

De nombreux composites ont un comportement mécanique anisotrope. Cette ressource met en évidence ce phénomène d'anisotropie et en expose les conséquences pratiques, puis présente quelques modèles anisotropes dans le cadre de l'élasticité linéaire.

1 - Validité des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie

L'objectif de cette ressource est de mettre en évidence les spécificités du comportement mécanique des matériaux composites, et de présenter quelques modèles adaptés. En effet, les composites se distinguent sur bien des points des matériaux « traditionnels », pour lesquels on utilise la plupart du temps des modèles :

- Homogènes, c'est-à-dire que les propriétés du matériau sont supposées identiques en tout point de la pièce ;
- Isotropes, c'est-à-dire que les propriétés du matériau sont supposées identiques dans toutes les directions de l'espace.

De par la microstructure des composites, ces hypothèses sont susceptibles d'être remises en question.

1.1 - Homogénéité

De manière générale, la validité d'un modèle homogène dépend toujours de l'échelle à laquelle on souhaite l'utiliser. Ainsi, pour dimensionner une pièce mécanique d'acier, dont les dimensions sont au moins de plusieurs millimètres, on emploie presque toujours un modèle homogène ; cependant, vu au microscope (c'est-à-dire à l'échelle du micromètre), le même acier présente clairement des hétérogénéités, et un modèle homogène ne permet donc pas de prédire le comportement du matériau à cette échelle. Il en va de même pour les composites : bien qu'un composite soit par définition hétérogène, il est généralement possible d'utiliser un modèle homogène si l'on se place à une échelle bien plus grande que celle des hétérogénéités.

C'est le cas dans cette ressource, puisque nous nous plaçons dans l'optique du dimensionnement d'une structure stratifiée (figure 1). Pour ce faire, nous travaillons à l'échelle mésoscopique, ou échelle des constituants élémentaires de la structure. Dans le cas du stratifié, ce constituant élémentaire est un pli, c'est-à-dire une couche de fibres prises dans une matrice. L'épaisseur d'un pli étant beaucoup plus grande que le diamètre d'une fibre, nous pouvons modéliser le comportement du pli à l'aide d'un modèle homogène, c'est-à-dire ne pas tenir compte de la présence des fibres et de la matrice (du moins aux premiers stades du dimensionnement !).

