Comment carreler sa salle de bain en évitant les fuites, les Pavages Périodiques du Plan

Culture Sciences de l'Ingénieur

Mathis HÉRAULT ARDOUIN

Relectures de Martin PONCELET *et* Christelle COMBESCURE

Édité le 07/11/2024

école normale supérieure paris–saclay

Cet article est un travail personnel de Mathis Hérault Ardouin, étudiant à l'École Normale Supérieure de Paris-Saclay, réalisé sous l'encadrement de Martin Poncelet, Maître de conférences à l'École Normale Supérieure de Paris-Saclay, et Christelle Combescure, Maître de conférences à l'Académie militaire de St-Cyr Coëtquidan.

Cet article a pour but d'étudier l'organisation des carrelages et papiers peints que vous pouvez trouver dans vos foyers ; en effet en regardant de plus près les motifs d'une salle de bain on remarque une certaine harmonie dans leur position et orientation. On parle alors de répartition périodique et cela porte un nom : *la cristallographie,* en référence aux cristaux composant la matière qui s'organisent selon les mêmes règles. Cette théorie ne se limite bien sûr pas qu'aux carrelages et cristaux, si on visite la grande mosquée de Paris on pourra prêter attention aux mosaïques avec un œil avisé pour y reconnaitre les propriétés vues dans cet article. Enfin de nombreuses réalisations de Maurits Cornelis Escher[1] s'appuient sur ces concepts (voir entres autres *M.C. Escher, l'œuvre graphique*) réalisations qui serviront ici à illustrer notre propos. D'un point de vue scientifique ces notions s'appliquent dans l'étude de l'organisation de la matière que l'on retrouve aussi dans l'étude des matériaux architecturés.

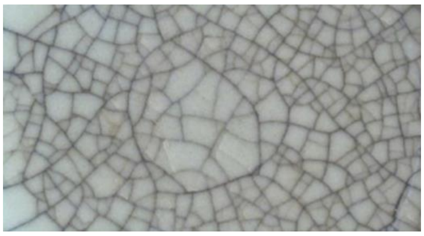
Les concepts étudiés ici le seront d'un point de vue mathématique tout en illustrant graphiquement les résultats pour permettre aux lecteurs une meilleure compréhension des enjeux. Pas d'inquiétudes à avoir concernant les mathématiques, bien que reposant sur des théories retors (théorie des ensembles, théorie des groupes) les notions seront explicitées de manière à être accessibles au plus grand nombre, nous nous garderons donc de développer les théories sous-jacentes et nous nous contenterons d'en appliquer les résultats ; et qui sait peut-être que cela donnera envie aux lecteurs d'approfondir leurs connaissances en la matière. Enfin différents exemples de code en langage Python permettant de générer des pavages périodiques sont détaillés en annexe. Les lecteurs ont ainsi tout le loisir de les réutiliser pour manipuler de manière interactive les notions présentées.

1 - Introduction

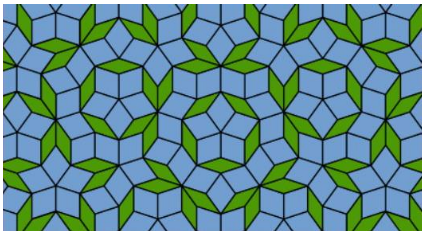
En observant le sol de sa salle de bain mais aussi les papiers peints de ses grands-parents on peut observer une certaine organisation dans le fait de décorer les surfaces. On remarque la même volonté d'organisation dans des monuments culturels à travers le monde. Cela porte un nom : le pavage. Le pavage du plan (ou carrelage "tiling") est un exercice proposant de diviser une surface (dans notre cas nous étudierons les surfaces planes mais il est possible de se poser les mêmes questions pour des dômes ou autres types de surfaces plus compliquées) en un ensemble de tuiles

[1] Maurits Cornelis Escher (1898-1972), artiste néerlandais

sans qu'il n'y ait de trous ou de chevauchements. La figure 1 montre différentes manières de paver le plan.



(a) Porcelaine craquelée



(b) Exemple de pavage de Penrose

(c) Estampe de M.C. Escher

Figure 1 : Différents pavages du plan

On remarque en premier lieu que la porcelaine figure 1a ne semble présenter aucun ordre particulier. Le pavage de Penrose montré figure 1b semble présenter une répétition dans ses motifs mais sans qu'un ordre évident ne ressorte.

