

Utilisation du filtre de Kalman

Florian MAETZ - *Relecture de Ludovic CHAMOIN*

Édité le
17/01/2025

école
normale
supérieure
paris-saclay

Cette ressource est issue d'un travail personnel de Florian Mitez, doctorant en 2^{ème} année de thèse au sein de l'université Paris Saclay. Ce texte a été relu par Ludovic Chamoin, enseignant chercheur au LMPS, responsable de l'équipe STAN.

Pour connaître l'état d'un système, on peut envisager de l'instrumenter avec un ensemble de capteurs. Cependant, il est souvent difficile d'installer des capteurs pour mesurer toutes les grandeurs d'intérêt. De plus, les données fournies par ces capteurs sont souvent entachées d'erreurs dues aux incertitudes liées au bruit de mesure. Le filtre de Kalman propose une solution à ces problèmes en offrant une méthode d'estimation d'état à partir de mesures partielles et bruitées. La Figure 1 illustre ce processus : les données bruitées de position, représentées en vert, sont traitées par le filtre de Kalman pour estimer une position, affichée en orange, que l'on compare à la trajectoire réelle, représentée en bleu.

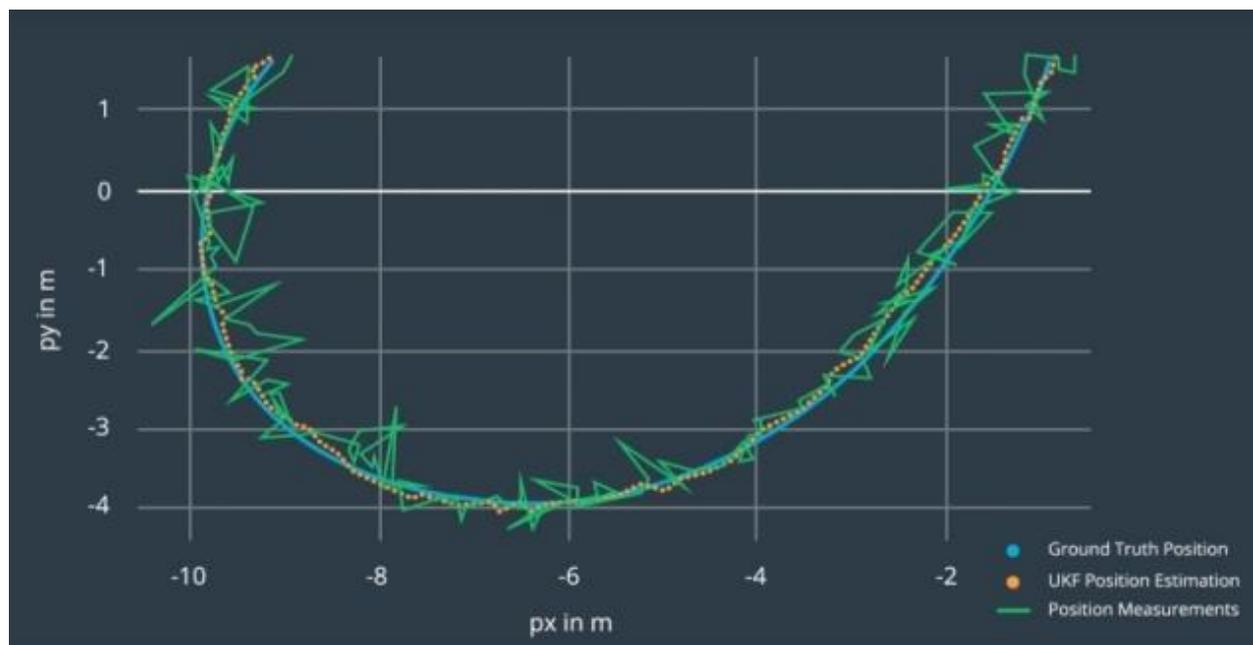


Figure 1 : Utilisation de filtre de Kalman pour estimer une trajectoire à partir de mesures de positions bruitées

Cette ressource présente une initiation aux filtres de Kalman appliqués à un système dynamique. Elle offre un contexte théorique ainsi qu'un contexte pratique avec l'utilisation d'un notebook Jupyter pour expérimenter l'utilisation du filtre de Kalman sur un oscillateur harmonique amorti.

