

Optimisation structurelle dans la construction de bâtiment

Culture Sciences
de l'Ingénieur

Nicolas VIBERT - Clotilde CHAMBREUIL

Édité le
04/09/2024

école
normale
supérieure
paris-saclay

Élève de l'ENS Paris-Saclay, Nicolas Vibert, lors de sa première année en Sciences pour l'Ingénieur (année SAPHIRE) a suivi le parcours « Ingénierie civile ». Dans ce cadre les élèves ont, sur un thème imposé, à réaliser un état de l'art, un mémoire et à présenter une courte leçon. Cette ressource est issue de ce dossier.

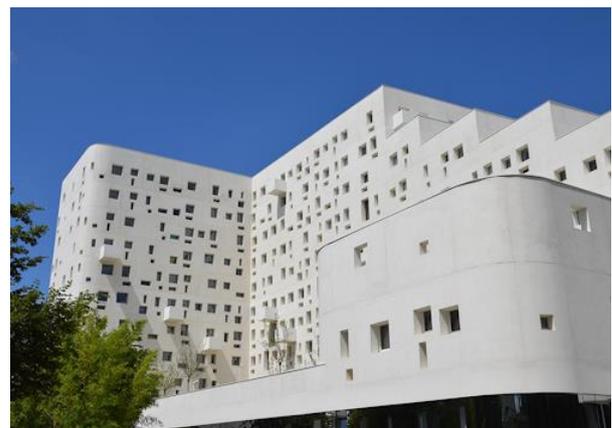
L'optimisation structurelle désigne la volonté de réduire les quantités de matériaux utilisées pour construire un bâtiment. Elle s'inscrit dans un contexte de remise en cause de l'optimisation des productions qui a fait des formes simples les solutions privilégiées économiquement.

Des matériaux comme le béton se sont imposés comme principaux matériaux de construction depuis le XX^e siècle pour leur résistance et leur facilité de mise en œuvre, les industries ont rapidement optimisé et standardisé les productions afin d'en diminuer les coûts : l'hyper-standardisation fait que l'outil impose la construction.

Le béton, mélange de ciment, de granulats et d'eau (voir ressource « *Formulation d'un béton ordinaire* » [1]), est le produit manufacturé le plus utilisé dans le monde. Mais il est aussi le vecteur d'aggravations environnementales. La production de ciment est responsable de 8% des émissions de gaz à effet de serre et consomme 2% de l'eau prélevée (voir ressource « *Béton bas carbone : Introduction aux enjeux modernes de l'industrie du béton* » [2]), 190 m³ de béton sont coulés chaque seconde [3]. Ces constats semblent suffisants pour s'intéresser à la réduction de la production de béton et, dans cette démarche, à l'optimisation structurelle qui vise à ce que les besoins constructifs mènent à un choix adapté des formes et éléments minimisant les quantités utilisées. À l'opposé de l'optimisation structurelle, l'architecture minérale en coffrage plein (figure 1) est justifiée en particulier par la facilité de mise en œuvre et l'économie de main d'œuvre.



Église de l'Anastasis, St Jacques de la Lande (Ille-et-Vilaine) architecte Alvaro Siza, inaugurée en 2018 [4]



Résidence Escabelle, Campus Bordes Pessac (Gironde) architecte Rudy Ricciotti, inaugurée en 2015 [5]

Figure 1 : Exemples d'architecture minérale en coffrage plein

L'attention à la quantité de matières premières utilisées entraîne une réflexion sur l'intérêt des masses structurelles. Ainsi l'optimisation adaptée à chaque construction se développe en opposition avec les constructions standardisées.

La question devient alors : où peuvent être réduites les masses de béton et autres matériaux ?

La réponse s'oriente sur deux pistes de réflexion :

- Le juste dimensionnement des structures. Épaissir les poutres ou les murs permet la tenue du bâtiment sans nécessiter une grande précision de calcul de résistance. Un dimensionnement plus strict, aidé par des outils numériques de plus en plus performants, peut, lui, permettre de n'utiliser que le volume nécessaire.
- L'adaptation des formes de la structure prenant en compte les volumes à couler et la transition des charges au sein de la structure. Un exemple d'architecture optimisée est donnée figure 2 par Pier Luigi Nervi, qui a repensé la forme et l'utilité des planchers et des parois dans ses projets.



La structure du Palazzo del Lavoro Turin (Italie) en cours de travaux en 1961, photographie de Paolo Monti [6]



Nervures internes au toit du Palazzo del Sport Rome (Italie) construit pour les jeux olympiques d'été de 1960, [7]

Figure 2 : Exemples d'ouvrages de Pier Luigi Nervi

Cette ressource s'intéresse à l'optimisation structurelle vue, en premier lieu, comme optimisation analytique des éléments structuraux et comme nouvelle méthode architecturale. Puis, l'optimisation des volumes structurels dans le génie civil est abordée à travers le développement d'outils numériques dans ce domaine. Enfin le remplacement du béton par d'autres matériaux de construction est évoqué.

1 - Optimisation des éléments structuraux

1.1 - Un peu d'heuristique

Il arrive que des structures semblent surdimensionnées. Les causes peuvent être multiples (psychologie, manque de moule adapté, volonté de design, ...). Mais dans certains cas, on comprend que tout le béton coulé n'est pas forcément nécessaire. En observant le bâtiment CROUS de Polytech Paris-Saclay, on est frappé par la forme des poutres qui soutiennent les balcons (figure 3a). En effet, il est certain que toute la poutre ne sert pas à reprendre les efforts des étages supérieurs, et qu'une poutre comme celle du complexe Saint Merri (figure 3b) est suffisante.



(a) CROUS Polytech Paris-Saclay, Saclay



(b) Complexe Saint Merri, 75004

Figure 3 : Choix pour la reprise de charges

Cet exemple expose la différence entre un élément structural de forme simple (3a), mais excessif d'un point de vue résistance, et une forme plus complexe (3b) qui témoigne une volonté d'économie de matière. Cette première partie a pour objectif de montrer quelques méthodes analytiques et constructives pour passer d'une solution technique évidente à une solution optimisée.