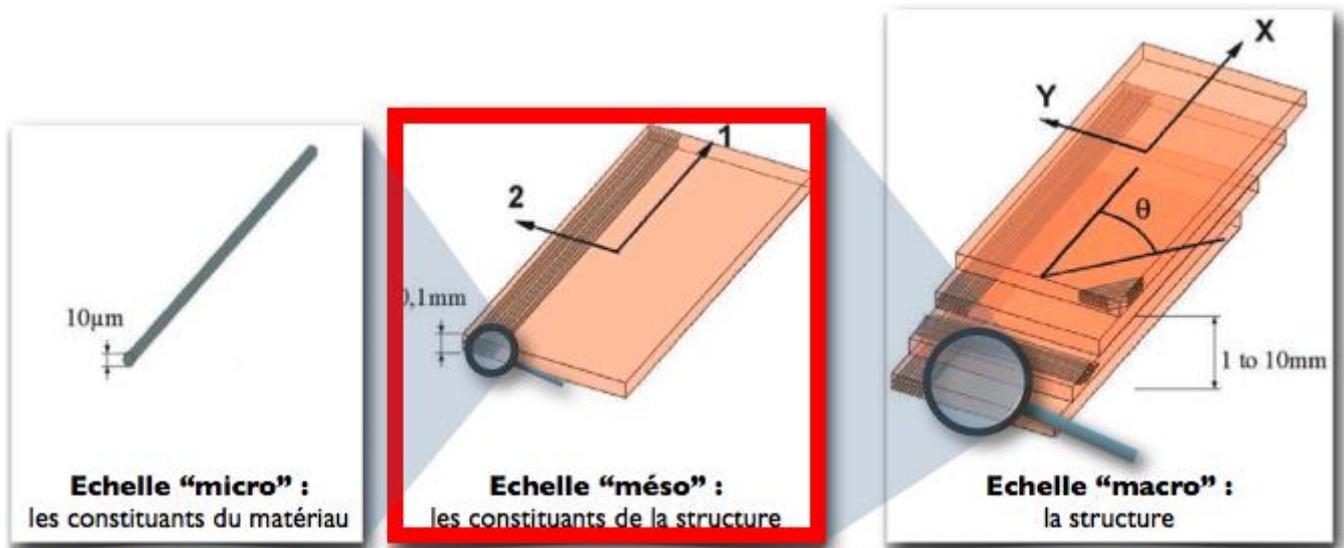


Figure 1 : Pour modéliser le comportement d'un composite, on se place à l'échelle mésoscopique : ici, celle du pli. (Image de Gilles Lubineau)

1.2 - Isotropie

En revanche, l'isotropie doit souvent être remise en question. Comme indiqué dans la ressource « *Matériaux composites et structures composites* », elle dépend essentiellement de l'orientation des renforts :

- Lorsque l'orientation est aléatoire (figure 2a), le comportement est à peu près isotrope ;
- Lorsque l'orientation suit une ou plusieurs directions préférentielles (figure 2b), le comportement est anisotrope.

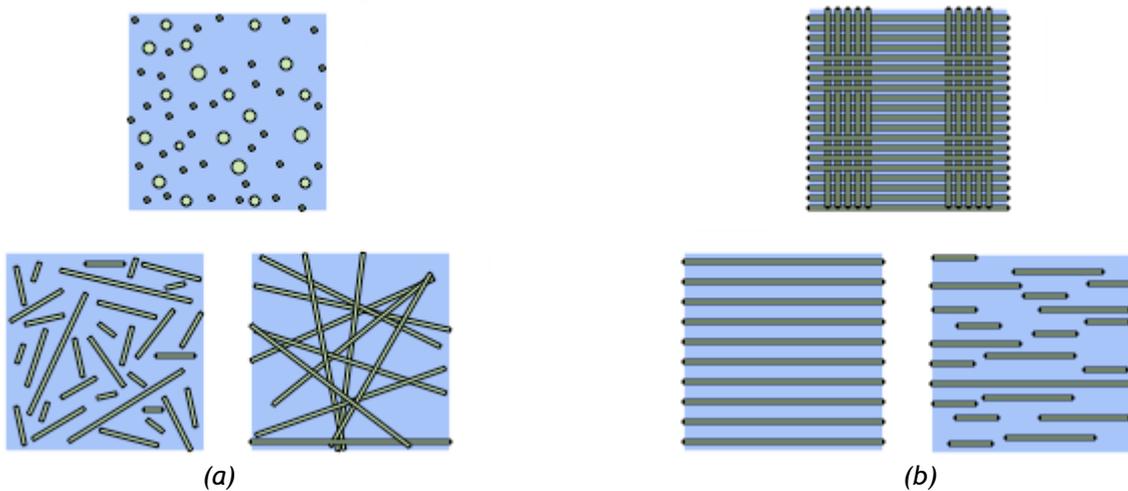


Figure 2 : Quelques exemples de microstructures de composites :

(a) ayant un comportement isotrope ou quasi-isotrope, (b) ayant un comportement fortement anisotrope.

Ici, nous supposons que les plis sont unidirectionnels, c'est-à-dire constitués de fibres longues continues, toutes parallèles entre elles, prises dans une matrice (figure 3). L'anisotropie est donc très prononcée puisque les fibres sont orientées dans une seule direction !