1 - Introduction

Le filtre de Kalman, du nom de son inventeur le mathématicien et ingénieur Rudolf E. Kalman, a été développé dans les années 1960 en tant qu'outil puissant dans le domaine de l'estimation d'état et du traitement de données. Son invention résulte de la nécessité de résoudre des problèmes de navigation et de contrôle dans le contexte du programme spatial américain.

Rudolf E. Kalman a présenté pour la première fois le filtre éponyme dans un article intitulé "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems" en 1960 [1]. Ce filtre s'est rapidement imposé comme une méthode de référence pour résoudre des problèmes d'estimation d'état dans des systèmes dynamiques sujets à des bruits et des incertitudes, à partir de mesures partielles sur le système.

Le filtre de Kalman trouve une large application dans des domaines variés tels que :

- **La navigation inertielle** : Le filtre de Kalman est largement utilisé dans la navigation inertielle des avions, des navires et des véhicules spatiaux. En combinant les mesures des capteurs inertiels avec les modèles de mouvement du véhicule, le filtre de Kalman peut estimer avec précision la position, la vitesse et l'orientation, même en l'absence de signaux de navigation externes.
- **Le traitement du signal** : Dans ce domaine le filtre de Kalman est utilisé pour estimer des signaux dans des environnements bruités. Il est particulièrement utile pour la détection et la poursuite d'objets dans des systèmes radar et sonar.
- **La télédétection** : Dans ce domaine le filtre de Kalman est appliqué pour estimer des paramètres environnementaux, tels que la température de surface, la concentration de gaz, et d'autres variables, à partir de données recueillies par des capteurs à distance.
- **Le contrôle-santé de structures (Structural Health Monitoring-SHM)** : Le filtre de Kalman est également utilisé pour surveiller l'état de structures tels que des ponts ou des bâtiments. Il permet alors d'estimer leurs états en condition réelle sans interruption de leurs fonctionnements pour mettre en place des expérimentations [2].

2 - Un filtre de Kalman, comment ça marche ?