1.2 - Optimisation d'un paramètre géométrique

L'optimisation réalisée sur un paramètre géométrique peut être réalisée analytiquement à l'aide d'une simple équation. Prenons par exemple une poutre soumise à de la flexion pure (schéma de chargement figure 4).

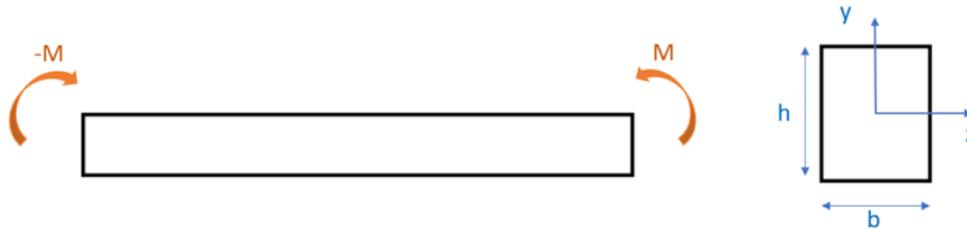


Figure 4 : Schéma d'une poutre en flexion pure

Ce problème se met en équation avec la relation :

$$\sigma = \frac{M_z}{I_{G_z}} y \quad \text{où} \quad I_{G_z} = \frac{bh^3}{12} \quad (1)$$

avec σ la contrainte, M_z le moment fléchissant, I_{G_z} l'inertie de la section et b et h les base et hauteur de la section.

On a ainsi un moment résistant maximal M^{\max} (en milieu de poutre et en haut de la section, i.e. $y = h/2$) :

$$M^{\max} = \frac{\sigma I_{G_z}}{h/2} = \frac{2bh^3}{12h} \sigma = \frac{bh^2}{6} \sigma \quad (2)$$

Ainsi, si le matériau (donc σ^{\max}), M (le chargement) et h (l'épaisseur de la poutre) sont fixés, on peut optimiser la largeur (b_{opt}) de celle-ci :

$$b_{opt} = \frac{6.M}{\sigma^{\max}.h^2} \quad (3)$$

Ce problème est un problème d'optimisation paramétrique, qui peut être étendu à plusieurs paramètres à optimiser tout en gardant la même méthode de résolution.

1.3 - Optimisation analytique d'une poutre en béton armé vis-à-vis du dimensionnement à l'effort tranchant

Les poutres en génie civil sont dimensionnées via les Eurocodes qui imposent un nombre de normes et de règles de calcul afin de rendre universel le choix des éléments constructifs. Le dimensionnement des poutres dans les Eurocodes est majoritairement fait vis-à-vis de la flexion, ce qui impose des armatures longitudinales, sans trop de latitudes d'améliorations sur la quantité de béton utilisée. Cependant, le dimensionnement, qui détermine la résistance à l'effort tranchant, peut lui être la source d'optimisation.

Considérons une poutre en béton armé soumise à la flexion. L'effort tranchant est transmis dans la poutre via des bielles de compression dans le béton (bielles fictives dans le béton qui reprennent les efforts). On peut alors schématiser la poutre comme en figure 5.

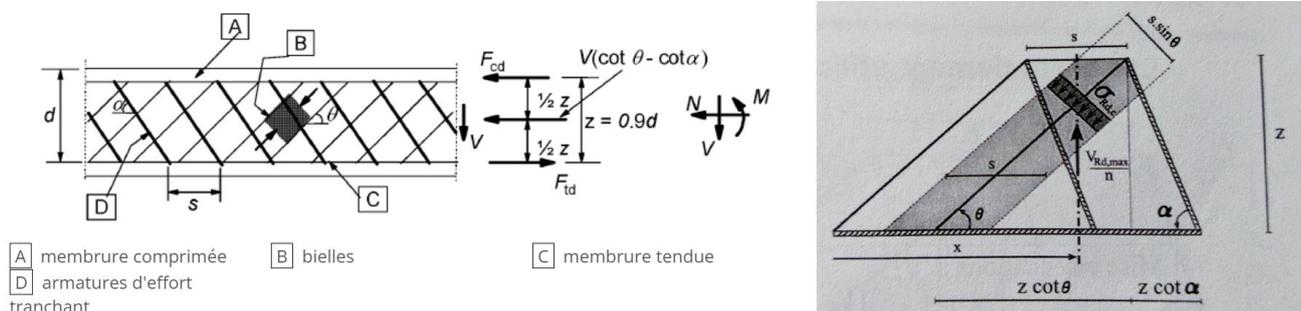


Figure 5 : Schéma et notations de la mise en équations des bielles de compression

→ L'Eurocode 2 6.2.3 fournit alors une expression de l'effort tranchant résistant dans ces bielles $V_{Rd,max}$:

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \quad (4)$$

avec α_{cw} un coefficient tenant compte de l'état de contrainte dans la membrure comprimée, b_w la largeur de la section droite dans la zone tendue, z le bras de levier des forces internes, v_1 un coefficient de réduction de la résistance du béton fissuré à l'effort tranchant, f_{cd} la résistance de calcul en compression du béton, θ l'angle entre la bielle de compression et la fibre moyenne de l'élément et α l'angle entre les armatures d'effort tranchant et la fibre moyenne de l'élément.