Sur la figure 1c nous pouvons voir que les motifs se répètent. Plus précisément, prenons l'œil de l'oiseau blanc en guise de point d'origine nous pouvons alors définir deux translations qui permettent de retomber sur l'œil d'un oiseau blanc figure 2, et ce ainsi de suite en répétant les translations autant de fois qu'on le souhaite et dans l'ordre que l'on veut. On définit alors un pavage périodique de la manière suivante : c'est un pavage possédant deux translations de directions différentes permettant de retomber sur lui-même !

Figure 2 : Représentation des translations sur l'estampe

Dans les faits nous aurions pu choisir parmi une infinité de translations disponibles ! Alors comment choisir les deux meilleures ?

Et bien découpons un rectangle dans notre pavage à partir de nos deux translations (figure 3a) et redécoupons ce rectangle pour ne garder que les parties oiseau blanc d'un côté et oiseau noir de l'autre (figure 3b). Nous pouvons facilement voir que nous avons de quoi reformer quatre oiseaux au total : deux noirs et deux blancs (figure 3c).

(a) *Rectangle issu de notre pavage*
(b) *Découpe des oiseaux blancs et noirs*
(c) *Reconstruction des oiseaux blancs et noirs*

Figure 3 : Exemple avec deux translations formant un rectangle

En choisissant des translations un peu différentes et en refaisant nos découpages, nous pouvons arriver à obtenir exactement un oiseau de chaque couleur, à condition bien sûr, que nos translations ne forment plus un rectangle mais un parallélogramme (figure 4 et figure 5). C'est ainsi que nous définissons nos translations primitives : elles permettent la construction d'un polygone contenant le minimum d'informations sur le pavage complet, polygone que nous appellerons *cellule primitive*.

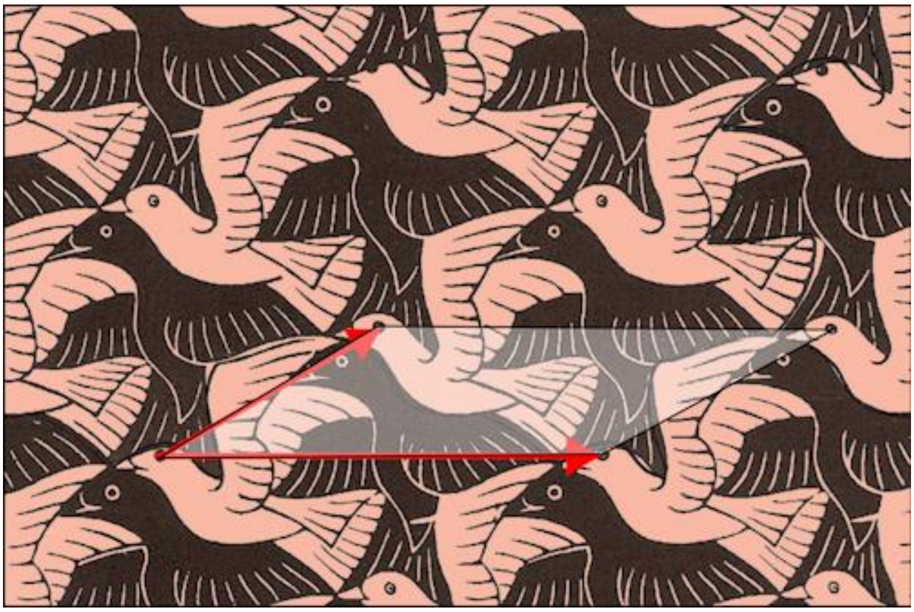


Figure 4 : Translations formant un parallélogramme

(a) *Parallélogramme issu de notre pavage*
(b) *Découpe des oiseaux blancs et noirs*
(c) *Reconstruction des oiseaux blancs et noirs*

Figure 5 : Exemple avec deux translations formant un losange

Cela veut-il dire que cette cellule primitive est uniquement contenue dans un parallélogramme quelconque et qu'il est impossible d'obtenir un rectangle voire un carré ? Non fort heureusement ce n'est pas le cas comme le montrent les exemples suivants (figure 6) mais alors cela définit d'autres types de pavages ne possédant pas les mêmes propriétés. C'est ainsi que nous pouvons avoir des envies de classement des différents types de pavages possibles.

