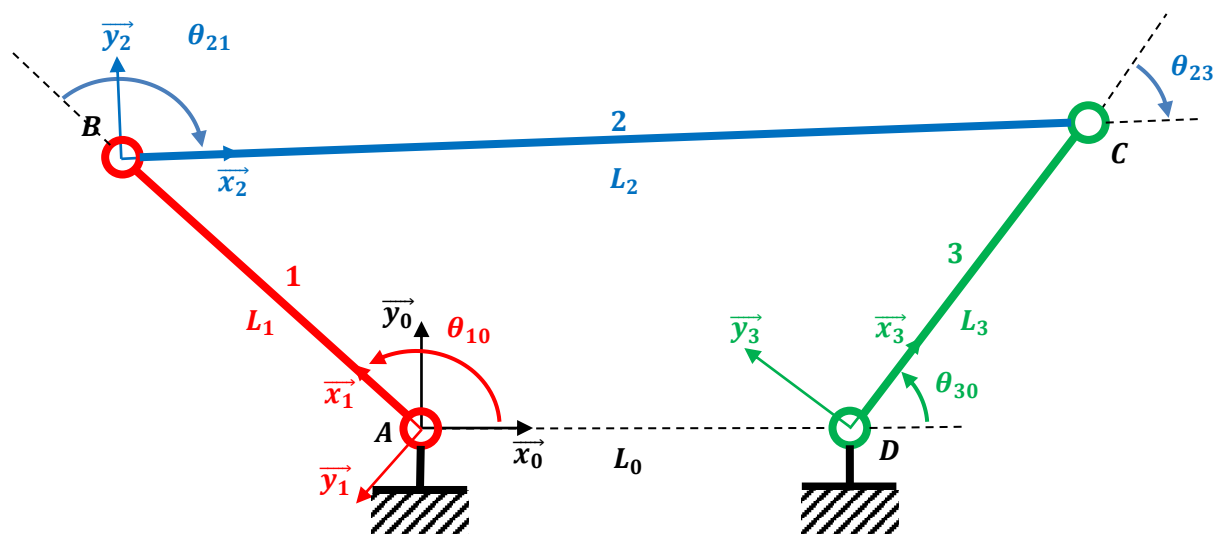


# A. Fermeture géométrique système 4 barres

<b>A. Fermeture géométrique système 4 barres .....</b>	<b>1</b>
<b>A.I. Schéma cinématique traité .....</b>	<b>2</b>
<b>A.II. Fermeture géométrique .....</b>	<b>3</b>
<b>A.III. Résolution dans le cas général .....</b>	<b>4</b>
A.III.1 Equation à résoudre .....	4
A.III.2 Résolution numérique .....	4
A.III.3 Passage à une équation du second degré .....	4
A.III.4 Cas $y = \pi$ .....	5
A.III.4.a Cas $a = c$ .....	5
A.III.4.b Cas $a \neq c$ .....	5
A.III.5 Résolution de l'équation du second degré .....	6
A.III.5.a Equation dégénérée .....	6
A.III.5.a.i Cas 1 : $B = 0$ .....	6
• Cas $a = c$ .....	6
• Cas $a \neq c$ .....	7
A.III.5.a.ii Cas 2 : $B \neq 0$ .....	8
A.III.5.b Equation non dégénérée .....	8
A.III.5.b.i Discriminant .....	8
A.III.5.b.ii Condition d'existence des solutions réelles .....	9
A.III.5.b.iii Solutions .....	9
A.III.6 Bilan de la solution générale .....	10
<b>A.IV. Résolution dans le cas particulier <math>L1 = L3 = L</math> et <math>L0 = L2 = L'</math> .....</b>	<b>11</b>
A.IV.1 Schéma cinématique simplifié .....	11
A.IV.2 Méthode générale .....	11
A.IV.3 Méthode équation .....	13
A.IV.4 Affichage des solutions .....	15
<b>A.V. Résolution dans le cas particulier <math>L0 = L2 = L1 = L3 = L</math> .....</b>	<b>16</b>
A.V.1 Schéma cinématique simplifié .....	16
A.V.2 Méthode générale .....	16
A.V.3 Méthode équation .....	17
A.V.4 Affichage des solutions .....	18

## A.I. Schéma cinématique traité



## A.II. Fermeture géométrique

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} &= \vec{0} \\ L_1 \vec{x}_1 + L_2 \vec{x}_2 - L_3 \vec{x}_3 - L_0 \vec{x}_0 &= \vec{0}\end{aligned}$$

Projection dans la base 0 pour obtenir la relation  $f(\theta_{10}, \theta_{30}) = 0$

$$\begin{cases} \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0 \\ L_1 \cos \theta_{10} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \cos \theta_{30} - L_0 = 0 \\ L_1 \sin \theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \sin \theta_{30} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\cos(\theta_{21} + \theta_{10}) &= \frac{L_3 \cos \theta_{30} + L_0 - L_1 \cos \theta_{10}}{L_2} \\ \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) &= \frac{L_3 \sin \theta_{30} - L_1 \sin \theta_{10}}{L_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta_{21} + \theta_{10}) &= \frac{(L_3 \cos \theta_{30} + L_0 - L_1 \cos \theta_{10})^2}{L_2^2} \\ \sin^2(\theta_{21} + \theta_{10}) &= \frac{(L_3 \sin \theta_{30} - L_1 \sin \theta_{10})^2}{L_2^2}\end{aligned}$$

$$\cos^2(\theta_{21} + \theta_{10}) + \sin^2(\theta_{21} + \theta_{10}) = 1$$

$$(L_3 \cos \theta_{30} + L_0 - L_1 \cos \theta_{10})^2 + (L_3 \sin \theta_{30} - L_1 \sin \theta_{10})^2 - L_2^2 = 0$$