De plus, on a la relation géométrique que l'on peut tirer de la figure 5 :

$$n \cdot s = z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \quad (5)$$

avec $n = V_{Rd,max} / V_{Ed}$ et V_{Ed} l'effort tranchant agissant et s l'espacement des armatures transversales. Ce qui nous permet de relier $V_{Rd,max}$ à l'effort $F_{Rd,c}$ appliqué à la poutre et aux paramètres géométriques :

$$F_{Rd,c} = \frac{V_{Rd,max}}{n \cdot \sin \theta} = \frac{s \cdot V_{Rd,max}}{z \cdot \sin \theta \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)} \quad (6)$$

→ Ensuite, l'effort repris par les armatures transversales $V_{Rd,s}$ projeté sur la verticale est calculé comme suit :

$$F_{Rd,s} = \frac{V_{Rd,s}}{n \cdot \sin \theta} = A_{s\omega} \cdot f_{ywd} \Rightarrow V_{Rd,s} = \frac{A_{s\omega}}{s} f_{ywd} \cdot \sin \theta \cdot z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \quad (7)$$

avec $F_{Rd,s}$ l'effort repris par les armatures transversales sur l'axe de ces dernières, $A_{s\omega}$ la section des armatures transversales à une section donnée et f_{ywd} la limite d'élasticité de calcul des armatures d'effort tranchant. Ainsi le dimensionnement se fait sur la quantité $\frac{A_{s\omega}}{s}$:

$$\frac{A_{s\omega}}{s} = \frac{V_{Ed,(ELU)}}{z \cdot f_{ywd} \cdot \sin \theta \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)} \quad (8)$$

avec $V_{Ed,(ELU)}$ l'effort tranchant agissant calculé à l'ELU. Or, pour simplifier les calculs, les Eurocodes fixent $\theta = 45^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$, ce qui donne :

$$\frac{A_{s\omega}}{s} = \frac{V_{Ed,(ELU)}}{z \cdot f_{ywd} \cdot \cos \theta} \quad (9)$$

→ Puis, la partie 6.2.2 de l'Eurocode 2 indique que les armatures d'effort tranchant ne sont pas nécessaires si :

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,c} = b_w \cdot d \cdot [\max\{C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3}; v_{min}\} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \quad (10)$$

avec d la position verticale des armatures longitudinales, $C_{Rd,c} = 0.18/\gamma_c$ et γ_c le coefficient de sécurité pour le béton, $k = \min\left\{2; 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right\}$ (d en mm), $\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} \leq 0.02$ et A_{sl} la section des armatures tendues, f_{ck} la résistance caractéristique du béton en MPa, $v_{min} = \frac{0.053}{\gamma_c} k^{3/2} \sqrt{f_{ck}}$ pour les poutres, $k_1 = 0.15$ et $\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} < 0.2 f_{cd}$ (MPa) avec N_{Ed} l'effort normal agissant dans la section et A_c la section droite de béton (mm²).

→ Finalement, l'effort sollicitant V_{Ed} est donné par :

$$V_{Ed} = \min \begin{cases} V_{Rd,s} \\ V_{Rd,max} \\ V_{Rd,c} \end{cases} \quad (11)$$

On peut alors réduire la résistance d'une poutre à l'effort tranchant par celle de ses bielles de compression, que l'on dimensionne via la hauteur $h = s \cdot \sin \theta$ de ces bielles. S. Maintenaz [8] propose alors le critère d'optimisation suivant :

$$h_{opt, strut} = s_{opt} \cdot \sin \theta = \frac{z}{n} \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot \sin \theta = z \cdot \frac{\cos \theta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \theta}{\sin \alpha} \frac{1}{n} = z \cdot \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin \alpha} \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \quad (12)$$

avec h_{strut} la hauteur des entretoises (figure 5). Avec $\theta = 45^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$, on obtient :

$$h_{opt, strut} = z \cdot \cos \theta \cdot \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \quad (13)$$

Ce critère lui a permis de dimensionner une nouvelle forme de poutre, réduite à l'enrobage des aciers et à ces bielles (figure 6).



Figure 6 : Poutre optimisée [8]

Une telle poutre présente les mêmes propriétés mécaniques qu'une poutre pleine. Seule la raideur diminue, ce qui induit une flèche plus grande pour ce type de poutre. Cependant l'Eurocode n'impose pas de dimensionnement des poutres à la flèche.

L'optimisation sur le dimensionnement à l'effort tranchant permet de faire des gains sur les volumes de béton. Plus la poutre est courte et fine, moins, en rapport avec une poutre classique de dimensions équivalentes, il y a gain de béton. Les gains estimés par S. Maintenaz sont représentés en figure 7 [8].

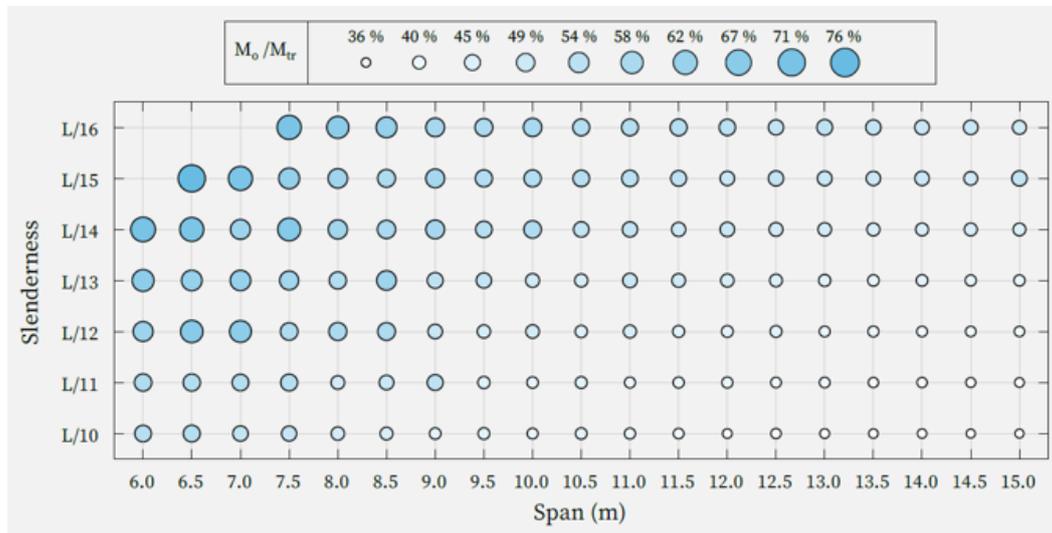


Figure 7 : Masse poutre optimisée / masse parallélépipède [8]

Ces poutres optimisées peuvent remplacer les poutres pleines sur les chantiers en cours ou à venir. S. Maintenaz et N. Metge ont obtenu de remplacer une poutre pleine par l'une de leur poutre optimisée (figure 8) dans le chantier de la gare de la ligne 18 de Massy-Palaiseau.