(a) Motif de vague

(b) Estampe de M.C. Escher

(c) Décoration

Figure 6 : Différents exemples : Le lecteur est invité à retrouver les formes des cellules primitives de chacun des exemples (solutions à la fin de l'article)

La question suivante que nous sommes en droit de nous poser est : les translations sont-elles les seules opérations nous permettant de construire des pavages périodiques ? Prenons cet exemple de papier peint appelé carré adouci (figure 7). Nous retrouvons bien deux translations de directions différentes permettant de construire l'ensemble du papier peint. Ouf, il est périodique ! D'ailleurs la cellule primitive est ici un carré.

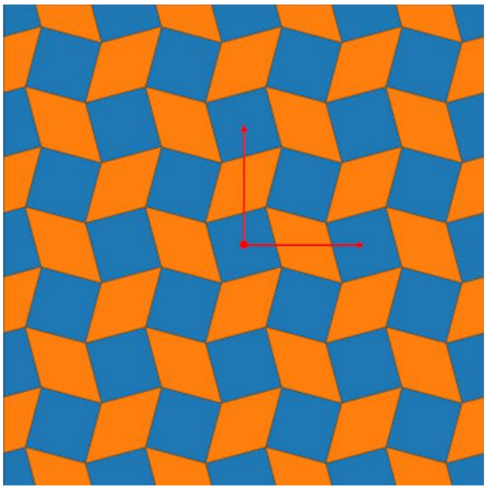
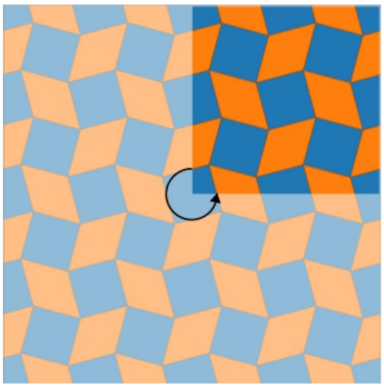
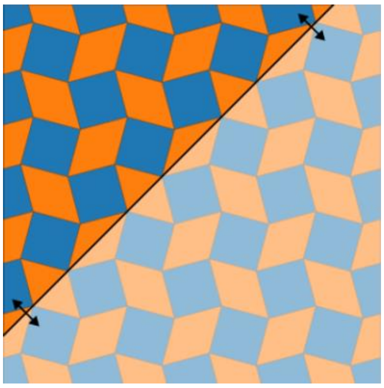


Figure 7 : Pavage du carré adouci et translations primitives

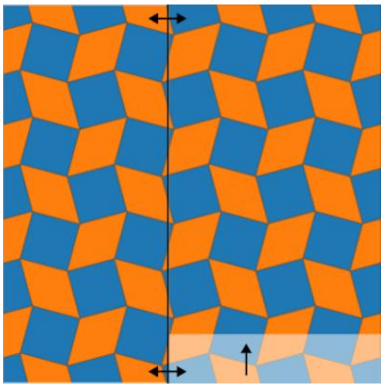
Si nous regardons plus en détail nous pouvons observer des rotations de 90°, des symétries miroirs, et plus dur à voir, des symétries glissées, composées d'une symétrie miroir puis d'une translation dans la direction de l'axe de symétrie (figure 8). Ces quatre types d'opérations (translation, rotation, symétrie miroir et glissée) sont appelées isométries du plan, ce sont les transformations qui ne modifient pas la taille des objets.



(a) Rotation de 90°



(b) Symétrie miroir



(c) Symétrie glissée (miroir puis translation)

Figure 8 : Symétries du carré adouci

2 - Comment construire un carrelage

Pour réaliser la construction de notre carrelage nous allons avoir besoin de deux outils, fort heureusement ici nous troquerons truelle et pince contre des outils d'une autre nature : les réseaux et les carreaux (carreaux que nous appellerons aussi motifs ou tuiles).