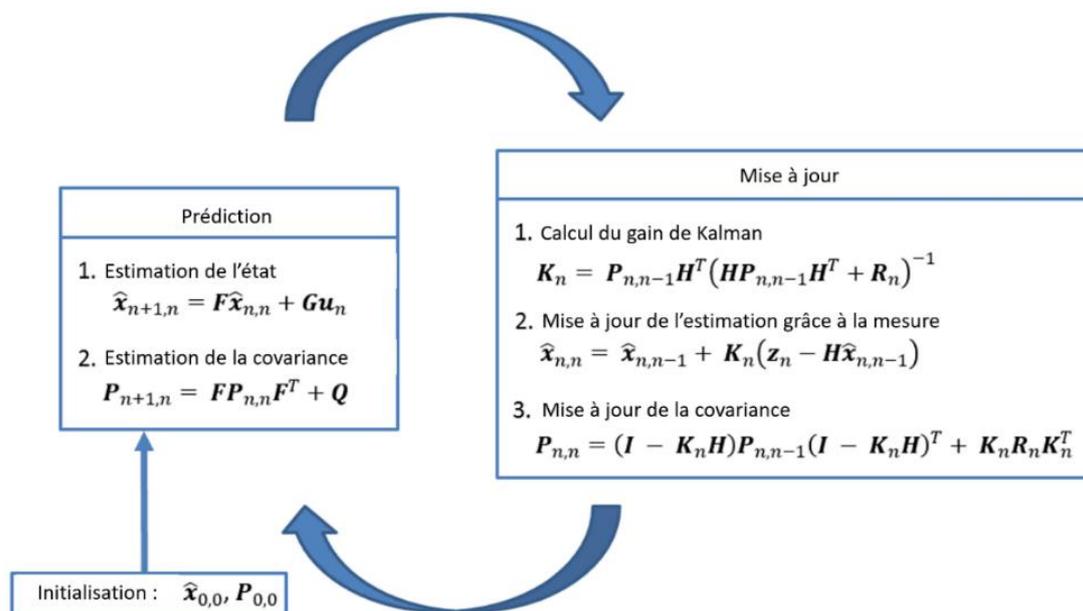


Figure 2 : Schéma Filtre de Kalman

Un filtre de Kalman est un algorithme de traitement du signal et d'estimation qui est utilisé pour estimer l'état d'un système dynamique en présence de bruit. Techniquement, le filtre de Kalman est basé sur des principes de probabilité et d'optimisation en supposant uniquement des erreurs gaussiennes sans biais. Il opère en deux phases principales : la prédiction et la mise à jour. L'algorithme initialement proposé en 1960 procède à ces deux phases en se basant sur les équations suivantes qui sont supposées linéaires :

Equation d'évolution : $x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon$

- x_n : Vecteur d'état du système à un instant n
- f : Fonction linéaire décrivant l'évolution du système par un modèle, de matrice associée F
- ε : Bruit gaussien lié au processus, de covariance Q

Equation d'observation : $z_n = Hx_n + r$

- z_n : Vecteur de mesures effectués sur le système à un instant n
- H : Opérateur linéaire projetant l'espace d'état sur l'espace de mesures
- r : Bruit gaussien lié à la mesure, de covariance R

À partir de ces équations Kalman propose alors les processus suivants :

1. Phase de prédiction :

1. **Équations de prédiction :** À chaque étape de prédiction, le filtre utilise le modèle dynamique du système pour estimer l'état futur. Cela se fait en utilisant les équations de prédiction du système, qui intègrent les informations du modèle de mouvement du système.

$$x_{\{n+1,n\}} = f(x_{\{n,n\}})$$

2. **Covariance de prédiction (P) :** En parallèle, le filtre estime également la covariance de prédiction (P), qui représente l'incertitude associée à la prédiction de l'état du système. Cette covariance évolue en fonction du modèle de mouvement du système et de la covariance du bruit de processus (Q).

$$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T + Q$$

2. Phase de mise à Jour :

1. **Mesures et innovation :** Lorsque de nouvelles mesures sont disponibles, le filtre compare les prédictions du modèle avec les observations réelles. La différence entre la prédiction du modèle et la mesure réelle est appelée innovation.

$$(z_n - Hx_{n,n-1})$$

2. **Gain de Kalman :** Le gain de Kalman, calculé à partir de la covariance de prédiction et de la covariance du bruit de mesure (R), détermine la pondération entre la prédiction du modèle et la nouvelle mesure. Il est ajusté pour minimiser l'erreur estimée.

$$K_n = P_{n,n-1}H^T(HP_{n,n-1}H^T + R_n)^{-1}$$

3. **Correction de l'estimation :** Le filtre combine la prédiction du modèle avec la mesure réelle en utilisant le gain de Kalman pour obtenir une estimation mise à jour de l'état du système. Cette étape réduit l'erreur estimée en tenant compte à la fois de la prédiction du modèle et des mesures réelles.

$$x_{n,n} = x_{n,n-1} + K_n(z_n - Hx_{n,n-1})$$

$$P_{n,n} = (I - K_nH)P_{n,n-1}(I - K_nH)^T + K_nR_nK_n^T$$

On pourra remarquer dans les équations ci-dessus que : $\lim_{K_n \rightarrow 0} x_{n,n} \rightarrow x_{n,n-1}$. L'innovation n'est plus prise en compte. La confiance accordée au modèle devient prédominante dans le processus d'estimation et on néglige les mesures effectuées.

