# *Partie 1 : Etude théorique*

**Question 1: En écrivant une fermeture géométrique projetée dans la base 0, montrer que**

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\dfrac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \dfrac{\lambda_{30}}{L_2} - \dfrac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} - \lambda_{30}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} L_1\cos\theta_{10} + L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = 0 \\ L_1\sin\theta_{10} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - \lambda_{30} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\dfrac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \dfrac{\lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10}}{L_2} \end{cases}$$

Expression de $\lambda_{30}$ :

$$\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\theta_{21}+\theta_{10})} = \pm\sqrt{1-\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2\cos^2\theta_{10}}$$

$$\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \pm\frac{1}{L_2}\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}$$

$$\lambda_{30} = L_1\sin\theta_{10} \pm \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}$$

$$\lambda_{30} = L_1\sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}$$

Simplification :

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\dfrac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\dfrac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_2} \end{cases}$$

**Question 2: En remarquant que $\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) < 0$ si $L_1 \neq L_2$, déterminer l'expression de $\theta_{21}$ en fonction de $\theta_{10}$ et des longueurs $L_1$ et $L_2$**

$$\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) < 0$$

$$\theta_{21}+\theta_{10} = -\cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right)$$

$$\theta_{21} = -\theta_{10} - \cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right)$$

**Question 3: En écrivant une fermeture cinématique en B projetée dans la base 0, montrer que le système linéaire liant les différentes vitesses dans les liaisons s'écrit comme suit**

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \\ -L_1 \sin\theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \\ V_{03} + L_1 \cos\theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_0} \\ -L_2 R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B$ | $\vec{V}(B,3/2) = \vec{V}(C,3/2) + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{32}}$ $= L_2\overrightarrow{x_2} \wedge R_{32}\overrightarrow{z_2} = -L_2 R_{32}\overrightarrow{y_2}$ |
| $\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} R_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$ | |
| $\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ L_1 R_{10}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_B$ | $\vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}}$ $= -L_1\overrightarrow{x_1} \wedge R_{10}\overrightarrow{z_1} = L_1 R_{10}\overrightarrow{y_1}$ |
| $\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}_B$ | |

$$\{\mathcal{V}_{32}\} + \{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{03}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_0} \\ -L_2 R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} R_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ L_1 R_{10}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}_B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} (R_{32} + R_{21} + R_{10})\overrightarrow{z_0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} + L_1 R_{10}\overrightarrow{y_1} - L_2 R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \\ -L_1 \sin\theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \\ V_{03} + L_1 \cos\theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \end{cases}$$

On propose le vecteur $U$ tel que :

$$C = \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix}$$

**Question 4: Proposer la matrice cinématique $\boldsymbol{K_c}$ telle que le système s'écrive sous la forme : $\boldsymbol{K_c C = O}$ où $\boldsymbol{O}$ est un vecteur nul**

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \\ -L_1 \sin\theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \\ V_{03} + L_1 \cos\theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -L_1 \sin\theta_{10} & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 0 \\ L_1 \cos\theta_{10} & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_c C = O$$

$$K_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -L_1 \sin\theta_{10} & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 0 \\ L_1 \cos\theta_{10} & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On impose la vitesse de rotation $R_{10}$ et on définit le vecteur $U$ tel que :