Gare de Palaiseau (L18)



Figure 8 : Inclusion d'une telle poutre dans le chantier de la gare de Massy-Palaiseau

Néanmoins la question de leur fabrication, abordée en partie 3, soulève de nouveaux problèmes.

1.4 - Profilé à inertie variable

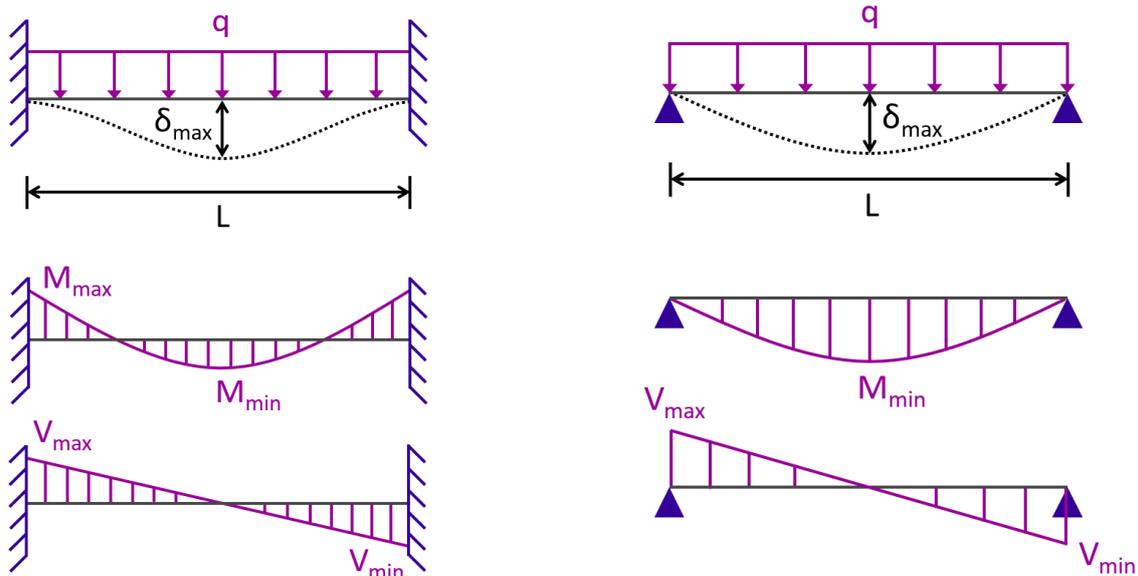
Pour construire des poutres en acier dans lesquelles la matière est mise aux endroits nécessaires, les techniques analytiques précédentes sont limitées car elles proposent des formes plus fragiles et plus soumises au flambement ou au déversement d'une poutre en acier. De manière à néanmoins adapter la forme à certains problèmes de portance ou de minimisation du poids, des profils à inertie variable peuvent être utilisés.

On citera le plafond de la verrière de la cour du Midi à Lyon (figure 9), sur lequel on peut remarquer des poutres plus hautes au niveau des poteaux, pour assurer la stabilité et la reprise des efforts, et plus fine en milieu de travée de manière à minimiser le poids de la structure.



Figure 9 : Profils à inertie variable pour la verrière de la cour du Midi, Lyon [9]

Une autre utilisation des profilés à inertie variable se retrouve dans certains tabliers de ponts. En effet, la charge répartie entre travées peut se modéliser grossièrement par les schémas de résistance des matériaux en milieu poutre de la figure 10, et justifie alors une poutre plus résistante en milieu de travée. Une inertie variable peut donc être mise en œuvre afin de ne pas surdimensionner ou alourdir tout le tablier tout en assurant la résistance de ce dernier.



(a) Poutre bi-encastrée

(b) Poutre bi-rotulée

Figure 10 : Schémas des Eurocodes pour des poutres à chargement réparti

C'est ce qui justifie la plus grande épaisseur de la poutre au niveau des appuis (poutre bi-encastree) de la verrière de la cour du Midi de Lyon. Pour une poutre bi-rotulee (figure 10b), la poutre est renforcee progressivement suivant le profil de moment. Ce type de profile a ete utilise, couple a un treillis, au debut des annees 1900 pour la construction des parties aeriennes du metro parisien (figure 11).



Figure 11 : Metro aerien parisien, les poutres en treillis sont plus epaisses au milieu de la portee qu'a l'appui des poteaux

1.5 - Optimisation de la structure dans sa globalite

L'optimisation de la structure globale peut passer par un choix d'elements structuraux plus efficaces et plus epures. Elle peut aussi se faire en anticipant la reutilisation du batiment, via un programme (destination du batiment) plus libre, laissant la possibilite d'un reamenagement du batiment ou d'un recyclage de la construction.

Un element structural, defini ici comme etant « efficace », est un element qui remplit une fonction constructive en utilisant le moins de ressources premieres. Lors d'une construction en beton, on cherche a obtenir une structure qui travaille principalement en compression, limitant ainsi des poutres en beton coulees plus larges pour qu'elles resistent en traction. Pour monter un batiment, une structure en poteaux-dalles (figure 12) plutot qu'un cube de beton avec des murs coules pleins repond a ce critere.

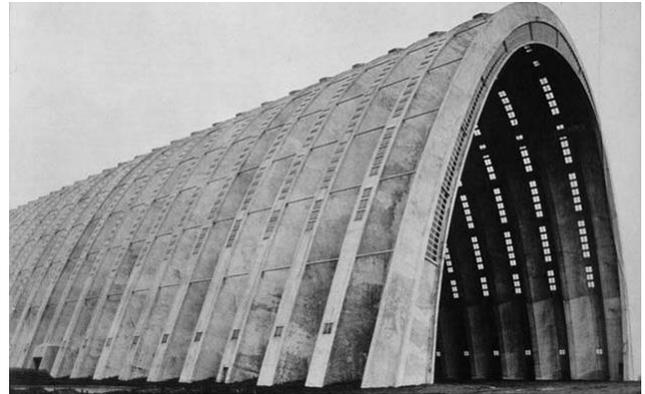


Figure 12 : Exemple de structure en poteau-plancher [10]

Cela confère aux bâtiments un style architectural épuré et élancé à l'exemple des constructions d'Eugène Freyssinet¹, père du béton précontraint, qui a fait confiance à son invention pour bâtir des édifices dans une économie de matériaux. Citons le pont Albert-Louppe, achevé en 1930 (figure 13a) intégrant des poutres similaires aux poutres optimisées de la partie 1.3, ou le hangar pour dirigeable à Orly de 1923 (figure 13b), qui mise sur une forme voûtée pour reprendre efficacement les efforts appliqués à la structure et transmettre les actions du vent en un effort de compression dans la voûte puis dans le sol.