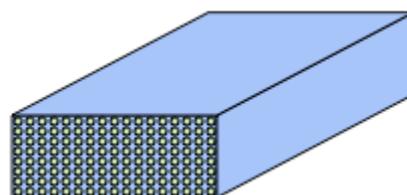


Figure 3 : Schématisation d'un pli unidirectionnel.

Pour modéliser le comportement d'un tel pli, il est souvent possible de conserver l'hypothèse d'homogénéité, mais l'hypothèse d'isotropie doit être abandonnée. La suite de cette ressource expose le comportement mécanique d'un pli unidirectionnel, d'un point de vue expérimental, dans le cadre de l'élasticité linéaire. Des modèles d'élasticité anisotrope, capables de rendre compte des phénomènes observés, sont ensuite présentés.

2 - Approche expérimentale du comportement d'un pli

Dans tout ce qui suit, nous considérons un pli unidirectionnel soumis à divers efforts, et nous analysons la façon dont il se déforme en retour. Notre objectif étant de caractériser le comportement du matériau, nous nous intéressons tout particulièrement au comportement d'un élément de volume infinitésimal situé au sein du pli (figure 4). Nous supposons que les efforts appliqués sur le pli permettent d'exercer des sollicitations simples sur l'élément de volume, c'est-à-dire de le soumettre à des chargements de traction/compression ou de cisaillement pur ; en pratique, cela peut poser des difficultés que nous n'évoquons pas ici.

Nous modélisons ensuite le comportement observé dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites perturbations ; les comportements non-linéaires des composites, qui interviennent notamment lors des dégradations du matériau, sont beaucoup plus compliqués à modéliser et ne seront pas traités ici.

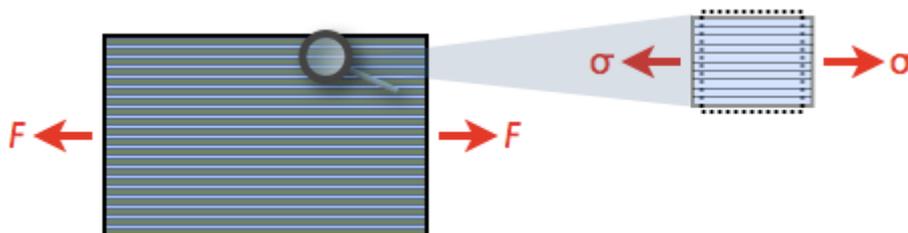


Figure 4 : Un pli unidirectionnel, et un élément de volume de ce pli.

2.1 - Traction longitudinale

Imaginons tout d'abord de tirer sur le pli dans le sens des fibres. Les actions exercées sur l'élément de volume peuvent alors être modélisées par une contrainte normale σ_L (L pour longitudinal). La figure 5 représente le chargement appliqué et la déformation obtenue.

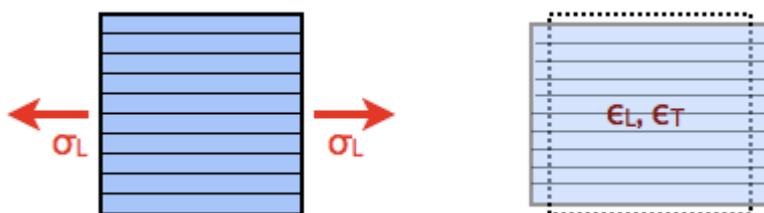


Figure 5 : Réponse d'un élément de volume à une sollicitation de traction parallèle aux fibres.

La réponse n'a rien de surprenant : le pli s'allonge parallèlement à la sollicitation, comme pour un matériau traditionnel, et on mesure donc une déformation longitudinale ε_L positive. Simultanément, il se contracte dans la direction perpendiculaire, et on mesure donc une déformation transversale ε_T négative. L'expérience montre que ces deux déformations sont proportionnelles à la sollicitation exercée.