$$\begin{aligned}L_3^2 \cos^2 \theta_{30} + 2L_3 \cos \theta_{30} (L_0 - L_1 \cos \theta_{10}) + (L_0 - L_1 \cos \theta_{10})^2 + L_3^2 \sin^2 \theta_{30} \\ - 2L_3 \sin \theta_{30} L_1 \sin \theta_{10} + L_1^2 \sin^2 \theta_{10} - L_2^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_3^2 \cos^2 \theta_{30} + 2L_3 L_0 \cos \theta_{30} - 2L_3 \cos \theta_{30} L_1 \cos \theta_{10} + L_0^2 - 2L_0 L_1 \cos \theta_{10} + L_1^2 \cos^2 \theta_{10} \\ + L_3^2 \sin^2 \theta_{30} - 2L_3 \sin \theta_{30} L_1 \sin \theta_{10} + L_1^2 \sin^2 \theta_{10} - L_2^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2L_0 L_3 \cos \theta_{30} - 2L_1 L_3 (\cos \theta_{30} \cos \theta_{10} + \sin \theta_{30} \sin \theta_{10}) - 2L_0 L_1 \cos \theta_{10} + L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 \\ = 0\end{aligned}$$

$$2L_0 (L_3 \cos \theta_{30} - L_1 \cos \theta_{10}) - 2L_1 L_3 \cos(\theta_{30} - \theta_{10}) + L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 = 0$$

Equation à résoudre issue de la projection de la fermeture géométrique dans la base 0 :

$$2L_0 (L_3 \cos \theta_{30} - L_1 \cos \theta_{10}) - 2L_1 L_3 \cos(\theta_{30} - \theta_{01}) + L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 = 0$$

Remarque : pour une relation entre 2 autres angles, on mettra en place la même équation par projection dans une base bien choisie

### A.III. Résolution dans le cas général

Merci à Roberto Pinciroli (collègue de Maths) qui m'a donné la marche à suivre ;)

#### A.III.1 Equation à résoudre

$$\begin{aligned} 2L_0(L_3 \cos \theta_{30} - L_1 \cos \theta_{10}) - 2L_1L_3 \cos(\theta_{30} + \theta_{01}) + L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 &= 0 \\ -2L_0L_1 \cos \theta_{10} + 2L_0L_3 \cos \theta_{30} - 2L_1L_3 \cos(\theta_{30} + \theta_{01}) + L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$-a \cos x + b \cos y - c \cos(y - x) + d = 0$$

$$\begin{cases} a = 2L_0L_1 \\ b = 2L_0L_3 \\ c = 2L_1L_3 \\ d = L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 \end{cases}$$

$a, b, c, d, x, y$  sont des paramètres réels et  $(L_0, L_1, L_2, L_3) > 0$ . On cherche  $y = f(x)$

#### A.III.2 Résolution numérique

Il est possible de résoudre cette équation avec une méthode de newton ou dichotomie.

#### A.III.3 Passage à une équation du second degré

Posons :  $Y = \tan \frac{y}{2}$  ;  $\cos y = \frac{1-Y^2}{1+Y^2}$  ;  $\sin y = \frac{2Y}{1+Y^2}$

Attention, on exclue la solution  $y = \pi$ , il faudra donc en premier lieu vérifier si la solution  $y = \pi$  est solution de l'équation.

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x = \frac{1 - Y^2}{1 + Y^2} \cos x + \frac{2Y}{1 + Y^2} \sin x = \frac{(1 - Y^2) \cos x + 2Y \sin x}{1 + Y^2}$$

L'équation devient :

$$\begin{aligned} -a \cos x + b \frac{1 - Y^2}{1 + Y^2} - c \frac{(1 - Y^2) \cos x + 2Y \sin x}{1 + Y^2} + d &= 0 \\ \frac{-a \cos x (1 + Y^2) + b(1 - Y^2) - c(1 - Y^2) \cos x - 2cY \sin x + d(1 + Y^2)}{1 + Y^2} &= 0 \\ (1 + Y^2) \neq 0 \Leftrightarrow 1 + Y^2 \neq 0 \Leftrightarrow Y^2 \neq -1 \text{ \& } Y \in \mathbb{R} \\ -a \cos x - a \cos x Y^2 + b - bY^2 - c \cos x + cY^2 \cos x - 2cY \sin x + d + dY^2 &= 0 \\ [(c - a) \cos x + (d - b)]Y^2 - (2c \sin x)Y + [(b + d) - (c + a) \cos x] &= 0 \end{aligned}$$

$$[(a - c) \cos x + (b - d)]Y^2 + (2c \sin x)Y + [(a + c) \cos x - (b + d)] = 0$$

$$AY^2 + BY + C = 0$$

### A.III.4 Cas $y = \pi$

Etudions le cas où  $y = \pi$  :

$$\begin{aligned}-a \cos x + b \cos y - c \cos(y - x) + d &= 0 \\ -a \cos x - b - c \cos(\pi - x) + d &= 0 \\ -a \cos x - b + c \cos(x) + d &= 0 \\ (c - a) \cos x + d - b &= 0\end{aligned}$$

Les solutions  $y = \pi$  ne peuvent exister que dans le cas :

$$(a - c) \cos x + (b - d) = 0$$

C'est-à-dire :

$$A = 0$$

solution  $y = \pi$  existe uniquement  $\Leftrightarrow$  équation du second degré dégénérée

#### A.III.4.a Cas $a = c$

L'équation devient :

$$b - d = 0$$

Tout  $x$  est solution de l'équation pour  $y = \pi$  si  $b = d$

#### A.III.4.b Cas $a \neq c$

La solution  $y = \pi$  existe si

$$\cos x = \frac{d - b}{a - c}$$

### A.III.5 Résolution de l'équation du second degré

#### A.III.5.a Equation dégénérée

$$A = [(a - c) \cos x + (b - d)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} a = c \Rightarrow b = d \\ a \neq c \text{ et } \cos x = \frac{d - b}{a - c} \Leftrightarrow x = \pm \cos^{-1} \left( \frac{d - b}{a - c} \right) \end{cases}$$