(a) Pont Albert-Louppe, embouchure de l'Elorn, rade de Brest [11]



(b) Hangar de dirigeables, Orly [12]

Figure 13 : Exemple de constructions d'Eugène Freyssinet

L'utilisation des voûtes dans un processus d'optimisation de matière et d'épuration de la construction peut être facilement modélisée par un funiculaire de charges. Ce principe repose sur le principe de la chaînette inversée : la courbure d'une chaîne pendante entre deux points fixes est l'opposée de la courbure d'une voûte stable de mêmes dimensions. On peut alors utiliser cette propriété en suspendant des charges à une chaîne aux endroits où l'on veut que la voûte reprenne les charges et ainsi obtenir la forme à donner à la voûte. La méthode du funiculaire a été très utilisée par A. Gaudí² pour construire l'église de la Colonie Güell³. Sur la figure 14, on retrouve une reconstitution de l'impressionnant funiculaire.



Figure 14 : Reconstitution du funiculaire utilisé pour l'église de la Colonie Güell et le projet original dessiné par A. Gaudí [13]

¹ Eugène Freyssinet (1879,1962), ingénieur des ponts et chaussées français.

² Antoni Gaudí (1852-1926), architecte espagnol, principal représentant du modernisme catalan.

³ Ville ouvrière construite à Santa Maria de Cervello (Espagne), commande de Eusebi Güell (1846-1918), industriel catalan ; Gaudí y était chargé du projet de l'église.

Ces exemples architecturaux montrent qu'il est possible de réfléchir à une architecture économe, tout en restant esthétique et résistante. L'ancienneté des exemples vus ici appuie aussi le fait que ce type d'architecture s'est quelque peu perdue au profit d'une architecture financièrement économique.

2 - Optimisation numérique

Les méthodes informatiques permettent une optimisation des éléments architecturaux par l'obtention de formes complexes minimisant des critères donnés (volume, masse, ...) afin d'obtenir l'élément minimal satisfaisant un problème de résistance de structure quel que soit le matériau.

2.1 - Principe

L'optimisation numérique fonctionne par la minimisation d'un ou plusieurs critères lors de la résolution d'un problème de mécanique. On distingue trois types d'optimisation en fonction des formes admissibles par la résolution du problème :

- **Optimisation paramétrique** : définition de la forme globale de l'élément (cf partie 1.2)
- **Optimisation géométrique** : on fait évoluer les frontières d'une forme par la recherche d'optima locaux (exemple par la méthode en partie 2.2)
- **Optimisation topologique** : on autorise le changement topologique de la forme initiale (ajout et suppression de trous dans le matériau)

2.2 - Méthode d'homogénéisation SIMP

On présente ici une méthode d'homogénéisation possible : la méthode SIMP⁴ d'optimisation géométrique. Le principe est la répartition de densité de matériau dans l'espace, c'est-à-dire que le résultat est une carte indiquant le pourcentage de matériau à mettre en chaque point pour répondre au mieux au problème. Une telle méthode est dite d'homogénéisation, car chaque point de l'espace est considéré comme étant le matériau, mais avec des propriétés mécaniques évolutives. On définit donc la fonction spatiale de densité de matériau $\rho_e = x_e \cdot \rho_0$, où x_e est la densité adimensionnée, l'indice e indique un point de calcul.

Mise en place du problème

Pour poser un problème d'optimisation numérique mécanique, on procède en 5 points :

1. Identification des paramètres fixes (liaisons, chargement, éventuellement les caractéristiques matériau),
2. Identification des paramètres sur lesquels on va travailler (géométrie, matériau, ...),
3. Etablissement et expression d'un critère à respecter, très souvent une contrainte maximale dans le matériau et/ou un critère provenant des Eurocodes,
4. Définition du ou des paramètres à optimiser (volume, masse, ...),
5. Définition d'un espace dans lequel chercher les solutions.

Mécaniquement, on va s'intéresser à satisfaire l'équilibre local, avec σ_e le tenseur des contraintes en e , point du matériau, et f_e un chargement extérieur local :

⁴ Simple Isotropic Material with Penalization (matériau isotope simple avec pénalisation)

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}_e + f_e = 0$$

(Équilibre local)

Pour le critère du point 3, on se donne souvent une contrainte maximale σ_{\max} à respecter en tout point du matériau, par exemple la contrainte de Von Mises.

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^D : \sigma^D} \quad \text{où} \quad \sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma) \quad (\text{Von Mises})$$

avec σ^D la contrainte déviatorique.

Numériquement, il est plus facile de respecter des critères si ceux-ci sont formulés comme une fonction à maintenir négative en tout point. On a alors un critère de négativité sur la fonction g suivante :

$$g(\sigma) = \sigma_e - \sigma_{\max} \leq 0 \quad (14)$$

Pour le paramètre à optimiser, on retient ici un volume maximal V_0 que le matériau doit occuper dans l'espace donné Ω pour la simulation. On cherche à ce que la somme des éléments de volume de matériau définis à chaque itération reste inférieure à V_0 . On définit alors le critère :

$$\int_{\Omega} x \, dV - V_0 = \sum_{e \in \Omega} x_e V_e - V_0 \leq 0 \quad (15)$$

avec x la densité adimensionnée en un point de l'espace Ω .