Dans le cadre d'un modèle élastique linéaire, ces deux mesures permettent d'identifier deux coefficients d'élasticité relatifs à cette direction de sollicitation : le module d'Young longitudinal

$E_L = \sigma_L / \varepsilon_L$ et le coefficient de Poisson longi/transverse $\nu_{LT} = -\varepsilon_T / \varepsilon_L$ (ainsi appelé parce qu'il donne la déformation transversale obtenue lors d'une sollicitation longitudinale).

2.2 - Traction transversale

Supposons maintenant que l'on tire perpendiculairement aux fibres, comme représenté sur la figure 6.

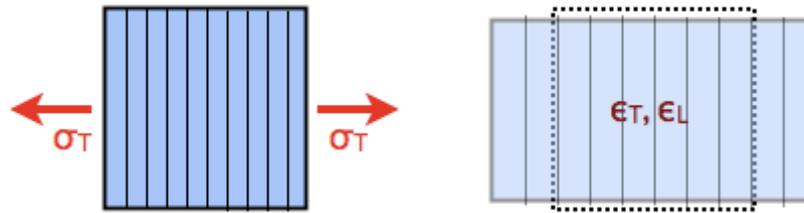


Figure 6 : Réponse d'un élément de volume à une sollicitation de traction perpendiculaire aux fibres.

Là encore, on observe un allongement parallèlement à la sollicitation, et un léger rétrécissement perpendiculairement à celle-ci, tous deux proportionnels à la contrainte. Pour une sollicitation de même intensité que précédemment, on constate que l'allongement est beaucoup plus important, tandis que le rétrécissement perpendiculaire est identique.

Ceci a deux conséquences au niveau du modèle. Premièrement, la valeur du module d'Young dépend de la direction des sollicitations. Ainsi, le module d'Young transversal E_T est beaucoup plus faible que le module longitudinal E_L : en pratique, un rapport de 10 ou 20 est courant. Deuxièmement, l'effet de Poisson est moins marqué que précédemment, puisque l'allongement est beaucoup plus important tandis que le rétrécissement est identique ! Il faut donc introduire un second coefficient de Poisson ν_{TL} , tel que le rapport ν_{TL} / ν_{LT} soit égal au rapport des deux modules d'Young E_T / E_L : l'égalité des rétrécissements dus à l'effet de Poisson est alors vérifiée. On retiendra que le coefficient de Poisson dépend donc, lui aussi, de la direction des sollicitations.

Intuitivement, le premier constat (différence des allongements) s'explique aisément par le fait qu'en pratique, les fibres sont beaucoup plus rigides que la matrice, et par la disposition des constituants (qui étaient « en parallèle » lors de l'essai longitudinal, et sont maintenant « en série »). Le second constat (égalité des rétrécissements) est quant à lui tout à fait général, et reste vrai dans le cadre d'un comportement isotrope.

2.3 - Cisaillement longi/transverse

Imaginons maintenant que l'on cisaille l'élément de volume dans le plan correspondant aux deux directions différentes, comme sur le schéma de la figure 7. Nous supposons ici que l'élément de volume est sollicité en cisaillement pur (aucune contrainte normale).

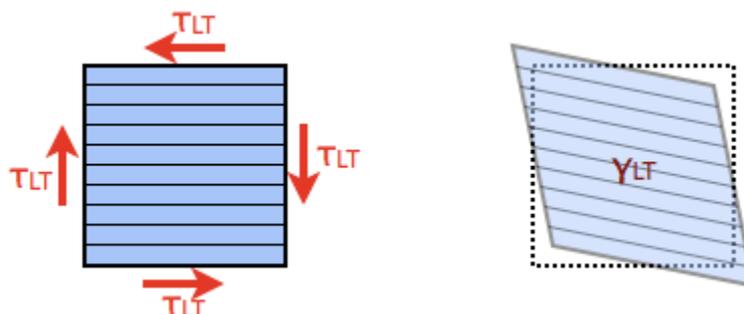


Figure 7 : Réponse d'un élément de volume à une sollicitation de cisaillement « longitudinal/transverse ».