Tandis que le contraire arrive pour : $\lim_{K_n \rightarrow H^{-1}} x_{n,n} \rightarrow H^{-1}z_n$. La confiance accordée au modèle devient négligeable et les mesures prédominent dans l'estimation.

Notations :

- $x_{n,n-1}$: Estimation a priori de l'état au temps n basée sur l'information disponible jusqu'au temps n-1 ;
- $P_{n,n-1}$: Covariance a priori de l'estimation au temps n ;
- F_n : Matrice de transition à l'instant n ;
- Q_n : Covariance du bruit de processus à l'instant n ;
- K_n : Gain de Kalman au temps n ;
- z_n : Mesure réelle au temps n ;
- H : Matrice de mesure au temps n ;
- R_n : Covariance du bruit de mesure à l'instant n ;
- I : Matrice identité.

L'utilisation pratique du filtre de Kalman implique la définition judicieuse des paramètres Q et R, qui représentent respectivement la covariance du bruit de processus associée aux modèles dynamiques du système et la covariance du bruit de mesure. Ces paramètres sont essentiels pour ajuster la sensibilité du filtre et adapter son comportement à la dynamique spécifique du système sous observation. Voici une explication pratique de leur utilisation :

Covariance du bruit de processus (Q) :

La covariance du bruit de processus (Q) représente l'incertitude de modélisation. En d'autres termes, elle mesure à quel point les prédictions du filtre peuvent s'écarter du véritable état du système en raison des erreurs de modélisation. Le choix de Q dépend de la connaissance que l'on a de la dynamique du système. Si le modèle est considéré comme très fiable, la covariance du bruit de processus peut être réduite. Si l'on sait que le système est sujet à des variations importantes et imprévisibles, Q peut être augmentée. Le réglage de Q est souvent une tâche délicate, nécessitant des ajustements itératifs basés sur l'analyse des performances du filtre. C'est l'un des enjeux majeurs de l'utilisation du filtre de Kalman en pratique.

Covariance du bruit de mesure (R) :

La covariance du bruit de mesure (R) quantifie l'incertitude associée aux observations ou mesures du système. Elle prend en compte les erreurs des capteurs et les fluctuations dans les mesures. Si les capteurs sont considérés comme précis et fiables, la covariance du bruit de mesure peut être réduite. À l'inverse, si les mesures sont sujettes à des variations importantes, R peut être augmentée.

De la même manière que pour Q, le réglage de R peut nécessiter une itération et une évaluation continue des performances du filtre.

3 - Application du filtre de Kalman à un système masse ressort amorti

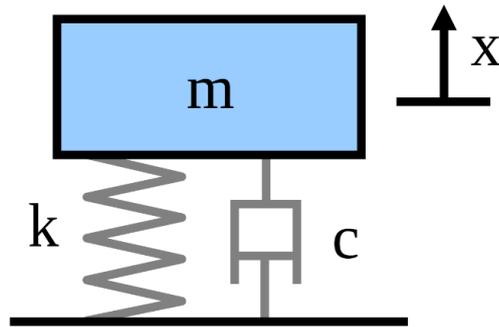


Figure 3 : Schéma de l'Oscillateur Harmonique Amorti

On se propose désormais d'appliquer le filtre de Kalman à un oscillateur mécanique amorti (Figure 3) dont on aura une mesure de la position q . L'équation qui décrit l'évolution du système sous une force extérieure est :

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2q = F_{Ext}$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $c = 2\xi\omega_0$, $m = 1$.

