

Informatique

**Systemes linéaires**

**Pivot de Gauss**

*Résumé*

Systèmes linéaires et pivot de Gauss		
Principe	<p>Système à résoudre de la forme :</p> $\begin{cases} a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t) + \dots + a_{1n}s_n(t) = b_{11}e_1(t) + b_{12}e_2(t) + \dots + b_{1m}e_m(t) \\ a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t) + \dots + a_{2n}s_n(t) = b_{21}e_1(t) + b_{22}e_2(t) + \dots + b_{2m}e_m(t) \\ \vdots \\ a_{n1}s_1(t) + a_{n2}s_2(t) + \dots + a_{nn}s_n(t) = b_{n1}e_1(t) + b_{n2}e_2(t) + \dots + b_{nm}e_m(t) \end{cases}$ <p>Avec <math>a_{ij}</math> et <math>b_{ij}</math> des coefficients constants</p> <p>Mise sous forme matricielle :</p> $K_E E(t) = K_S S(t)$ $E(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{bmatrix} ; \quad K_E = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ & \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$ $S(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{bmatrix} ; \quad K_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ <p><math>K_E E(t)</math> est connu (entrée). On cherche la sortie <math>S(t)</math>. On doit résoudre :</p> $K_S S(t) = B \quad ; \quad K_E E(t) = B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad ; \quad S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$	
Python $K \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B$	<pre>import numpy as np x,y,z = np.linalg.solve(K,B)</pre>	
Transfo	<p>Attention : Indices de 1 à n</p> <p>A la ligne <math>i \in [1, n - 1]</math> du système de matrice <math>\begin{bmatrix} a_{ii} &amp; a_{i,i+1} &amp; \dots &amp; a_{in} \\ &amp; \vdots &amp; &amp; \\ a_{ni} &amp; a_{n,i+1} &amp; \dots &amp; a_{nn} \end{bmatrix}</math> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Si <math>a_{ii} \neq 0</math> : <b>Transvection</b> = Remplacer les lignes <math>L_j, j \in [i + 1, n]</math> telles que : <math>L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} L_i</math> (modification de <math>K_S</math> ET <math>B</math>)</li> <li>- Si <math>a_{ii} = 0</math> : <ul style="list-style-type: none"> <li>○ On permute deux lignes (même système) ou deux colonnes (ie inconnues) afin d'obtenir un coefficient <math>a_{ii}</math> différent de 0 – <b>Préférer permuter des lignes afin de ne pas modifier l'ordre des inconnues et donc de simplifier la résolution.</b> On procède alors à la transvection</li> <li>○ Remarque : pour des problèmes numériques, on préfère prendre comme pivot le terme <math>a_{ii}</math> de plus grande valeur absolue. On parle de <b>pivot partiel</b></li> </ul> </li> </ul> <p>On obtient une matrice de la forme : <math>K'_S = \begin{bmatrix} a'_{11} &amp; a'_{12} &amp; \dots &amp; a'_{1n} \\ 0 &amp; a'_{22} &amp; \dots &amp; a'_{2n} \\ 0 &amp; 0 &amp; \ddots &amp; \vdots \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; a'_{nn} \end{bmatrix} ; K'_S S(t) = B'</math></p>	
Résolution	$s_i = \frac{b'_i - \sum_{k=i+1}^n a'_{i,k} s_k}{a'_{ii}}$	<p>On peut diagonaliser la matrice <math>K'_S</math> pour obtenir <math>K''_S S(t) = B''</math> en procédant à une nouvelle transformation sur les colonnes. Alors : <math>s_i = \frac{b''_i}{a''_{ii}}</math></p>