L'équation devient :

$$(2c \sin x)Y + [(a + c) \cos x - (b + d)] = 0$$

Remarques :

$$a = c \Leftrightarrow 2L_0L_1 = 2L_1L_3 \Leftrightarrow L_0 = L_3$$

$$\begin{aligned} a = c \text{ et } b = d &\Leftrightarrow L_0 = L_3 \text{ et } 2L_0L_3 = L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 \Leftrightarrow L_0 = L_3 \text{ et } 2L_0^2 \\ &= 2L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 \Leftrightarrow L_0 = L_3 \text{ et } 0 = L_1^2 - L_2^2 \Leftrightarrow L_0 = L_3 \text{ et } L_1 = L_2 \end{aligned}$$

#### A.III.5.a.i Cas 1 : $B = 0$

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \Leftrightarrow 2c \sin x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= 0 \quad (c \neq 0) \\ \Leftrightarrow x &= 0 \text{ ou } x = \pi \end{aligned}$$

L'équation devient :

$$[(a + c) \cos x - (b + d)] = 0$$

Alors, la solution est :  $\forall y \neq \pi$  si

$$\begin{aligned} C &= (a + c) \cos x - (b + d) = 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{b + d}{a + c} \end{aligned}$$

Pour que ce soit possible, comme  $x = 0$  ou  $x = \pi$ , il faut forcément :

$$\begin{aligned} \cos x &= \pm 1 \Leftrightarrow \frac{b + d}{a + c} = \pm 1 \\ \Leftrightarrow b + d &= \pm(a + c) \end{aligned}$$

#### • Cas $a = c$

Remarque : Si  $a = c$ , alors  $b = d$ , d'où

$$\begin{aligned} 2b &= \pm 2a \\ b &= a \end{aligned}$$

Donc, si  $a = c$ , la condition pour que tout  $y$  soit solution est  $a = b = c \Leftrightarrow L_0 = L_1 = L_3$ , ce qui donne  $a = b = c = d \Leftrightarrow L_0 = L_1 = L_2 = L_3$

Et on a :

$$\cos x = \frac{b + d}{a + c} = 1; x = 0$$

• Cas  $a \neq c$

Si  $a \neq c$ ,  $\cos x = \frac{d-b}{a-c}$ , soit là aussi la condition :

$$\frac{d-b}{a-c} = \pm 1$$

$$d-b = \pm (a-c)$$

Soit :

$$\begin{cases} b+d = +(a+c) \\ d-b = +(a-c) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b+d = -(a+c) \\ d-b = -(a-c) \end{cases}$$

Attention, soit c'est tout plus, soit c'est tout moins

$$\begin{cases} b+d = (a+c) \\ b-d = -(a-c) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b+d = -(a+c) \\ b-d = (a-c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = (a+c) - (a-c) \\ b-d = -(a-c) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2b = -(a+c) + (a-c) \\ b-d = (a-c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = 2c \\ b-d = -(a-c) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2b = -2c \\ b-d = (a-c) \end{cases}$$

Or,  $(a, b) > 0$ , C'est donc uniquement le cas  $\cos x = 1$ ;  $x = 0$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} b = c \\ c-d = -a+c \end{cases} \\ & \begin{cases} b = c \\ d = a \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2L_0L_3 = 2L_1L_3 \\ L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 = 2L_0L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} L_0 = L_1 \\ 2L_0^2 - L_2^2 + L_3^2 = 2L_0^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} L_0 = L_1 \\ L_2 = L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Soit la condition :

$$\begin{cases} b = c \\ d = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_0 = L_1 \\ L_2 = L_3 \end{cases}$$

### A.III.5.a.ii Cas 2 : $B \neq 0$

$$B \neq 0 \\ \Leftrightarrow \sin x \neq 0$$

$$Y = - \left[ \frac{(a+c) \cos x - (b+d)}{2c \sin x} \right]$$

$$y = 2 \tan^{-1} \left[ - \left[ \frac{(a+c) \cos x - (b+d)}{2c \sin x} \right] \right] + 2k\pi$$

$$y = -2 \tan^{-1} \left[ \frac{(a+c) \cos x - (b+d)}{2c \sin x} \right] + 2k\pi$$

### A.III.5.b Equation non dégénérée

$$[(a-c) \cos x + (b-d)] \neq 0 \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} a = c \Rightarrow b \neq d \\ a \neq c \text{ et } \cos x \neq \frac{d-b}{a-c} \end{cases}$$

$$[(a-c) \cos x + (b-d)]Y^2 + (2c \sin x)Y + [(a+c) \cos x - (b+d)] = 0$$

### A.III.5.b.i Discriminant

$$\Delta_y = 4c^2 \sin^2 x - 4[(a-c) \cos x + (b-d)][(a+c) \cos x - (b+d)]$$

$$\Delta_y = 4[c^2 \sin^2 x - [(a-c) \cos x (a+c) \cos x - (a-c) \cos x (b+d) + (b-d)(a+c) \cos x - (b-d)(b+d)]]$$

$$\Delta_y = 4[c^2 \sin^2 x - [(a^2 - c^2) \cos^2 x + \cos x [(b-d)(a+c) - (a-c)(b+d)] - b^2 + d^2]]$$

$$\Delta_y = 4[c^2 \sin^2 x - [(a^2 - c^2) \cos^2 x + \cos x [ab + bc - ad - cd - (ab + ad - bc - cd)] - b^2 + d^2]]$$

$$\Delta_y = 4[c^2 \sin^2 x - [a^2 \cos^2 x - c^2 \cos^2 x + 2 \cos x (bc - ad) - b^2 + d^2]]$$

$$\Delta_y = 4(c^2 \sin^2 x - a^2 \cos^2 x + c^2 \cos^2 x - 2 \cos x (bc - ad) + b^2 - d^2)$$