En écrivant cette équation différentielle au premier ordre sous la forme $\dot{x} = Ax$ on obtient :

Equation d'évolution : $x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon$

- $x_n = \begin{pmatrix} \dot{q}_n \\ q_n \end{pmatrix}$
- $f(x_n) = (I + dt A) x_n$, ou dt est le pas de temps entre deux mesures
- $A = \begin{bmatrix} -2\xi\omega_0 & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- ε : Bruit gaussien lié au processus de covariance Q

Equation d'observation : $z_n = Hx_n + r$

- z_n : Mesure de la position à l'instant n
- $H = [0 \ 1]$: On projette l'état sur la position via la matrice d'observation H .
- r : Bruit gaussien liée à la mesure de covariance R

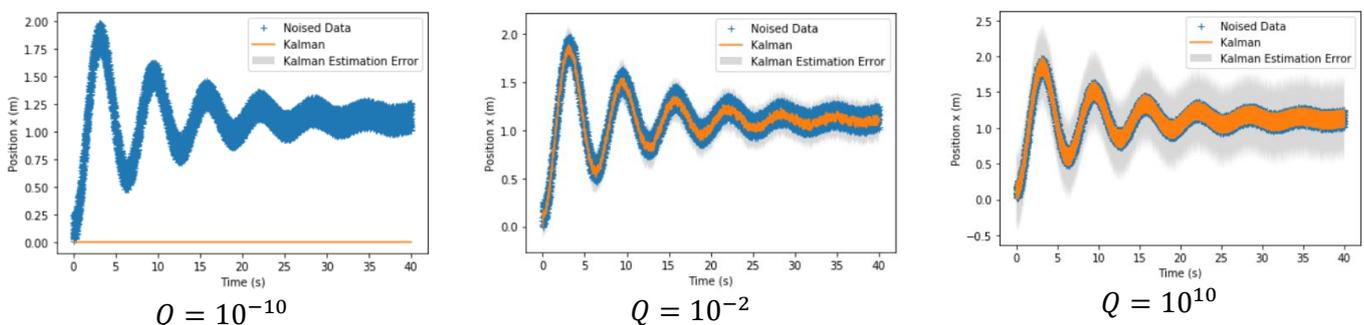


Figure 4 : Evolution de l'estimation de la position par Filtre de Kalman pour différentes valeurs de Q

La Figure 4 montre l'évolution temporelle des mesures de positions en bleues et de son estimation par Kalman en orange. On peut y voir l'évolution de la qualité du filtrage en fonction de l'ordre de grandeur de Q . On observe que lorsque celui-ci est trop faible les mesures ne sont pas prises en compte. Si celui-ci augmente on prend alors les mesures en compte mais on arrive à éliminer une partie du bruit pour $Q = 10^{-2}$, mais lorsqu'on augmente trop l'ordre de grandeur on perd cette

propriété de filtrage, on augmente même l'incertitude par rapport aux mesures. Pour des systèmes plus complexes cela peut même engendrer des comportements instables qui divergent.

Le notebook Jupyter en annexe [6] permet d'étudier de façon interactive l'influence des différents paramètres sur le filtre de Kalman dans le cadre de ce problème.

On pourra notamment à s'intéresser à :

- L'optimisation des paramètres $Q, R, P_{0,0}, x_{0,0}$ pour les valeurs de ξ, ω_0 données pour différents niveaux de bruits.
 - A noter ici que l'on a présupposé les matrices Q et R comme étant des matrices diagonales dont les composantes sont le paramètre d'entrée (Q, R) ; en réalité ces composantes peuvent être différentes le long de la diagonale et il peut y avoir des termes hors diagonaux.
- L'effet provoqué par une variation de ξ, ω_0 sur le choix des valeurs de $Q, R, P_{0,0}, x_{0,0}$;
- La conséquence d'un biais dans le modèle par exemple une erreur de 5% sur la valeur de la raideur du modèle ;
- La résolution temporelle utilisée, existe-t-il une fréquence d'échantillonnage minimale ?
- (Ouverture) Une modification du programme est possible pour :
 - Etudier un cas où la force extérieure F_{Ext} évolue avec le temps
 - Etudier un problème non-linéaire de type oscillateur de Duffing :

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2(1 + \epsilon q^2)q = F_{Ext}$$

Pour ce faire, il est possible d'utiliser l'approche du Filtre de Kalman Etendu (EKF) [3] qui consiste à linéariser le système autour de son état courant $F_n = J_f(x_n)$. D'autres approches visent à étendre l'utilisation du filtre de Kalman aux problèmes non-linéaires telle que le Unscented Kalman Filter [4].