Le problème numérique peut alors se résumer à ce système :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{K} \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \min_x c(x) : c(x) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N x_e^p \varepsilon_e^T k_e \varepsilon_e \\ \int_{\Omega} \rho(x) \, dV - V_0 \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

avec \mathbf{K} le tenseur d'élasticité du matériau et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ le tenseur des déformations, $c(x)$ la fonction objectif, $\rho(x)$ la densité continue sur l'espace Ω , ε_e et k_e les déformation et rigidité de l'élément e et p un facteur de pénalisation détaillé dans le paragraphe suivant. La deuxième équation est un critère provenant de l'équilibre local et la contrainte de Von Mises à respecter. Il manque alors la définition spatiale du matériau, que l'on définit dans le paragraphe suivant.

Pénalisation

La présence d'une répartition de densité plutôt que la présence ou non de matériau permet d'assurer la convergence et la stabilité de la solution en fonction de la finesse du maillage. Cependant une telle solution n'est pas réalisable avec un seul matériau : on impose alors un système de pénalisation des valeurs intermédiaires de densité pour n'obtenir que des valeurs proches de 0 ou de 1, afin d'obtenir une forme réalisable après lissage. On pose alors un paramètre de pénalisation p tel que $E_e = x_e^p E_0$ avec E_0 le module d'Young initial et E_e celui de l'élément e . Ainsi, les valeurs de densités intermédiaires correspondent à un très faible module d'Young, et sont dévalorisées. Plus p est grand, plus la forme obtenue est contrastée mais moins l'algorithme est efficace (convergence, rapidité).

On a alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \mathbf{K}\underline{\varepsilon} \\ \rho_e = x_e \rho_0 \quad E_e = x_e^p E_0 \\ \min_x c(x): c(x) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N x_e^p \varepsilon_e^T k_e \varepsilon_e \\ \int_{\Omega} \rho(x) dV - V_0 \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

Algorithme

Une implémentation de la méthode SIMP a été faite par Ole Sigmund⁵ en 99 lignes sur MatLab [14]. Son fonctionnement est schématisé en figure 15. Elle permet de se sensibiliser au fonctionnement de l'algorithme et à ses limites exposées dans le paragraphe suivant.

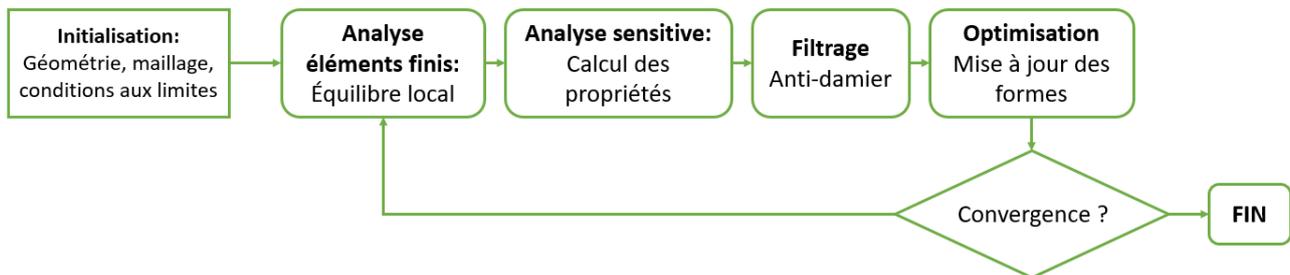


Figure 15 : Schéma de fonctionnement de l'algorithme d'optimisation SIMP

2.3 - Méthode des lignes de niveau

La méthode des lignes de niveau (level-set) est fondée sur l'évolution d'une forme initiale. Il n'y a ici plus de répartition de la densité du matériau, mais des trous initialement imposés dont la taille et la forme vont évoluer au fil des itérations.

Le suivi des contours de l'objet se fait suivant la dérivée de forme (notion qui requiert des connaissances mathématiques poussées), et une méthode de gradient pour la minimisation du critère. Cette méthode permet de modifier les frontières des trous, mais la solution est donc très dépendante de l'initialisation (figure 16). Il faut imposer un nombre suffisant de trous pour ne pas obtenir une solution trop simple, mais ce nombre est toutefois limité par le maillage (cf section 2.4).

⁵ Professeur danois (1966) de génie mécanique, dont les travaux se penchent sur les problèmes d'optimisation.

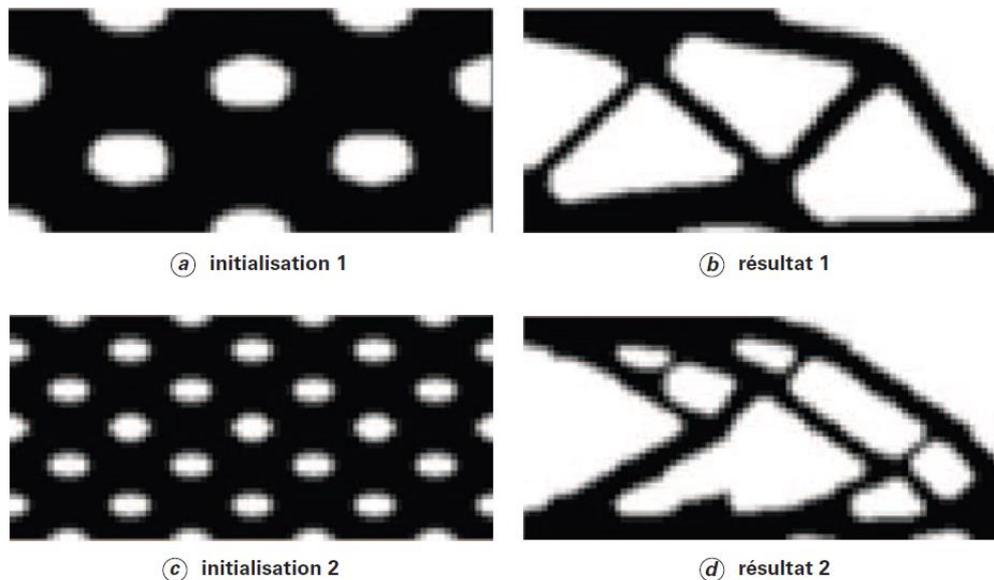


Figure 16 : Influence de l'initialisation topologique en optimisation numérique [15]

Cette méthode de résolution ne permet pas d'éviter des minima locaux, à l'inverse d'une méthode d'homogénéisation. La solution obtenue est dépendante de l'initialisation et de l'espace topologique dans lequel elle est cherchée.