$$\Delta_y = 4(-a^2 \cos^2 x - 2(bc - ad) \cos x + b^2 + c^2 - d^2)$$



### A.III.5.b.ii Condition d'existence des solutions réelles

$$\Delta_y \geq 0$$

$$-a^2 \cos^2 x - 2(bc - ad) \cos x + b^2 + c^2 - d^2 \geq 0$$

Posons  $X = \cos x$

$$-a^2 X^2 - 2(bc - ad)X + b^2 + c^2 - d^2 \geq 0$$

$$\Delta_x = 4[(bc - ad)^2 + a^2(b^2 + c^2 - d^2)]$$

$$X_{\pm} = \frac{bc - ad \pm \sqrt{(bc - ad)^2 + a^2(b^2 + c^2 - d^2)}}{-a^2}$$

$$X_{\pm} = \frac{ad - bc \pm \sqrt{(bc - ad)^2 + a^2(b^2 + c^2 - d^2)}}{a^2}$$

Il faut :

$$\begin{aligned} X_- \leq X \leq X_+ \\ \frac{ad - bc - \sqrt{(bc - ad)^2 + a^2(b^2 + c^2 - d^2)}}{a^2} \leq \cos x \leq \frac{ad - bc + \sqrt{(bc - ad)^2 + a^2(b^2 + c^2 - d^2)}}{a^2} \end{aligned}$$

### A.III.5.b.iii Solutions

$$Y_{\pm} = \frac{-2c \sin x \pm \sqrt{4(b^2 + c^2 - d^2 - 2(bc - ad) \cos x - a^2 \cos^2 x)}}{2[(a - c) \cos x + (b - d)]}$$

$$Y_{\pm} = \frac{-c \sin x \pm \sqrt{b^2 + c^2 - d^2 - 2(bc - ad) \cos x - a^2 \cos^2 x}}{(a - c) \cos x + (b - d)}$$

$$y = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-c \sin x \pm \sqrt{b^2 + c^2 - d^2 - 2(bc - ad) \cos x - a^2 \cos^2 x}}{(a - c) \cos x + (b - d)} \right] + 2k\pi$$

### A.III.6 Bilan de la solution générale

$$\begin{aligned}
 & -a \cos x + b \cos y - c \cos(y - x) + d = 0 \\
 & \begin{cases} a = 2L_0L_1 \\ b = 2L_0L_3 \\ c = 2L_1L_3 \\ d = L_0^2 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 \end{cases} \\
 & [(a - c) \cos x + (b - d)]Y^2 + (2c \sin x)Y + [(a + c) \cos x - (b + d)] = 0 \\
 & Y = \tan \frac{y}{2}
 \end{aligned}$$

$a = c$ $L_0 = L_3$	$b = d$ $L_1 = L_2$	$\forall x$		$y = -2 \tan^{-1} \left[ \frac{(a + c) \cos x - (b + d)}{2c \sin x} \right] + 2k\pi$	
		$\forall x$		$y = \pi + 2k\pi$	
		$a = b = c = d$ $L_0 = L_1 = L_2 = L_3$	$x = 0$	$\forall y \neq \pi$	
	$b \neq d$	$X_- = \frac{ad - bc - \sqrt{(bc - ad)^2 + a^2(b^2 + c^2 - d^2)}}{a^2}$ $X_+ = \frac{ad - bc + \sqrt{(bc - ad)^2 + a^2(b^2 + c^2 - d^2)}}{a^2}$ $X_- \leq \cos x \leq X_+$ $y = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-c \sin x \pm \sqrt{b^2 + c^2 - d^2 - 2(bc - ad) \cos x - a^2 \cos^2 x}}{(a - c) \cos x + (b - d)} \right] + 2k\pi$ $\forall x / \cos x \in [X_-, X_+]$			
$a \neq c$ $L_0 \neq L_3$	$\cos x \neq \frac{d - b}{a - c}$	$x = \pm \cos^{-1} \left( \frac{d - b}{a - c} \right)$	$\begin{cases} b = c \\ a = d \\ L_0 = L_1 \\ L_2 = L_3 \end{cases}$	$x = 0$	$\forall y \neq \pi$
			$\sin x \neq 0$	$y = -2 \tan^{-1} \left[ \frac{(a + c) \cos x - (b + d)}{2c \sin x} \right] + 2k\pi$ <i>Prolongement de la solution générale de l'une de ses 2 solutions</i>	
			$y = \pi + 2k\pi$ <i>Prolongement de la solution générale de l'autre de ses 2 solutions</i>		

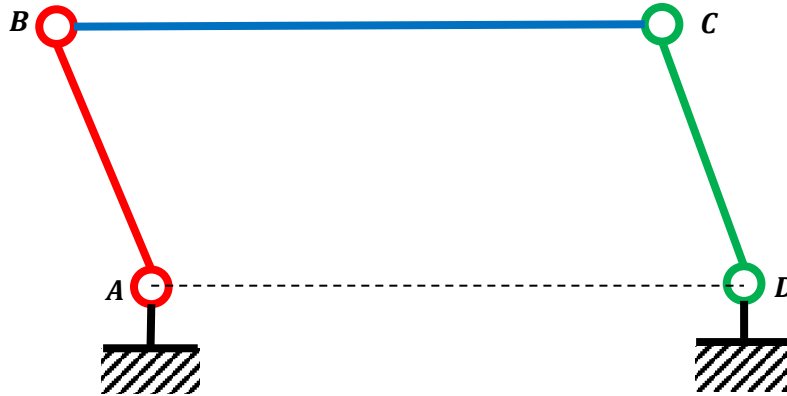
On pourra consulter le modèle SolidWorks et le fichier Excel qui trace ces solutions afin de se convaincre de leur justesse ;)

Seuls les 2 prolongements de la solution générale ne sont pas pris en compte (si par hasard on passe par la valeur de x associée, un point sera faux, mais ça se voit bien !)

J'ajoute une annexe en fin de document avec une démonstration différente proposée par un collègue en 2024.