2.1 - Réseaux

Un réseau est l'ensemble des emplacements de nos carreaux, c'est en quelque sorte le support du pavage sur lequel nous allons pouvoir positionner chaque tuile. Pour obtenir ce réseau nous pouvons par exemple reprendre les deux translations de notre pavage figure 9a et noter l'ensemble des points que nos translations nous permettent d'atteindre figure 9b.

(a) Translation *(b) Réseau oblique*

Figure 9 : Réseau construit à partir de deux translations

Nous remarquons que le réseau précédent possède un domaine fondamental de la forme d'un parallélogramme. Nous nous demandons donc naturellement : pouvons-nous construire des réseaux à partir de n'importe quel polygone, par exemple de carrés, de pentagones, d'hexagones ? En effet un réseau carré est présenté figure 10.

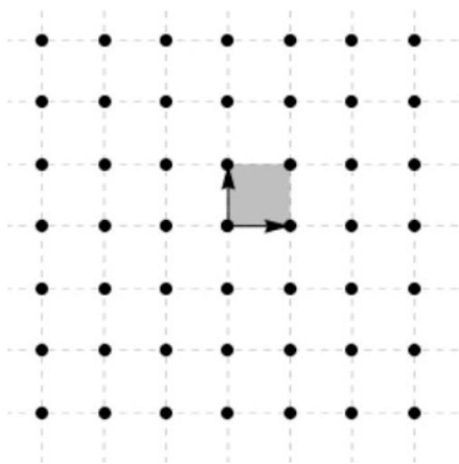


Figure 10 : Réseau carré

Mais si on cherche à construire un réseau à partir de pentagone on se rend vite compte qu'on est bloqué : la somme des angles d'un pentagone ne fait pas 360°. Comme le montre la figure 11 en tentant de paver le plan avec des pentagones on risque d'avoir des fuites dans notre carrelage.

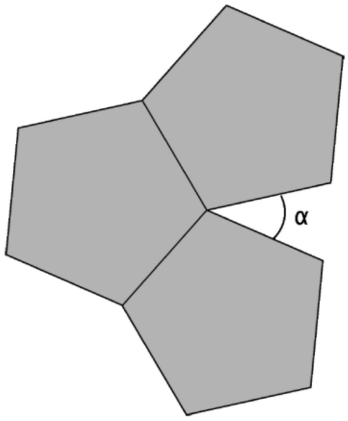
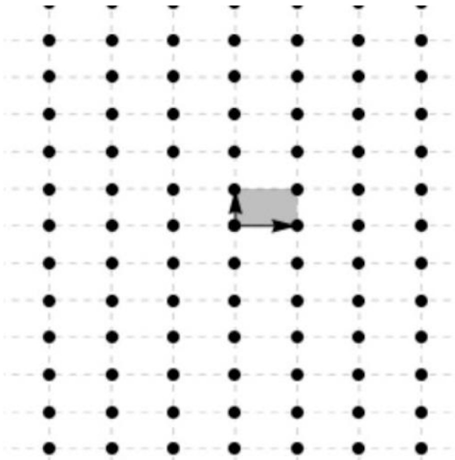


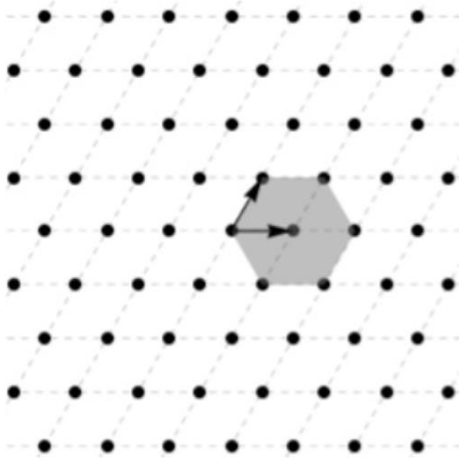
Figure 11 : Des pentagones ne peuvent pas paver le plan

De manière générale on ne peut construire des réseaux qu'à partir de parallélogramme (figure 9b) de rectangle (figure 12a) de carré (figure 10) ou d'hexagone (figure 12b).

<u>Remarque :</u> C'est la conséquence d'un théorème dit de la restriction cristallographique.