Comme pour un matériau isotrope, on observe une distorsion angulaire de l'élément de volume, là encore proportionnelle à la sollicitation.

On peut donc identifier un module de cisaillement G_{LT} ; cependant, celui-ci ne dépend pas des autres coefficients, contrairement à ce qui se produit en élasticité isotrope où l'on a $G=E/2(1+\nu)$. Typiquement, les modules de cisaillement mesurés sur un pli réel sont plus faibles que ce que l'on pourrait calculer par une telle formule à partir des autres coefficients.

2.4 - Comportement dans une direction quelconque

L'anisotropie ne se manifeste pas uniquement par une dépendance de la rigidité en fonction de la direction des sollicitations. Des phénomènes plus déroutants peuvent se produire lorsque l'on sollicite le pli dans une direction quelconque, c'est-à-dire ni parallèlement ni perpendiculairement aux fibres. Imaginons par exemple que l'on tire sur l'élément de volume à 45° par rapport aux fibres, comme sur la figure 8.

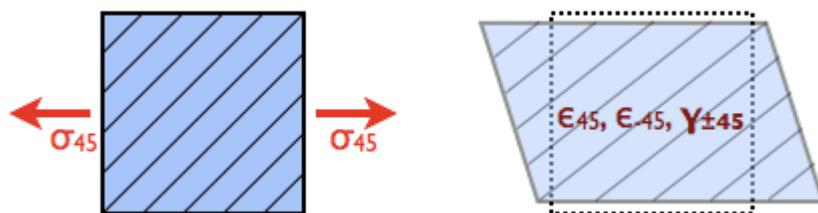


Figure 8 : Réponse d'un élément de volume à une sollicitation de traction à 45° par rapport aux fibres.

La déformation de l'élément de volume est clairement plus complexe que ce qu'aurait prédit un modèle isotrope ; non seulement l'élément s'allonge et se rétrécit, mais de plus il se tord. En d'autres termes, on obtient non seulement une déformation longitudinale et transversale, mais également une déformation de cisaillement, alors que l'élément est sollicité en traction pure !

Ce couplage entre traction et cisaillement est caractéristique des matériaux anisotropes. Il est relativement facile à interpréter physiquement si l'on se souvient que le matériau est beaucoup plus rigide dans le sens des fibres que dans le sens transverse : sur la figure 8, l'élément de volume s'allonge relativement peu selon la diagonale parallèle aux fibres, et beaucoup plus selon l'autre diagonale. En se déformant, le « carré » devient donc un « parallélogramme », et non pas un « rectangle » comme précédemment. On obtient ainsi une déformation de cisaillement en plus de l'allongement et du rétrécissement.

3 - Quelques modèles élastiques linéaires anisotropes

Nous présentons maintenant quelques modèles rendant compte du comportement décrit au paragraphe précédent. Afin de simplifier la présentation, nous nous plaçons dans un premier temps en 2D, conformément à l'exemple ci-dessus, en supposant que le pli est dans un état de contraintes planes. Le cas général sera présenté ensuite.

3.1 - La notation vectorielle

Pour modéliser des comportements élastiques linéaires et écrire les tenseurs d'élasticité de manière simple, il est commode d'utiliser la notation vectorielle. Cette dernière consiste, après avoir choisi une base, à écrire les composantes des déformations et des contraintes dans cette base sous forme de vecteurs colonnes (plutôt que de matrices), et celles du tenseur d'élasticité sous forme d'une matrice (plutôt que d'un tenseur d'ordre 4, difficile à écrire simplement).

Par exemple, un modèle d'élasticité isotrope en contraintes planes s'écrira de la façon suivante, dans une base orthonormale quelconque :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

où la notation γ_{12} désigne l'angle de distorsion entre les directions 1 et 2, égal au double de la déformation de cisaillement ε_{12} . Cette écriture n'est pas la seule possible ; il en existe d'autres.