#### A.IV. Résolution dans le cas particulier $L_1 = L_3 = L$ et $L_0 = L_2 = L'$

##### A.IV.1 Schéma cinématique simplifié



##### A.IV.2 Méthode générale

$$-a \cos x + b \cos y - c \cos(y - x) + d = 0$$

$$\begin{cases} a = 2L'L \\ b = 2L'L \\ c = 2L^2 \\ d = L'^2 + L^2 - L'^2 + L^2 = 2L^2 \end{cases}$$

$$\frac{d-b}{a-c} = \frac{2L^2 - 2LL'}{2LL' - 2L^2} = -1$$

$a \neq c$ $L_0 \neq L_3$	$\cos x \neq -1$	$X_- = \frac{2LL'2L^2 - 2LL'2L^2 - \sqrt{(2LL'2L^2 - 2LL'2L^2)^2 + 4L^2L'^2(4L^2L'^2 + 4L^4 - 4L^4)}}{4L^2L'^2} = -1$ $X_+ = \frac{2LL'2L^2 - 2LL'2L^2 + \sqrt{(2LL'2L^2 - 2LL'2L^2)^2 + 4L^2L'^2(4L^2L'^2 + 4L^4 - 4L^4)}}{4L^2L'^2} = 1$ $y = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-2L^2 \sin x \pm \sqrt{4L^2L'^2 + 4L^4 - 4L^4 - 2(2LL'2L^2 - 2LL'2L^2) \cos x - 4L^2L'^2 \cos^2 x}}{(2LL' - 2L^2) \cos x + (2LL' - 2L^2)} \right] + 2k\pi$ $y = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-2L^2 \sin x \pm \sqrt{4L^2L'^2(1 - \cos^2 x)}}{(2LL' - 2L^2) \cos x + (2LL' - 2L^2)} \right] + 2k\pi$ $y = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-2L \sin x \pm 2L' \sqrt{\sin^2 x}}{2(L' - L) \cos x + 2(L' - L)} \right] + 2k\pi$ $y = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-L \sin x \pm L'  \sin x }{(L' - L)(1 + \cos x)} \right] + 2k\pi$ $y = \begin{cases} 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-L \sin x + L' \sin x}{(L' - L)(1 + \cos x)} \right] + 2k\pi \\ 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-L \sin x - L' \sin x}{(L' - L)(1 + \cos x)} \right] + 2k\pi \end{cases}$
------------------------------	------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

		$y = \begin{cases} 2 \tan^{-1} \left[ \frac{\sin x}{1 + \cos x} \frac{L - L'}{L - L'} \right] + 2k\pi \\ 2 \tan^{-1} \left[ \frac{\sin x}{1 + \cos x} \frac{L + L'}{L - L'} \right] + 2k\pi \end{cases}$ $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin \left( 2 \frac{x}{2} \right)}{1 + \cos \left( 2 \frac{x}{2} \right)} = \frac{2 \sin \left( \frac{x}{2} \right) \cos \left( \frac{x}{2} \right)}{1 + 2 \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) - 1} = \frac{\sin \left( \frac{x}{2} \right)}{\cos \left( \frac{x}{2} \right)} = \tan \frac{x}{2}$ $y = \begin{cases} 2 \tan^{-1} \left[ \tan \frac{x}{2} \right] + 2k\pi \\ 2 \tan^{-1} \left[ \tan \frac{x}{2} \frac{L + L'}{L - L'} \right] + 2k\pi \end{cases}$ $y = \begin{cases} x + 2k\pi \\ 2 \tan^{-1} \left[ \frac{L + L'}{L - L'} \tan \frac{x}{2} \right] + 2k\pi \end{cases}$ $\forall x / \cos x \in [X_-, X_+]$	
	$\cos x = -1$	$x = \pm \pi$	$y = \pi + 2k\pi$ <i>Prolongement de la solution générale de l'autre de ses 2 solutions</i>

### A.IV.3 Méthode équation

$$L'(\cos \theta_{30} - \cos \theta_{10}) + L[1 - \cos(\theta_{30} - \theta_{10})] = 0$$

$$\theta_{30} = y \quad ; \quad \theta_{10} = x$$

$$L'(\cos y - \cos x) + L[1 - \cos(y - x)] = 0$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$1 - \cos(y - x) = \cos(0) - \cos(y - x) = 2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{y-x}{2} = 2 \sin^2 \frac{y-x}{2}$$

$$-2L' \sin \frac{y+x}{2} \sin \frac{y-x}{2} + 2L \sin^2 \frac{y-x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{y-x}{2} \left[ -L' \sin \frac{y+x}{2} + L \sin \frac{y-x}{2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{y-x}{2} = 0 \\ -L' \sin \frac{y+x}{2} + L \sin \frac{y-x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-x}{2} = k\pi \\ -L' \left( \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} \right) + L \left( \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ -L' \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - L' \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} + L \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - L \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ (L - L') \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - (L + L') \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \left\{ \begin{array}{l} L = L' \Rightarrow \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{x}{2} = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \frac{(L - L') \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - (L + L') \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}} = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$x = \pi \Rightarrow (L - L') \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - (L + L') \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \pi$$

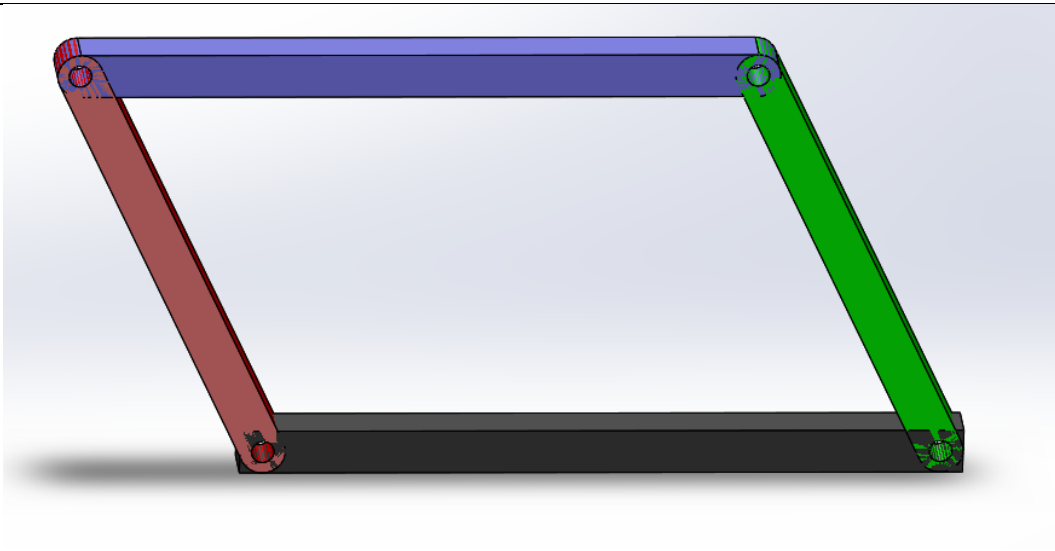
$$y = \pi \Rightarrow (L - L') \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - (L + L') \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi$$

