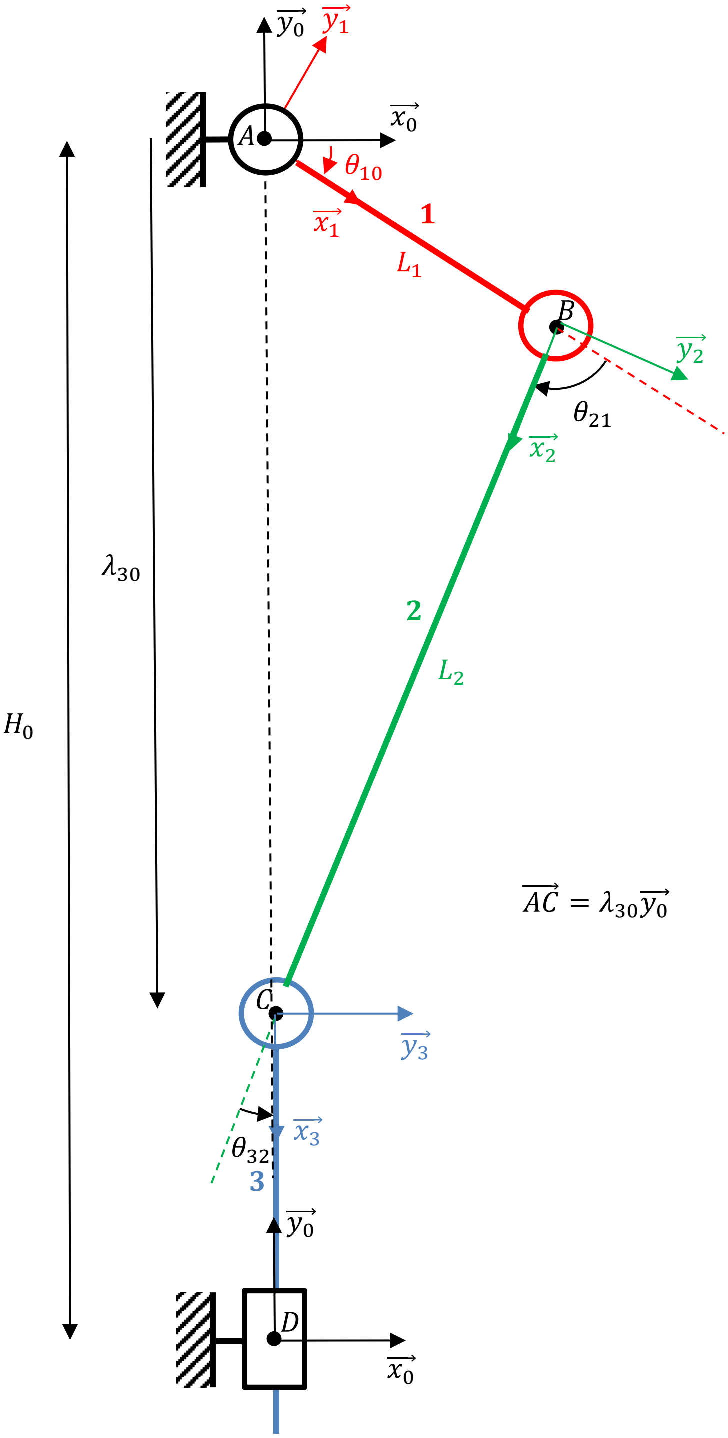
Informatique

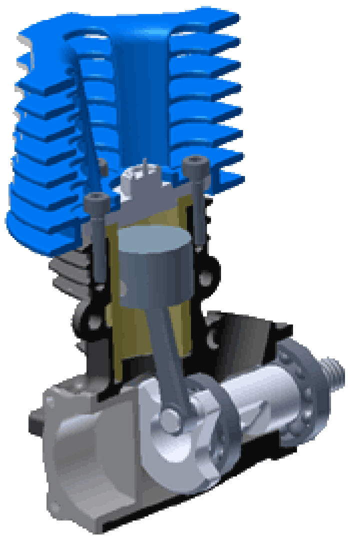
Systèmes linéaires

TD
Bielle-Manivelle

Etude d'un système bielle/manivelle

Soit le schéma cinématique suivant représentant un système bielle/manivelle utilisé dans bon nombre de mécanismes, et en particulier dans les moteurs à pistons.