3.2 - Exemple : le pli unidirectionnel en contraintes planes

Considérons d'abord le pli unidirectionnel du paragraphe précédent, en supposant que l'état de contraintes est plan. Nous nous plaçons naturellement dans le repère donné par la direction des fibres (direction longitudinale) et la direction transversale des figures ci-dessus. La modélisation effectuée à la suite des trois premiers essais (paragraphe 2.1 à 2.3) se traduit directement par l'expression ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix}$$

De plus, comme indiqué précédemment, nous savons que $\nu_{TL}/E_T = \nu_{LT}/E_L$. La matrice d'élasticité ci-dessus est donc symétrique ; cette symétrie traduit directement la symétrie du tenseur de Hooke, et modélise l'égalité des rétrécissements évoquée plus haut. D'autre part, les zéros de la matrice indiquent que :

- Lorsque le matériau est sollicité en traction/compression pure dans la direction L et/ou dans la direction T , l'angle de distorsion γ_{LT} (ou la déformation de cisaillement) est nul ;
- De même, lorsque le matériau est sollicité en cisaillement pur dans les directions L et T , les déformations longitudinale ε_L et transversale ε_T sont nulles.

On a donc bien découplage entre traction/compression et cisaillement dans le repère associé aux fibres. Cependant, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.4, ce découplage disparaît lorsqu'on se place dans une direction qui n'est ni parallèle, ni perpendiculaire aux fibres. Ainsi, dans une base (x,y) quelconque tournée d'un angle θ par rapport à la base précédente (figure 9), la relation de comportement prend la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x(\theta)} & -\frac{\nu_{xy}(\theta)}{E_x(\theta)} & \frac{\eta_{xy}(\theta)}{G_{xy}(\theta)} \\ -\frac{\nu_{yx}(\theta)}{E_y(\theta)} & \frac{1}{E_y(\theta)} & \frac{\mu_{xy}(\theta)}{G_{xy}(\theta)} \\ \frac{\eta_{xy}(\theta)}{G_{xy}(\theta)} & \frac{\mu_{xy}(\theta)}{G_{xy}(\theta)} & \frac{1}{G_{xy}(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

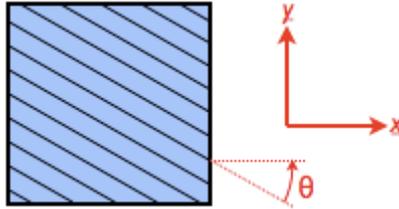


Figure 9 : Une base orientée d'un angle quelconque par rapport aux fibres.

Les coefficients de cette matrice peuvent être calculés en écrivant la matrice de rotation et en effectuant un changement de base à partir de l'expression précédente. Ce calcul, trop fastidieux pour être reproduit dans cette ressource, montre notamment que les termes de couplage $\eta_{xy}(\theta)$ et $\mu_{xy}(\theta)$ sont bien nuls si l'angle θ est un multiple de 90° , mais sont généralement non nuls si l'angle θ est quelconque.

Plus précisément, pour que ces termes soient nuls quel que soit l'angle, il faut vérifier deux conditions : les deux modules d'Young doivent être identiques et le module de cisaillement doit être égal à $G=E/2(1+\nu)$, ce qui correspond précisément à la définition d'un modèle isotrope !

3.3 - Cas général en 3D

Les modèles anisotropes tridimensionnels sont construits selon le même principe que le modèle 2D ci-dessus. Nous présentons ici deux modèles couramment utilisés pour représenter le comportement des composites.

Modèle isotrope transverse

Un modèle de comportement est dit isotrope transverse lorsque les propriétés élastiques présentent une symétrie de révolution autour d'un axe. On distingue donc deux directions : la direction de l'axe, dite longitudinale, et toutes les directions perpendiculaires, dites transversales. La plupart des matériaux à fibres parallèles peuvent être modélisés de cette sorte, et notamment les plis unidirectionnels qui constituent les pièces stratifiées (voir ressource « *Matériaux composites et structures composites* »).

