériaux « traditionnels ».

5 - Pour aller plus loin...

En réalité, de nombreuses pièces stratifiées ne sont pas élancées (i.e. munies d'une dimension beaucoup plus grande que les deux autres), mais plutôt minces (i.e. munies de deux dimensions beaucoup plus grandes que la troisième, voir figure 14).

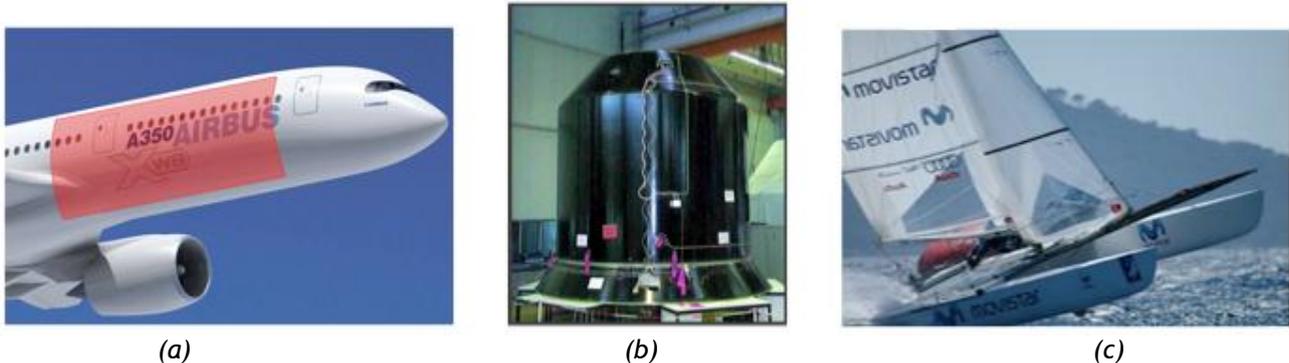


Figure 14 : Quelques exemples de structures stratifiées :
 (a) un panneau du fuselage de l'A350-XWB (image d'Airbus), (b) le support de la charge utile d'Ariane 5 (image Aérospatiale [1]), (c) la coque d'un catamaran.

La simulation du comportement des stratifiés fait donc généralement appel à la théorie des plaques (pour les modèles plans) ou à la théorie des coques (pour les modèles non plans), plutôt qu'à la théorie des poutres. Ces théories conduisent à des problèmes mathématiques 2D, et non pas 1D comme dans le cas des poutres ; cela se traduit par une écriture plus compliquée et une résolution « à la main » généralement impossible, a fortiori dans le cas de modèles anisotropes et hétérogènes comme ceux que l'on emploie pour les stratifiés d'où l'emploi de solveurs Eléments Finis pour mener les simulations.

Une présentation de la théorie des plaques appliquée aux stratifiés (que l'on appelle communément « théorie des stratifiés ») pourra être trouvée dans le cours de Laurent Gornet « Généralités sur les matériaux composites » [2], la théorie des stratifiés est traitée au chapitre 3.

Références :

[1]: <http://www.aerospace-technology.com/projects/ariane5/>

[2]: <https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/470296/filename/MatComposites.pdf>

Ressource publiée sur EDUSCOL-STI : <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-cachan/>