(a) Réseaux rectangulaire



(b) Réseau hexagonal

Figure 12 : Réseaux rectangle et hexagone

Enfin le réseau rectangulaire peut être défini par deux autres translations définissant un losange, on parle alors de réseau rectangulaire centré figure 13 (l'origine du réseau se trouve au centre du domaine fondamental) au contraire des autres réseaux dit primitifs (l'origine du réseau se trouve sur un bord du domaine fondamental).

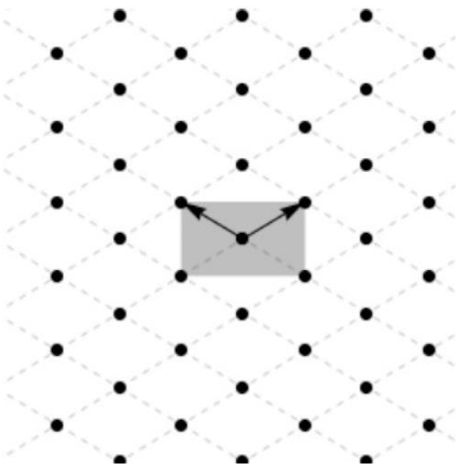


Figure 13 : Réseau rectangle centré

Observons ces constructions en termes de paramètres. On considère trois paramètres distincts : a et b les longueurs de nos deux translations, et ϕ l'angle qu'elles forment. En fixant $\phi = 90^\circ$ nous obtenons le réseau rectangulaire, et en fixant $a = b$ indépendamment de la valeur de ϕ nous obtenons le réseau rectangulaire centré. En combinant ces deux propriétés nous retrouvons le réseau carré, enfin à partir du réseau rectangulaire centré (c'est à dire $a = b$) si maintenant nous fixons $\phi = 60^\circ$ nous obtenons le réseau hexagonal. Ces constructions sont détaillées dans la figure 14.