2.4 - Limites et problèmes

Pénalisation

Comme vu précédemment, le choix du paramètre de pénalisation p résulte d'un compromis entre fabricabilité de la pièce solution et convergence de l'algorithme. La figure 17 illustre, via le code de O. Sigmund, trois choix de paramètre p .

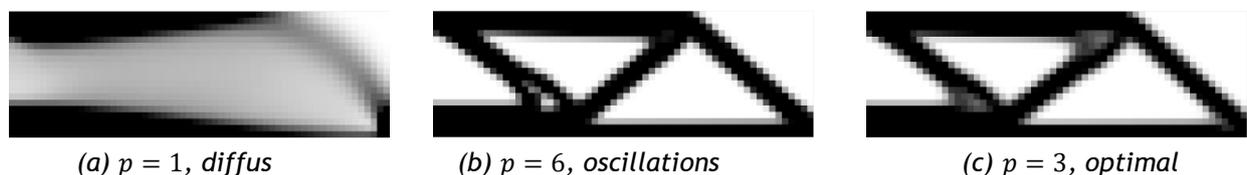


Figure 17 : Incidence de la valeur du paramètre de pénalisation

On note pour $p = 1$ une solution diffuse, composée essentiellement de densité de valeurs intermédiaires. À $p = 6$, l'algorithme oscille autour de deux solutions proches, mais n'arrive pas à converger. $p = 3$ est la valeur de pénalisation la plus souvent retenue.

Maillage

La définition du maillage pose problème car la forme étudiée évolue à chaque itération. On pourrait définir un maillage évolutif (lagrangien), qui suit les bords de la pièce de manière à pouvoir imposer plus justement les contraintes sur les bords libres du matériau, mais ceci nécessite un temps de calcul et une complexité algorithmique bien plus importante.

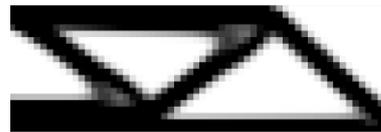
La finesse du maillage impose aussi un choix à faire. En effet, alors qu'on pourrait se dire que le maillage le plus fin donne les meilleurs résultats, c'est aussi lui qui offre la possibilité de formes plus détaillées. En optimisation topologique, c'est la finesse du maillage qui impose le nombre maximal admissible de trous dans le matériau, et donc la faisabilité de la pièce. On a alors tendance à privilégier un maillage fixe et grossier, en ajustant des filtres et post-traitements sur le résultat.

Filtres anti-damier

Le pavage de la solution par un damier de densité de matériau nulle et égale à 1 (figure 18) est un problème assez fréquent lors des itérations. On impose un filtre anti-damier pour éviter ces phénomènes. Ce filtre intervient après chaque itération et pondère la valeur de densité en tout point avec celle des points voisins.



(a) Sans filtre anti-damier



(b) avec filtre anti-damier

Figure 18 : Effet du filtre anti-damier dans l'implémentation de la méthode SIMP par Ole Sigmund

Autres considérations

Pour raffiner la résistance de la pièce obtenue, on peut prendre en compte d'autres critères, comme les concentrations de contraintes, la résistance au flambement, ou des fréquences propres de vibration à éviter, ...

3 - Fabrication de ces formes nouvelles

Lorsqu'on obtient des topologies de poutres optimisées et plus économes en béton, il s'agit de réussir à les fabriquer. Les poutres classiques parallélépipédiques présentent l'intérêt de leur facilité de moulage, facilité que l'on perd en cherchant des formes plus complexes.

3.1 - Coffrages et moules

Coffrages

La fabrication d'un élément optimisé peut être faite à l'instar des poutres classiques, par un coffrage, souvent réalisé en bois, qui contient le béton le temps de sa prise.

Cependant, autant un coffrage parallélépipédique est simple à réaliser et à mettre en place, autant un coffrage plus technique, comme celui du pont Albert-Loupe (figure 13a), nécessite une plus grande maîtrise et est difficilement réutilisable (figure 19).



Figure 19 : Construction avec coffrages (arc et tablier) du pont Albert-Loupe [16]

Le coût, la maîtrise requise et les possibilités limitées font du coffrage en bois une solution qui n'est plus retenue pour la mise en forme d'éléments optimisés.

Moules en argile

La solution retenue par S. Maitenaz [8] est d'imprimer le coffrage avec de l'argile (figure 20a). Le choix de l'argile crue s'explique par son recyclage possible : une fois sèche après le démoulage (figure 20b), l'argile crue peut être récupérée, concassée et réutilisée à hauteur de 95%.



(a) Moules imprimés en argile crue



(b) Poutre coulée à démouler

Figure 20 : Moules en argiles créés et utilisés par S. Maitenaz [8]

3.2 - Impression 3D béton

Le développement de l'impression 3D et des outils numériques permet aujourd'hui l'impression 3D, à plus grande échelle, du béton. Cette technique permet un placement rapide des masses suivant des formes très variables.

Machine

Le fonctionnement d'une imprimante béton est très similaire aux autres imprimantes 3D [17] : du béton frais est pompé et déposé couche par couche à l'endroit désigné par une tête d'impression fixée à un bras robotisé pouvant se déplacer dans l'espace. On retrouve ces éléments en figure 21 donnant un exemple d'imprimante 3D à l'échelle d'une maison individuelle construite à partir d'un plan numérique 3D.

Ce type d'outil pourrait alors être utilisé pour former des poutres optimisées sans avoir recours à la création de moules. Cependant, l'addition n'est pas une méthode constructive prise en compte dans les Eurocodes, ce qui limite son utilisation à grande échelle. En effet, la pose de béton par couches intervient dans la résistance de la structure finale (liaisons entre les couches). Au-delà du manque de norme dans les méthodologies de test de résistance d'un béton imprimé, on peut aussi citer la difficulté de formulation d'un béton adapté à la prise rapide imposée par l'impression, ou encore les coûts financier et énergétique d'un tel procédé comme facteurs limitants à sa standardisation. Ces points sont abordés dans les sections suivantes.