$$\Leftrightarrow (x = \pi \Leftrightarrow y = \pi) \Leftrightarrow (x \neq \pi \Leftrightarrow y \neq \pi)$$

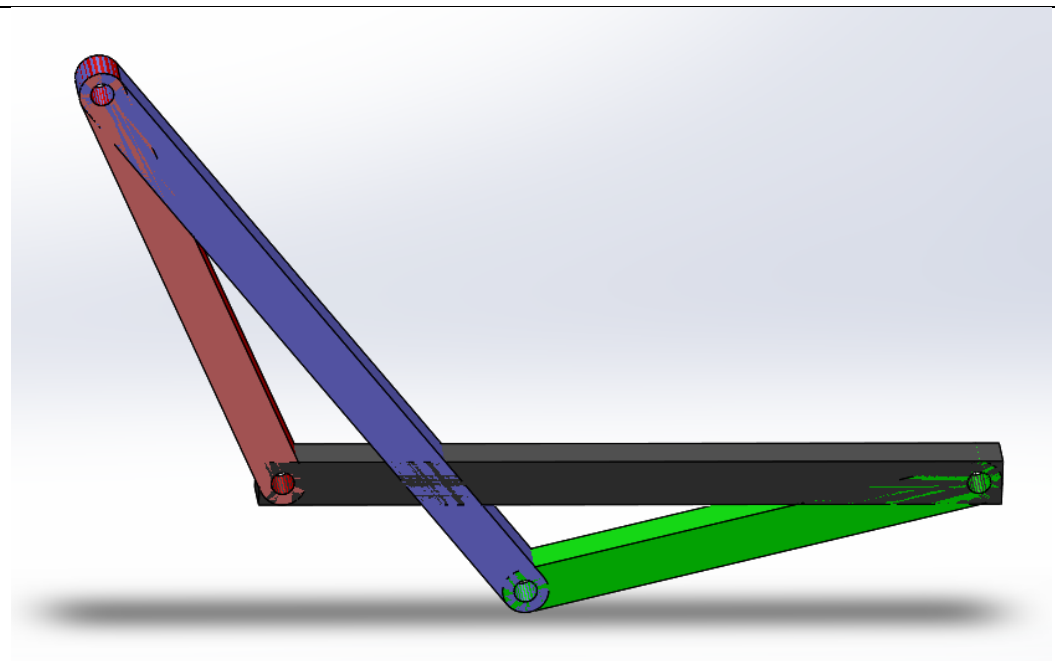
$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x + 2k\pi \\ L = L' \Rightarrow \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{x}{2} = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \frac{(L - L') \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - (L + L') \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}} = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x + 2k\pi \\ L = L' \Rightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \frac{(L - L') \sin \frac{y}{2}}{\cos \frac{y}{2}} - \frac{(L + L') \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x + 2k\pi \\ L = L' \Rightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \begin{cases} x = y = \pi + 2k\pi \\ (L - L') \tan \frac{y}{2} - (L + L') \tan \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{y}{2} = \frac{L + L'}{L - L'} \tan \frac{x}{2} \end{cases} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x + 2k\pi \\ L = L' \Rightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \begin{cases} x = y = \pi + 2k\pi \\ \frac{y}{2} = \tan^{-1} \left[ \frac{L + L'}{L - L'} \tan \frac{x}{2} \right] + k\pi \end{cases} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x + 2k\pi \\ L = L' \Rightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \begin{cases} x = y = \pi + 2k\pi \\ y = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{L + L'}{L - L'} \tan \frac{x}{2} \right] + 2k\pi \end{cases} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

#### A.IV.4 Affichage des solutions

$$y = x + 2k\pi$$

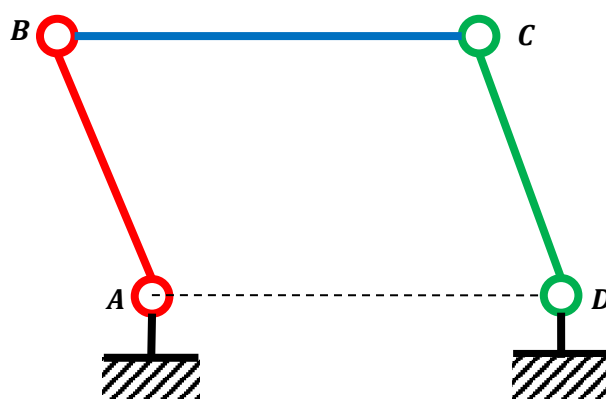


$$y = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{L + L'}{L - L'} \tan \frac{x}{2} \right]$$