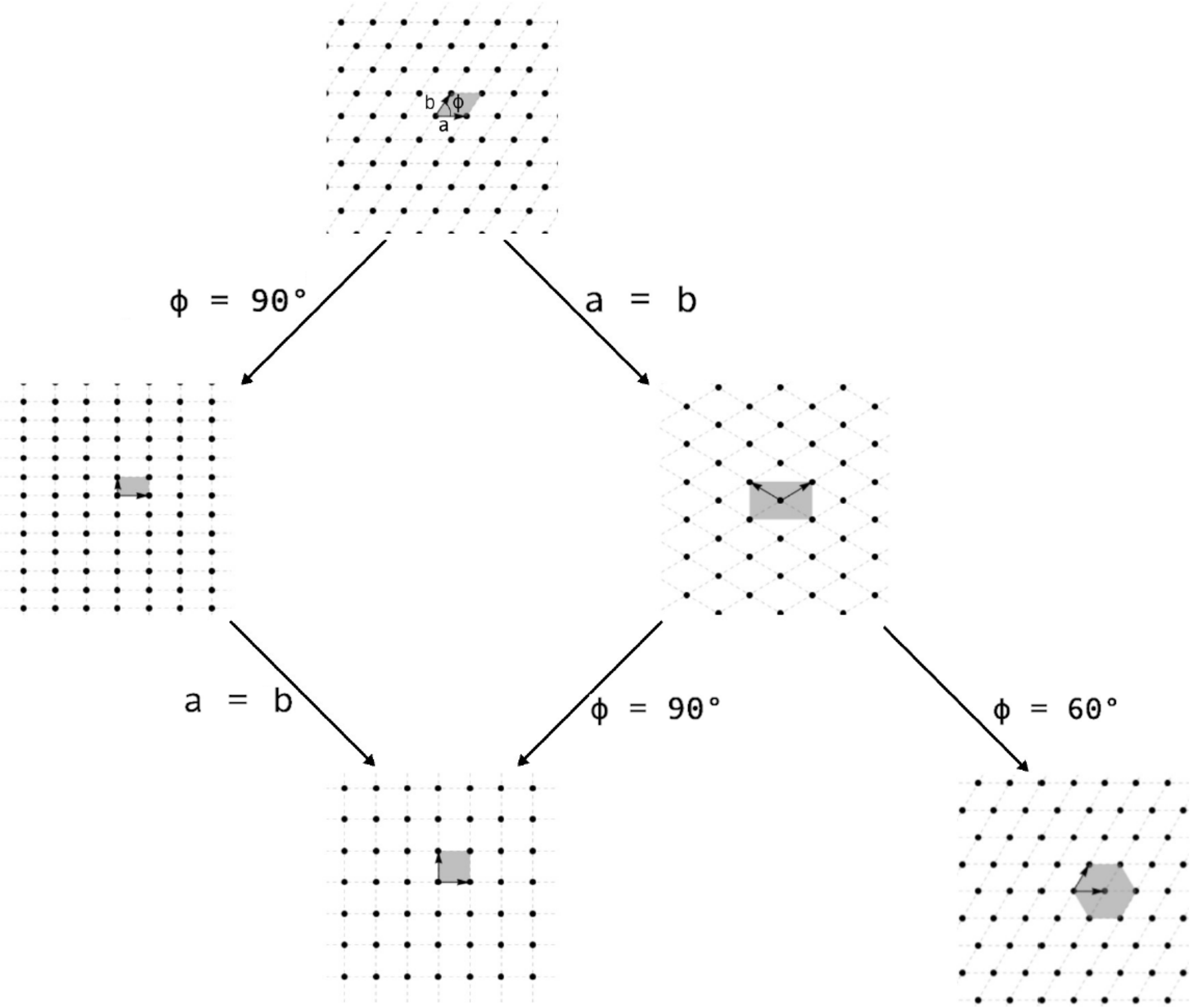


Figure 14 : Les différentes réseaux selon leurs paramètres fixés

Résumons tout ceci dans le tableau 1 :

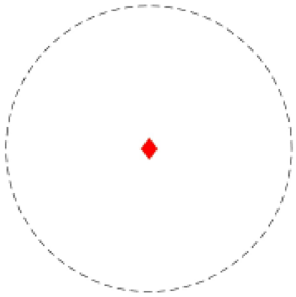
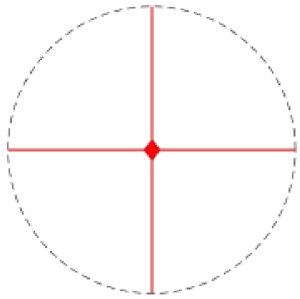
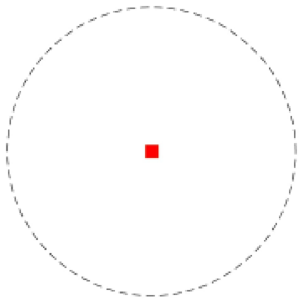
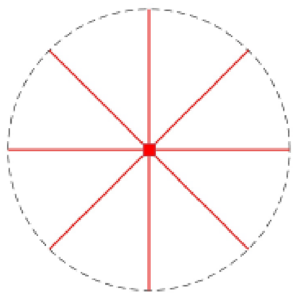
Système	Oblique	Rectangulaire primitif	Rectangulaire centré	Carré	Hexagonal
Forme de cellule primitive	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré	Losange
Paramètres fixés	Aucun	$\phi = 90^\circ$	$a = b$	$\phi = 90^\circ$ $a = b$	$\phi = 60^\circ$ $a = b$

Tableau 1 : Réseaux à deux dimensions

2.2 - Carreaux

Maintenant que nous avons défini la notion de réseau comme support de carrelage il faut pouvoir y mettre un carreau (ou motif ou tuile) à chaque emplacement. Pour simplifier notre étude nous nous contenterons de définir des carrelages composés d'un seul type de carreau à la fois, de plus nos carreaux seront dans la mesure du possible composés de polygones. On pourrait penser que cela nous limite dans la variété de pavage mais dans les faits nous pouvons toujours redécouper et assembler un motif (périodique) quelconque pour former un polygone : exemple le découpage des oiseaux blanc et noir dans l'introduction.