- (Ouverture) Il est aussi possible de modifier le programme afin d'augmenter le vecteur d'état du système pour effectuer des résolutions de problèmes inverses.
 - En estimant les valeurs intrinsèques du système telles que m, c, k on pourra faire du SHM
 - En gardant uniquement la mesure de la position x on peut venir estimer la force F_{Ext} comme le propose Hamann pour l'estimation d'efforts appliqués sur un véhicule (Hamann, 2014)

Naturellement, le même formalisme s'applique à des systèmes à plusieurs degrés de liberté, cela augmente la taille du vecteur d'état et remplace les précédentes composantes scalaires par des matrices comme les matrices de raideur et de masse obtenues par votre code éléments finis préféré.

3.1 - Problème inverse : estimation de forces extérieures

Le cas de l'estimation de F_{Ext} est légèrement plus simple on fournit les expressions suivantes :

$$x_n = \begin{pmatrix} \dot{q}_n \\ q_n \\ F_{Ext_n} \end{pmatrix}$$

Equation d'évolution : $x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon$

- $f(x_n) = (I + dt A) x_n$, ou dt est le pas de temps entre deux mesures
- $A = \begin{bmatrix} -2\xi\omega_0 & -\omega_0^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ε : Bruit gaussien lié au processus, de covariance Q

Equation d'observation : $z_n = Hx_n + r$

- z_n : Mesure de la position à l'instant n
- $H = [0 \ 1 \ 0]$: On projette l'état sur la position via la matrice d'observation H .
- r : Bruit gaussien lié à la mesure, de covariance R

On a toujours $F = I + dt A$, on remarque que d'après notre modèle $F_{Ext}^{\cdot} = 0$. C'est un processus de marche aléatoire. Donc c'est le bruit de processus Q correspondant à F_{Ext} qui doit être capable de capturer l'évolution temporelle de la force. Naturellement si l'on possède des modèles sur les sources d'excitations cela viendra renforcer notre aptitude d'estimations.