## A.V. Résolution dans le cas particulier $L_0 = L_2 = L_1 = L_3 = L$

### A.V.1 Schéma cinématique simplifié



### A.V.2 Méthode générale

$$-a \cos x + b \cos y - c \cos(y - x) + d = 0$$

$$\begin{cases} a = 2L^2 \\ b = 2L^2 \\ c = 2L^2 \\ d = 2L^2 \end{cases}$$

$$a = b = c = d$$

$a = c$ $L_0 = L_3$	$b = d$ $L_1 = L_2$	$\forall x$		$y = -2 \tan^{-1} \left[ \frac{(a + c) \cos x - (b + d)}{2c \sin x} \right] + 2k\pi$ $y = -2 \tan^{-1} \left[ \frac{4L^2 \cos x - 4L^2}{4L^2 \sin x} \right] + 2k\pi$ $y = -2 \tan^{-1} \left[ \frac{\cos x - 1}{\sin x} \right] + 2k\pi$ $\frac{\cos x - 1}{\sin x} = \frac{\cos\left(2\frac{x}{2}\right) - 1}{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ $= -\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = -\tan\frac{x}{2}$ $y = -2 \tan^{-1} \left[ -\tan\frac{x}{2} \right] + 2k\pi$ $y = 2 \tan^{-1} \left[ \tan\frac{x}{2} \right] + 2k\pi$ $y = x + 2k\pi \quad \text{cqfd}$
		$\forall x$		$y = \pi + 2k\pi$
		$a = b = c = d$ $L_0 = L_1 = L_2 = L_3$	$x = 0$	$\forall y \neq \pi$



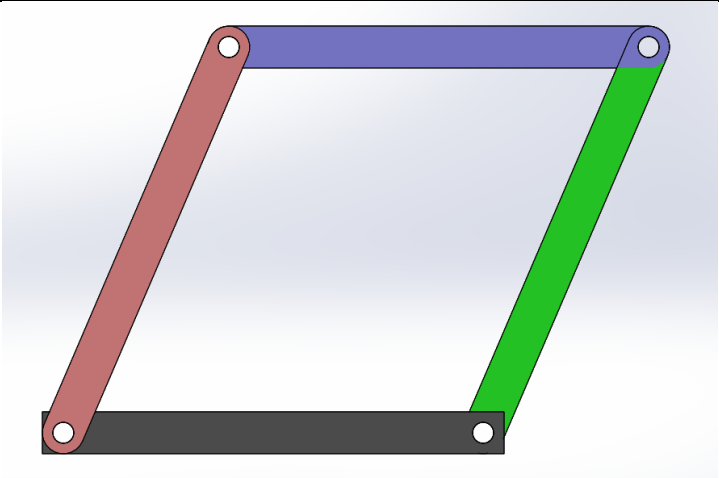
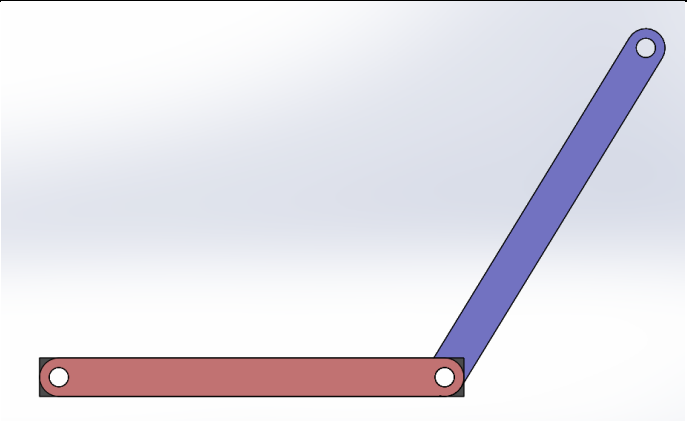
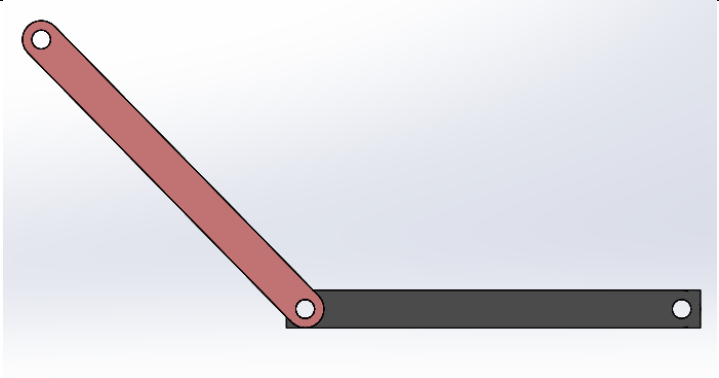
### A.V.3 Méthode équation

$$1 + \cos \theta_{30} = \cos \theta_{10} + \cos(\theta_{30} - \theta_{10})$$

Appelons :