La notion à respecter pour que nos carreaux se placent sur un réseau est qu'ils respectent les symétries de ce dernier. À partir de là nous pouvons définir six grandes familles de carreaux (tableau 2) :

Réseau associé	Symétries	Schémas représentants les symétries
Oblique	2 rotations	
Rectangulaire	2 rotations et 2 miroirs	
Carré	4 rotations	
	4 rotations et 4 miroirs	

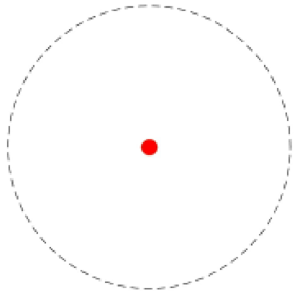
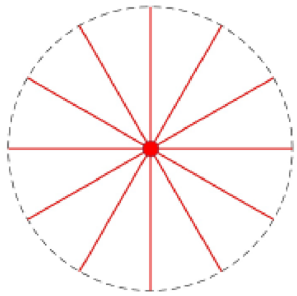
Hexagonal	6 rotations	
	6 rotations et 6 miroirs	

Tableau 2 : Six premières familles de carreaux
Légendes des schémas des troisièmes colonnes (tableaux 2, 3 et 4) :

——— *: Symétrie miroir*
♦ *: Symétrie de rotation de 180°*
▲ *: Symétrie de rotation de 120°*
■ *: Symétrie de rotation de 90°*
● *: Symétrie de rotation de 60°*

Mais ne nous arrêtons pas en si bon chemin ! Si on reprend notre réseau hexagonal figure 12b on peut facilement voir qu'il est confondu avec un réseau trigonal, en effet en joignant tous les points entre eux on peut voir des triangles équilatéraux se former, cela s'explique assez bien car les symétries du triangle équilatéral (3 rotations et 3 miroirs) sont comprises dans l'hexagone. Ainsi on peut former deux nouvelles familles de motifs à partir des triangles tableau 3 :

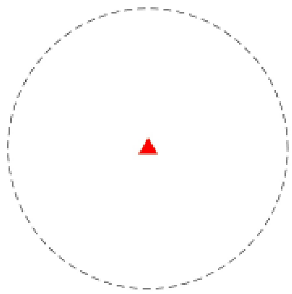
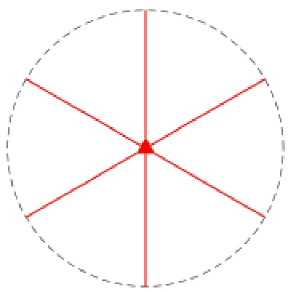
Réseau associé	Symétries	Schémas représentants les symétries
Hexagonal/Trigonal	3 rotations	
	3 rotations et 3 miroirs	

Tableau 3 : Deux nouvelles familles de carreaux

Enfin que se passe-t-il lorsque nous enlevons les rotations du parallélogramme et celles du rectangle ? Nous pouvons toujours placer nos carreaux sur les réseaux obliques et rectangulaires ! Formidable, deux nouvelles familles (tableau 4) :

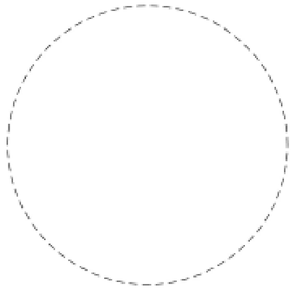
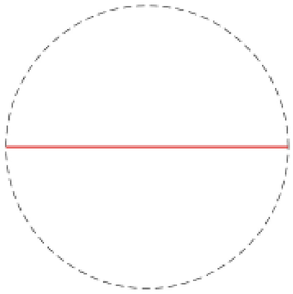
Réseau associé	Symétries	Schémas représentants les symétries
Oblique	Pas de rotation = une rotation de 360°	
Rectangulaire	1 miroir	

Tableau 4 : Deux dernières familles de carreaux

C'est là la liste exhaustive des dix grandes familles de carreaux. Il n'y en a pas d'autres du fait de la restriction du nombre de réseaux.

<u>*Remarque :*</u> *en cristallographie, nous appelons ces familles groupes ponctuels du plan et leurs notations comportent le nombre de rotation suivi d'un "m" ou deux s'il y a présence d'un miroir, ainsi par exemple la famille du rectangle se note 2mm, celle de l'hexagone sans miroir se note 6 et celle du triangle se note 3m.*

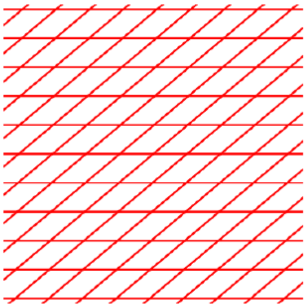
Voici maintenant un petit jeu proposé au lecteur : la figure 15 présente dix tuiles que nous pourrions utiliser pour construire un pavage périodique. À vous de trouver à quel groupe de symétrie chacun est associé (indice : essayez de retrouver les symétries correspondantes en utilisant les schémas des tableaux précédents - Solutions à la fin de l'article).