La figure 10 est un diagramme polaire 3D représentant la distribution des modules d'Young apparents, c'est-à-dire les rapports entre contrainte normale et déformation correspondante, dans toutes les directions de l'espace. Le module apparent dans une direction est donné par la distance entre l'origine et le point de la surface situé dans cette direction.

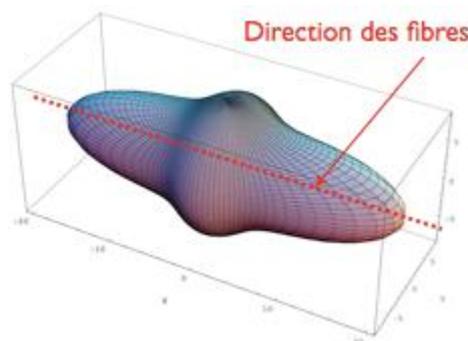


Figure 10 : Diagramme polaire des modules d'Young apparents d'un matériau isotrope transverse (un pli unidirectionnel épais). Image Pierre-Alain Boucard.

Ici, la forme ovoïde obtenue montre que le matériau (il s'agit d'un pli unidirectionnel) est plus raide dans la direction des fibres que dans les autres directions ; on observe bien une symétrie autour de l'axe longitudinal, et le « bourrelet » transversal montre que le matériau est plus raide

dans la direction transversale que dans les directions « obliques » (mais moins que dans la direction longitudinale).

Un tel modèle s'écrit simplement dans n'importe quelle base orthonormale contenant l'axe de révolution. Par exemple, si x_I est un vecteur unitaire porté par l'axe de révolution, alors on aura, dans toute base orthonormale (x_1, x_2, x_3) :

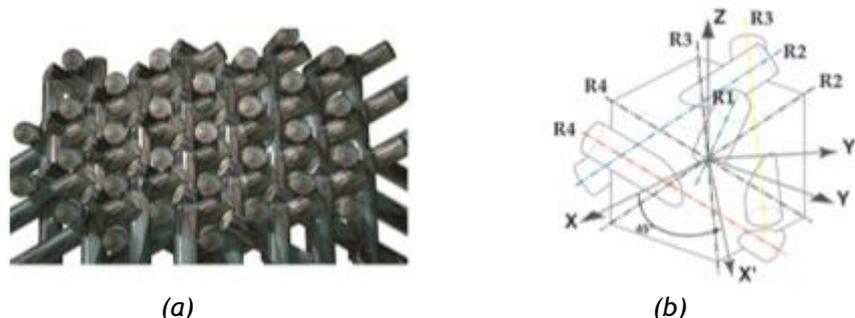
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{TT})}{E_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

On compte donc 5 coefficients indépendants : les modules d'Young longitudinal E_L et transversal E_T , les coefficients de Poisson « longi/trans » ν_{LT} et « trans/trans » ν_{TT} , et le module de cisaillement « longi/trans » G_{LT} . Par rapport au modèle évoqué dans les paragraphes 2 et 3.2, seul le coefficient de Poisson « trans/trans » est nouveau : il n'apparaissait pas dans les essais du paragraphe 2 car il aurait fallu mesurer la déformation hors plan pour l'identifier.

Par ailleurs, comme expliqué au paragraphe 3.2, la matrice ne présente cette forme que dans une base dont un des vecteurs est porté par l'axe de révolution ; si l'on change de base, des termes de couplage entre traction et cisaillement apparaissent, sauf si le modèle se trouve être isotrope (l'isotropie est un cas particulier d'isotropie transverse !).