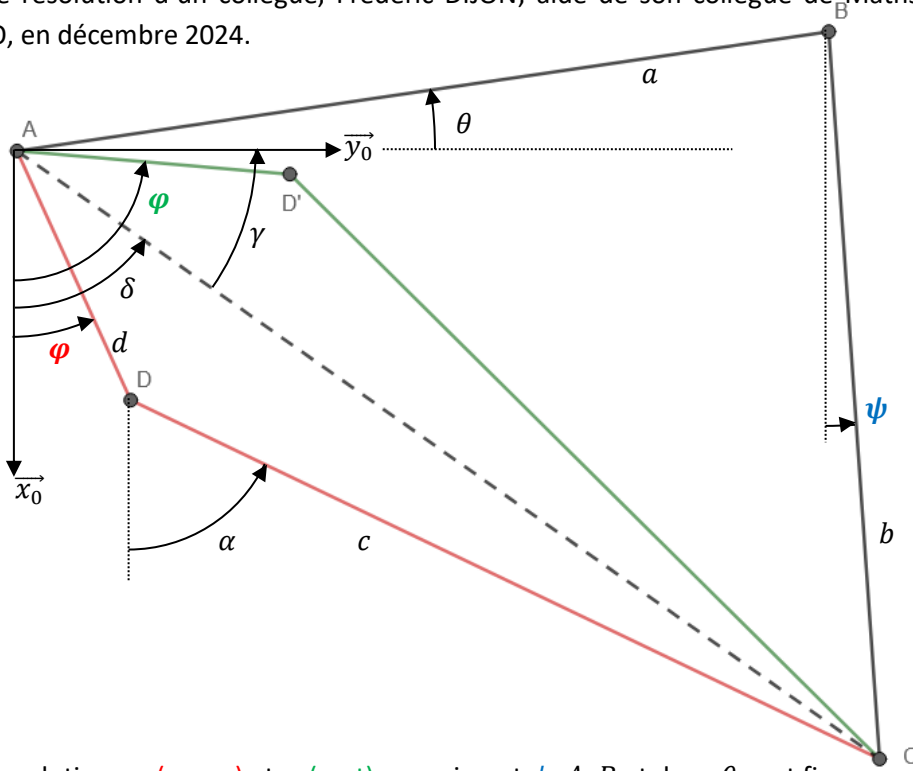
$$\begin{aligned}\theta_{30} &= y \quad ; \quad \theta_{10} = x \\ 1 + \cos y &= \cos x + \cos(y - x) \\ 1 + \cos y &= 2 \cos^2 \frac{y}{2} \\ \cos x + \cos(y - x) &= 2 \cos \frac{y}{2} \cos \left(x - \frac{y}{2}\right) \\ 1 + \cos y &= \cos x + \cos(y - x) \\ 2 \cos^2 \frac{y}{2} &= 2 \cos \frac{y}{2} \cos \left(x - \frac{y}{2}\right) \\ \cos \frac{y}{2} \cos \left(x - \frac{y}{2}\right) - \cos^2 \frac{y}{2} &= 0 \\ \cos \frac{y}{2} \left[ \cos \left(x - \frac{y}{2}\right) - \cos \frac{y}{2} \right] &= 0 \\ \begin{cases} \cos \frac{y}{2} = 0 \\ \cos \left(x - \frac{y}{2}\right) = \cos \frac{y}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \frac{y}{2} = \pm \frac{y}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ 2x - y = \pm y + 4k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ 2x = y \pm y + 4k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ 2x = 2y + 4k\pi \\ 2x = 0 + 4k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = y + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases}\end{aligned}$$

#### A.V.4 Affichage des solutions

$x = y + 2k\pi$

$x = 0 + 2k\pi$

$y = \pi + 2k\pi$


## ANNEXE

Proposition de résolution d'un collègue, Frédéric DIJON, aidé de son collègue de Maths Salvatore TUMMARELLO, en décembre 2024.



On cherche les solutions  $\varphi$  (rouge) et  $\varphi$  (vert) connaissant  $\psi$ .  $A$ ,  $B$  et donc  $\theta$  sont fixes.

Deux angles sont définis pour les calculs :  $\delta = (\vec{x}_0, \vec{AC})$  et  $\gamma = (\vec{AC}, \vec{y}_0)$  avec  $\delta + \gamma = \frac{\pi}{2}$

Nous avons deux configurations possibles :  $ABCD$  ( $\varphi$ ) &  $ABCD'$  ( $\varphi$ ).

Par fermeture géométrique, on obtient :

$$\begin{cases} a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \psi - c \cdot \sin \alpha - d \cdot \sin \varphi = 0 \\ a \cdot \sin \theta - b \cdot \cos \psi + c \cdot \cos \alpha + d \cdot \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= (-a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \psi - d \cdot \cos \varphi)^2 + (a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \psi - d \cdot \sin \varphi)^2 \\ &= a^2 + b^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta \cos \psi - 2 \cdot b \cdot d \cdot \cos \psi \cos \varphi + 2 \cdot a \cdot d \cdot \sin \theta \cos \varphi + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \theta \sin \psi \\ &\quad - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \theta \sin \varphi - 2 \cdot b \cdot d \cdot \sin \psi \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + d^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(\psi - \theta) \\ &\quad - 2 \cdot d \cdot [(a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \psi) \cdot \sin \varphi + (-a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \psi) \cdot \cos \varphi] \end{aligned}$$

On pose  $\gamma$ , angle introduit sur le schéma, vérifiant :

$$\cos \gamma = \frac{a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \psi}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(\psi - \theta)}} \quad ; \quad \sin \gamma = \frac{-a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \psi}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(\psi - \theta)}}$$

Donc :

$$c^2 = a^2 + b^2 + d^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(\psi - \theta) - 2 \cdot d \cdot \sin(\varphi + \gamma) \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(\psi - \theta)}$$

$$\sin(\varphi + \gamma) = \frac{a^2 + b^2 + d^2 - c^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(\psi - \theta)}{2 \cdot d \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(\psi - \theta)}}$$

Pour la configuration  $ABCD$ , nous avons finalement :

$$\varphi = \operatorname{Arcsin} \left[ \frac{a^2 + b^2 + d^2 - c^2 + 2.a.b.\sin(\psi - \theta)}{2.d.\sqrt{a^2 + b^2 + 2.a.b.\sin(\psi - \theta)}} \right] - \operatorname{Arg}(a.\cos \theta + b.\sin \psi, -a.\sin \theta + b.\cos \psi) [2\pi]$$

D'autre part, nous pouvons démontrer facilement que  $D$  et  $D'$  sont symétriques par rapport à  $(AC)$  (car  $D$  et  $D'$  sont équidistants de  $A$  et  $C$ ) donc la droite  $(AC)$  est bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD'})$ . Il vient donc que :

$$\begin{aligned} \varphi + \varphi' &= 2.\delta [2\pi] \\ \varphi + \varphi' &= 2.\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \pi - 2.\gamma \\ \varphi' &= \pi - 2.\gamma - \varphi \end{aligned}$$

Pour finir, concernant la configuration  $ABCD'$ , nous avons :

$$\varphi' = \pi - \operatorname{Arcsin} \left[ \frac{a^2 + b^2 + d^2 - c^2 + 2.a.b.\sin(\psi - \theta)}{2.d.\sqrt{a^2 + b^2 + 2.a.b.\sin(\psi - \theta)}} \right] - \operatorname{Arg}(a.\cos \theta + b.\sin \psi, -a.\sin \theta + b.\cos \psi) [2\pi]$$