Figure 15 : Réseaux rectangles et hexagones
Le lecteur est invité à retrouver les groupes de symétrie associés à chacun des exemples (solutions à la fin de l'article)

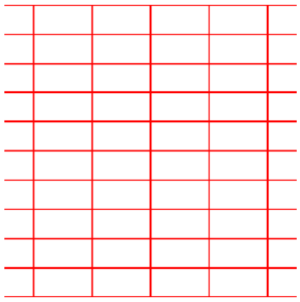
3 - Passons à la réalisation

Nous avons maintenant défini tous les outils nécessaires à la construction de nos carrelages, nos réseaux et nos carreaux ! Associons alors nos motifs aux réseaux correspondants et créons nos propres carrelages.

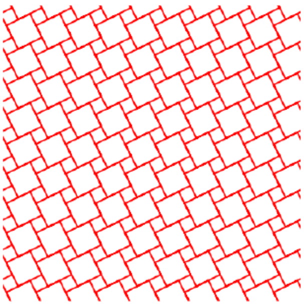
Dans un souci de longueur de l'article et pour laisser au lecteur quelques subtilités à découvrir par lui-même nous ne développerons pas la construction des pavages ; nous présentons uniquement quelques exemples reposants sur les outils introduits plus tôt. Il est laissé au lecteur le loisir d'utiliser le code Python (voir « *Annexe : Code Python Pavages Périodiques du Plan* » [4]) utilisé pour générer les pavages de la figure 16 pour expérimenter par lui-même la construction.



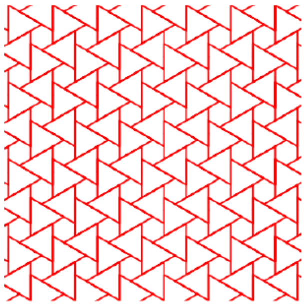
(a) Un motif contenant deux rotations sur un réseau parallélogramme



(b) Un motif contenant deux rotations et deux miroirs sur un réseau rectangulaire



(c) Un motif contenant quatre rotations sur un réseau carré



(d) Un motif contenant six rotations sur un réseau hexagonal

Figure 16 : Exemples de différents pavages

4 - Pour aller plus loin …

Pour approfondir le sujet, ces quelques vidéos Youtube abordent des notions similaires mais selon une autre approche, n'hésitez pas à y jeter un coup d'œil :

- El jj : Deux (deux ?) minutes pour... classer les pavages !
- ARTE : Les pavages du plan ou les maths du carrelage | Voyage au pays des maths

Et si vous voulez aller vraiment plus loin, le livre *Géométrie des pavages. De la conception à la réalisation sur ordinateur* [1] écrit par Pierre Audibert, fournit une belle introduction au sujet. Enfin les références [2] et [3] peuvent aussi être consultées mais attention, c'est un niveau universitaire.

5 - Solutions des tests/jeux

5.1 - Partie 1 – Figure 6

- Figure (a) : Rectangle
- Figure (b) : carré
- Figure (c) : losange

5.2 - Partie 2 – Figure 15

<u>Ligne 1 de gauche à droite :</u>

- 4 rotations et 4 miroirs
- 3 rotations
- 6 rotations
- 1 miroir
- 6 rotations et 6 miroirs

<u>Ligne 2 de gauche à droite :</u>

- 4 rotations
- 2 rotations
- 1 rotation (de 360°)
- 2 rotations et 2 miroirs
- 3 rotations et 3 miroirs

Références :

[1]: Pierre Audibert. Géométrie des Pavages. De la conception à la réalisation sur ordinateur. Edition Hermès science, 2013.

[2]: Gerald Burns et A.M. Glazer. Space Groups for Solid State Scientist. 1990.

[3]: Bernd Souvinier. “Points Groups in cristallographie”. In : (2009).

[4]: Annexe : Code Python Pavages Périodiques du Plan , M. Hérault Ardouin, Novembre 2024, https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/les-pavages-periodiques-du-plan