Définition des torseurs cinématiques de chaque liaison			
$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$

-Partie 1 : Etude théorique-

Question 1: En écrivant une fermeture géométrique projetée dans la base 0, montrer que

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\dfrac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \dfrac{\lambda_{30}}{L_2} - \dfrac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10} \end{cases}$$

Question 2: En remarquant que $\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) < 0$ si $L_1 \neq L_2$, déterminer l'expression de θ_{21} en fonction de θ_{10} et des longueurs L_1 et L_2

Question 3: En écrivant une fermeture cinématique en B projetée dans la base 0, montrer que le système linéaire liant les différentes vitesses dans les liaisons s'écrit comme suit

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \\ -L_1 \sin\theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) R_{32} = 0 \\ V_{03} + L_1 \cos\theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) R_{32} = 0 \end{cases}$$

On propose le vecteur U tel que :

$$C = \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix}$$

Question 4: Proposer la matrice cinématique K_c telle que le système s'écrive sous la forme : $K_c C = O$ où O est un vecteur nul

On impose la vitesse de rotation R_{10} et on définit le vecteur U tel que :

$$U = \begin{bmatrix} R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix}$$

Question 5: Modifier le système et le mettre sous la forme $KU = F$ avec F un vecteur dépendant de R_{10} et de la géométrie

+Partie 2 : Résolution numérique+

Nous souhaitons résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 0 \\ -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{10} \\ L_1 \sin\theta_{10} R_{10} \\ -L_1 \cos\theta_{10} R_{10} \end{bmatrix}$$

$$KU = F$$

On définit le rapport suivant :

$$r = \frac{L_2}{L_1}$$

On fera varier ce rapport dans la plage $]1,5]$ pour étudier l'effet de ce choix sur l'accélération du piston.
On a :

$$\theta_{21} = -\theta_{10} - \cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right)$$

Pour tout le TP, on fixe :

$$L_1 = 50\,mm$$
$$R_{10} = 1\,rd.s^{-1}$$

+Mise en place de la résolution+

Dans un premier temps, on choisira :

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta_{10} = 45° \end{cases}$$

Remarques :

- La fonction $\cos^{-1}(\mathrm{x})$ s'écrit « acos(x) » sous python après l'avoir importée du module math
- Attention à travailler avec dans angles en radians dans les fonctions trigonométriques
- On rentrera toutefois la valeur de l'angle d'entrée en ° pour une meilleure compréhension des positions d'entrée

Question 6: Mettre en place un code de calcul permettant d'obtenir la solution du système ci-dessus

Evidemment, en programmant le calcul automatique de la matrice K en fonction des données, vous vérifierez que vous avez la même que celle-ci-dessous dans le cas proposé :

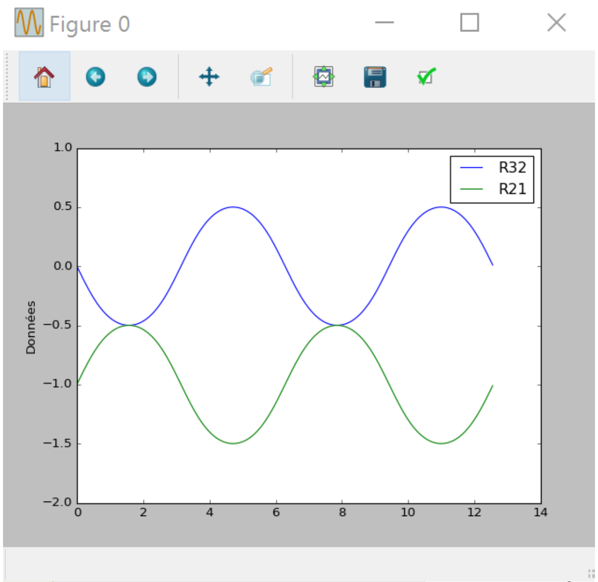
```
>>> K
array([[ 1.        ,  1.        ,  0.        ],
       [-0.09354143,  0.        ,  0.        ],
       [ 0.03535534,  0.        ,  1.        ]])

>>> F
array([-1.        ,  0.03535534, -0.03535534])

>>> Sol
array([-0.37796447, -0.62203553, -0.02199228])
```