Modèle orthotrope

On dit qu'un modèle de comportement est orthotrope lorsque les propriétés élastiques présentent une symétrie selon trois plans perpendiculaires. Un modèle isotrope transverse est automatiquement orthotrope (mais l'inverse n'est pas vrai) ; ces modèles sont typiquement utilisés pour les tissus 2D ou 3D orthogonaux, équilibrés ou non.



(a) *vue des renforts, (b) schématisation et repère d'orthotropie. Images Pierre-Alain Boucard.*
 Figure 11 : Un tissu composite « 4D » carbone/carbone :

Par exemple, la figure 11 représente un tissu « 4D » (quatre directions de fils, correspondant aux quatre diagonales d'un cube) utilisé pour réaliser un composite à fibres et matrice de carbone (voir ressource « Les grandes familles de matériaux composites »); le diagramme polaire des modules d'Young apparents de ce composite est donné sur la figure 12, dans le repère de la figure

11b. On observe bien les trois plans de symétrie ; les « lobes » correspondent naturellement à la direction des fils.

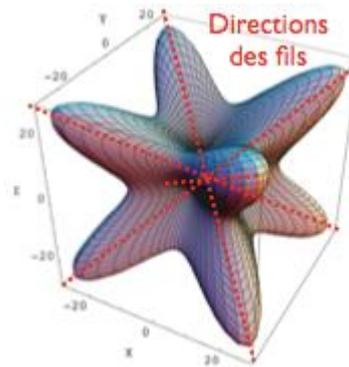


Figure 12 : Diagramme polaire des modules d'Young apparents d'un matériau orthotrope (un composite 4D). Image Pierre-Alain Boucard.

Une base orthonormale dont les vecteurs se situent à l'intersection des plans de symétrie est appelée base d'orthotropie ; par exemple, la base (x,y,z) de la figure 11b est une base d'orthotropie. Dans une telle base, le modèle possède une écriture matricielle relativement simple, de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

On compte 9 coefficients indépendants : les trois modules d'Young, les trois coefficients de Poisson et les trois modules de cisaillement. On vérifie donc facilement que le modèle isotrope transverse du paragraphe précédent est un cas particulier d'orthotropie. Là encore, dans une base ne correspondant pas à la base d'orthotropie, des termes de couplage entre traction et cisaillement apparaissent.

4 - Bilan

Dans cette ressource, nous avons présenté et illustré l'anisotropie du comportement mécanique de nombreux composites. Nous avons mis en évidence quelques comportements inhabituels résultant de cette anisotropie :

1. La rigidité du matériau dépend de la direction des sollicitations ;
2. Les rigidités en traction/compression et en cisaillement sont indépendantes ;
3. Une contrainte de traction/compression peut entraîner une déformation de cisaillement, et réciproquement sauf dans certaines directions bien particulières qui, dans le cas des composites, correspondent souvent aux directions des renforts.

Enfin, nous avons montré comment un comportement anisotrope peut être modélisé en élasticité linéaire, et présenté deux modèles anisotropes couramment utilisés en bureau d'études.

Ces modèles peuvent être utilisés pour simuler le comportement de structures composites, telles que des tissus ou des stratifiés. La ressource « *Modélisation du comportement des composites : les poutres stratifiées* » présente l'application de ces modèles à des structures courantes : des stratifiés à base de plis unidirectionnels.

5 - Quelques liens

Il existe de nombreux cours en ligne dédiés à l'élasticité anisotrope et à la modélisation du comportement des composites. Une présentation plus riche et plus complète pourra être trouvée aux emplacements suivants :

- Généralités sur les matériaux composites de Laurent Gornet (l'élasticité anisotrope est traitée au chapitre 2) [1]
- Cours sur l'élasticité anisotrope de Marc François [2].

Références :

[1]: <https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/470296/filename/MatComposites.pdf>

[2]: http://www.fast.u-psud.fr/~francois/Polys_de_cours/anisotropie.pdf

Ressource publiée sur EDUSCOL-STI : <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-cachan/>