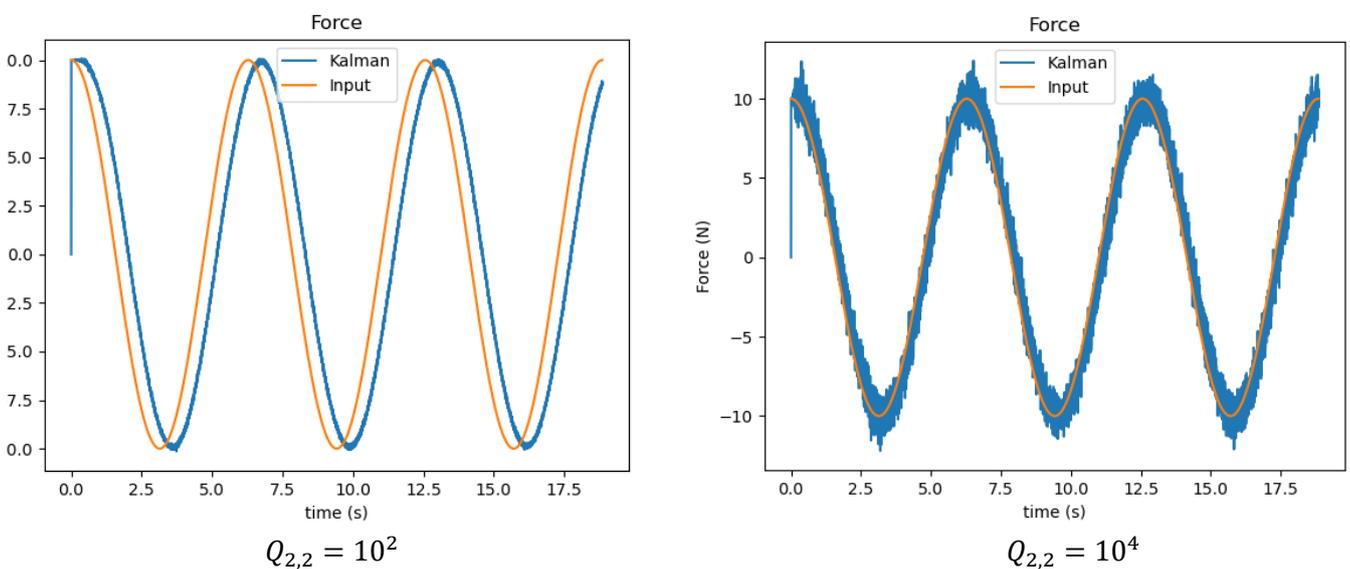


Figure 5 : Evolution temporelle de l'effort imposé et de l'effort estimé par Kalman pour différent Q

Sur la Figure 5 on observe les résultats pour différentes valeurs de $Q_{2,2}$ et on peut constater la présence d'un délai entre la force Input qui correspond à la force $F_{Ext}(t)$ théorique en bleu et l'estimation du filtre de Kalman en orange. On peut cependant réduire ce délai en augmentant $Q_{2,2}$ mais cela augmente le bruit sur l'estimation de la force par le filtre.

3.2 - Problème inverse : Structural Health Monitoring

Si l'on veut surveiller l'état de la structure cela complexifie un peu le processus car cela introduit plus de couplages dans la matrice de transition, c'est pour cela qu'usuellement, on double l'utilisation de filtres de Kalman en estimant d'abord par exemple la position puis les variables d'état internes. Sans procéder à cela on a les équations suivantes :

$$x_n = \begin{pmatrix} \dot{q}_n \\ q_n \\ k_n \end{pmatrix}$$

Equation d'évolution : $x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon$

- $f(x_n) = (I + dt A) x_n$, ou dt est le pas de temps entre deux mesures

- $A(x_n) = \begin{bmatrix} -2\xi\sqrt{\frac{k}{m}} & -\frac{k}{m} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- ε : Bruit gaussien lié au processus, de covariance Q

La matrice A dépend du vecteur d'état à travers k ce n'est donc plus un système linéaire ; on peut cependant exprimer la matrice de transition F_n via la jacobienne de l'équation de prédiction selon le filtre de Kalman Etendu.

$$F_n = \begin{bmatrix} -2\xi\omega_0 & -\omega_0^2 & -q_n + \xi q_n & \frac{1}{\sqrt{k_n m}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 - Conclusion

Dans cet article nous avons proposé une approche pratique à l'utilisation du filtre de Kalman avec en premier lieu une explication de son fonctionnement et de ses principales composantes puis dans un second temps une prise en main du problème pratique de l'utilisation de filtre de Kalman sur un problème simple avec une ouverture du sujet sur des problèmes mécaniques plus compliqués s'approchant d'utilisations réelles.

5 - Références

- [1] R. E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, 1960.
- [2] L. a. W. S. a. Y. J. N. Zhou, «Experimental study of an adaptive extended Kalman filter for structural damage identification,» *Journal of Infrastructure Systems*, 2008.
- [3] M. I. Ribeiro, «Kalman and extended kalman filters: Concept, derivation and properties,» *Institute for Systems and Robotics*, 2004.
- [4] S. a. U. J. a. D.-W. H. F. Julier, «A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators,» *IEEE Transactions on automatic control*, 2000.
- [5] H. H. J. R. S. & G. F. Hamann, «The force estimation for a passenger vehicle with the unscented kalman filter,» *IEEE intelligent vehicles symposium proceedings (pp. 814-819)*, 2014.
- [6] Annexe : Ressources - Utilisation du filtre de kalman, F. Maetz, https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/utilisation-du-filtre-de-kalman