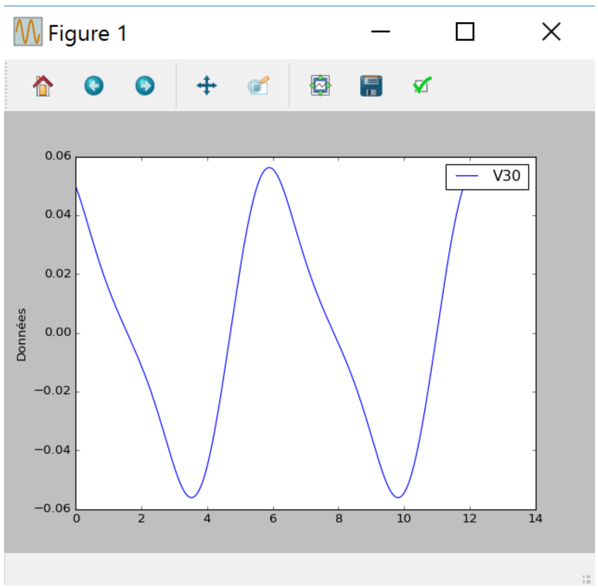
+Tracé des vitesses+

Question 7: **Utiliser le code mis en place et proposer une fontion *Resolution(O10_d,r)* qui renvoie le vecteur solution *U* pour une valeur d'entrée *O10_d* en degré et pour un rapport de longueurs *r***
On pensera, dans cette fonction, à mettre à jour L_2 en fonction de r.

Question 8: Proposer une fonction f_*Affiche(fig,LX,LY,Leg)* affichant sur la figure numéro fig la liste LY en fonction de la liste LX et ajoutant la légende Leg de la courbe
Question 9: Mettre en place un code permettant de tracer les 3 inconnues cinématiques du vecteur *U* en fonction du temps sur deux tours de l'entrée avec une définition d'une mesure par degré
Remarque : connaissant $R_{10} = \dot{\theta}_{10}$ une constante, vous devrez recréer la liste des temps associée à la position angulaire θ_{10}

Vous devriez trouver :





Remarque : $V_{30} = -V_{03}$

+Calcul et tracé de l'accélération du piston+

Question 10: Proposer une fonction *f_Derivee(Liste_x,Liste_y)* qui calcule la dérivée à droite de *Liste_y* en fonction de *Liste_x* et qui renvoie la liste *Liste_x* sans son dernier terme et la liste dérivée
Question 11: Utiliser cette fonction et tracer l'accélération du piston en fonction du temps

+Etude de l'influence du rapport r sur l'accélération+

Question 12: Proposer une fonction *f_Etude_r(r)* qui renvoie les listes du temps et de l'accélération du piston sur 2 tours pour une valeur de r
Question 13: Mettre en place un code et le faire tourner afin de visualiser sur la même figure l'accélération du piston pour r variant dans l'intervalle proposé

+Conclusion+

Question 14: Justifier le choix d'un rapport r aux alentours de 3 dans les moteurs

-Remarque-

La suite de cette étude, ce serait la réalisation de la transformation de Fourier de la courbe d'accélération obtenue dans le but d'identifier l'effet du rapport r sur l'apparition de pics de fréquence différence de celle de l'entrée. Je l'ai proposée dans le corrigé avec une transformée de Fourier numérique.