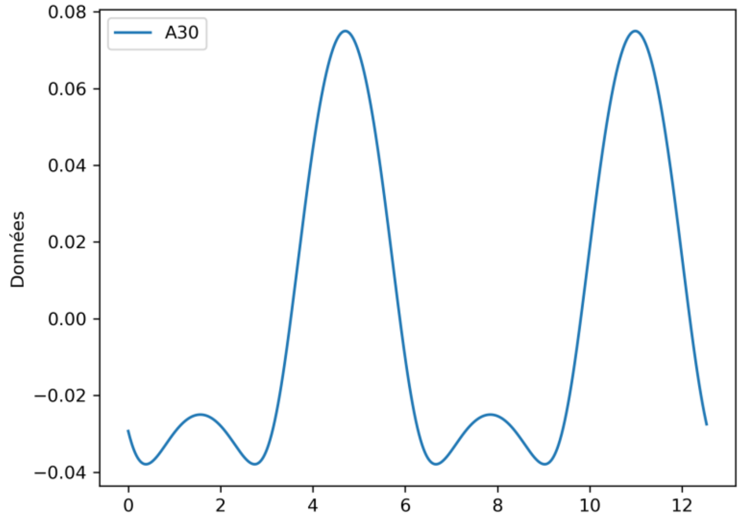
$$U = \begin{bmatrix} R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix}$$

**Question 5: Modifier le système et le mettre sous la forme $\boldsymbol{KU = F}$ avec $\boldsymbol{F}$ un vecteur dépendant de $\boldsymbol{R_{10}}$ et de la géométrie**

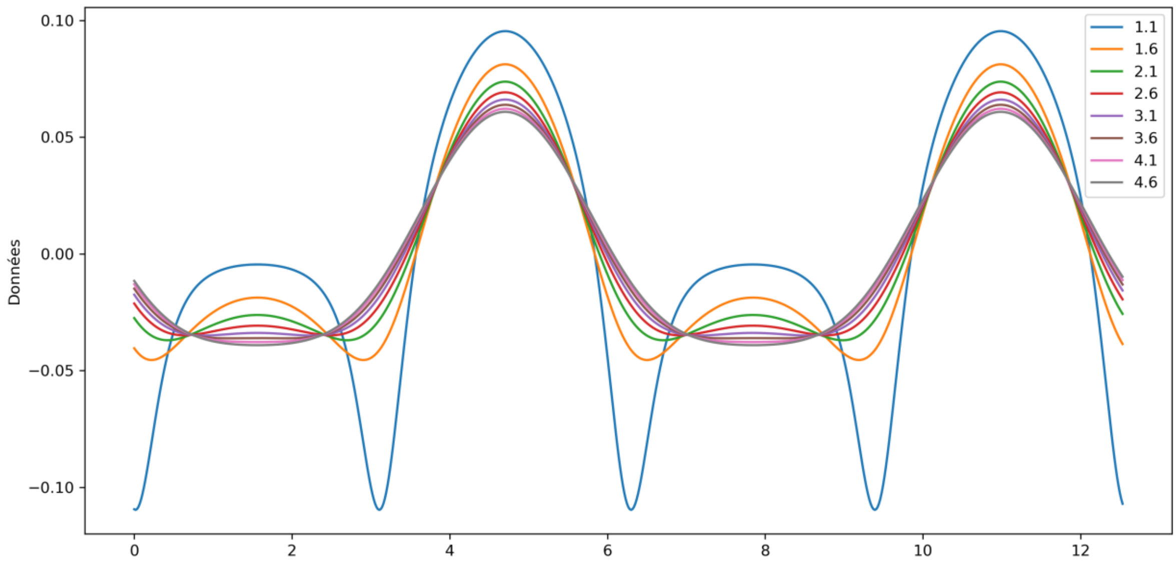
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 0 \\ -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{10} \\ L_1 \sin\theta_{10} R_{10} \\ -L_1 \cos\theta_{10} R_{10} \end{bmatrix}$$

# *Partie 2 : Résolution numérique*

Accélération A30 :




Accélérations selon la valeur de r




# *Conclusion*

**Question 6: Justifier le choix d'un rapport r aux alentours de 3 dans les moteurs**

Plus r est petit, moins le moteur est encombrant.
A partir de 3, l'accélération parasite disparaît, et qui dit accélération dit force, et donc vibrations

# *Transformée de Fourier non attendue*

Fréquence attendue de R10 : 0.16
C'est bien le premier pic visible ci-dessous.
On voit les pics suivants quand r=1.1…