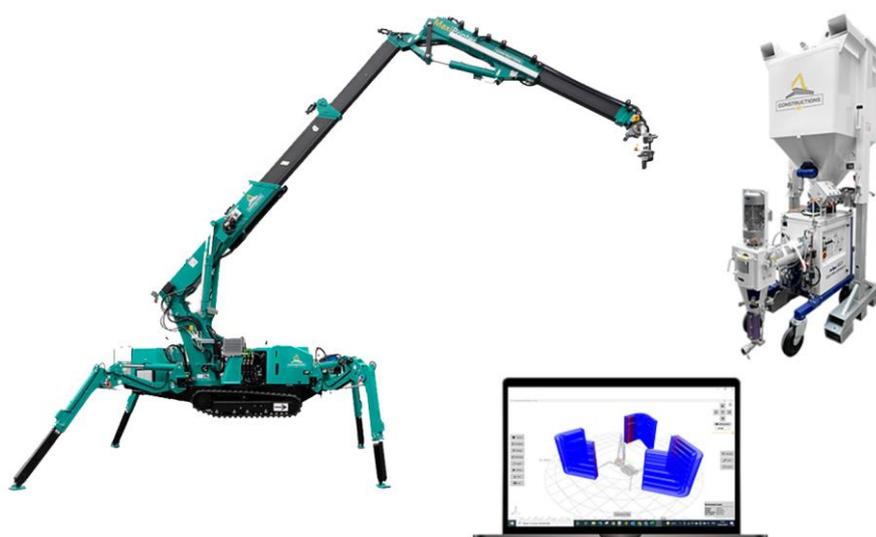


Figure 21 : Imprimante Maxiprinter de Constructions3D, le système de pompage automatisé et le modèle numérique 3D [18]

Matériau

Il est nécessaire de développer le matériau adapté à l'impression 3D. Le béton classique a un temps de prise bien trop long pour être coulé par couches. Le matériau adapté à l'impression 3D doit être un fluide pouvant rapidement prendre n'importe quelle forme, à prise rapide et dont les liaisons entre les différentes couches doivent assurer sa résistance.

Pour réussir à couler ce béton pour l'impression 3D, on va chercher à obtenir un fluide thixotropique, fluide dont la viscosité diminue sous contrainte, ce qui facilite le coulage du béton en des formes complexes. Laissé au repos, sa viscosité augmente, éventuellement jusqu'à la solidification (ici jusqu'à la prise).

Suivant ce principe, des laboratoires et entreprises ont alors développé des bétons autoplaçants, dont le comportement thixotropique est possible via une floculation et une défloculation des particules de béton sous contrainte [19]. L'entreprise *XtreeE*, soutenue par *LafargeHolcim* et à la pointe de l'impression 3D béton, montre que cette technique permet d'atteindre des formes impossibles en production classique, que ce soit pour réduire les quantités (figure 22a), ou pour atteindre des designs innovants (figure 22b).



(a) Déversoir d'orage à Lille



(b) Pavillon pour la Ville de Dubaï, projet

Figure 22 : Créations par *XtreeE* en impression 3D béton [20]

3.3 - Coût

Il est donc tout à fait possible de calculer des formes de poutres plus complexes qu'un parallélépipède et ayant les mêmes propriétés mécaniques, en revanche les problèmes de leur fabrication et surtout de son coût se posent. En effet, s'affranchir des moules standardisés nécessite des coûts énergétiques et financiers à ne pas négliger.

Actuellement les coûts sont tributaires du stade de développement des techniques de moulage ou d'impression, ces techniques innovantes requièrent des technologies de pointe coûteuses et une consommation électrique plus élevée qu'un moulage classique. Les surcoûts même mis en regard du gain de béton possible, n'entraînent pas de rentabilité en termes d'impact environnemental. Une vue très simplifiée de l'Analyse de Cycle de Vie faite par S. Maintenez sur des poutres optimisées se trouve figure 23 [8].



Figure 23 : Comparaison simplifiée des impacts environnementaux d'une poutre optimisée par rapport à ceux d'une poutre classique, à différents gains de béton [8]

Un fort rapport L/H (avec L la longueur de la poutre et H sa hauteur) implique des gains de béton importants, et inversement. Cependant il n'est pas toujours favorable, en termes d'impact environnemental, de chercher à optimiser chaque poutre, les technologies requises ainsi que le transport sont très impactants. Les chantiers actuels ne sont pas adaptés pour la réalisation d'éléments optimisés sur site, les matériaux doivent donc passer par une usine de préfabrication.

Construire des bâtiments économes en matière première passe par un travail architectural facilitant l'intégration des poutres optimisées, ou repensant la forme globale dans une démarche de "rationalité constructive" [21]. Cette rationalité s'obtient en mettant « le bon matériau au bon endroit ».

4 - Conclusion

L'utilisation du béton et de l'acier dans la construction est loin d'être révolue. Leurs avantages mécaniques et financiers, dus en partie à leur hyper-standardisation, en font les matériaux idéaux des grandes constructions. Cependant leur impact environnemental remet en cause leur utilisation à grande échelle, et fait croître une volonté de réduire leurs utilisations. Nous avons vu que cette réduction peut se faire à l'échelle d'un élément constructif, comme une poutre, dans lequel une grande partie du béton pourrait être économisée par un calcul plus juste du dimensionnement. Cette optimisation de la forme et des quantités peut être analytique pour des cas classiques, mais repose de plus en plus sur des méthodes d'optimisation numérique pouvant résoudre des problèmes d'optimisation respectant des critères complexes, en deux ou trois dimensions.

Cependant, la mise en œuvre de la solution d'un tel problème de minimisation de matière n'est pas triviale à réaliser, et c'est ce point qui limite l'utilisation de formes complexes dans la construction. En effet, le coût technologique élevé de la fabrication d'un élément de construction optimisé retarde son utilisation à grande échelle et confine son développement aux laboratoires.

Pourtant, de grandes avancées dans les machines d'impression 3D, ainsi que dans la chimie du béton sont en cours et pourraient amener à repenser l'intérêt des poutres parallélépipédiques. On remarque aussi qu'afin d'optimiser structurellement une construction, le recours au béton comme seul matériau n'apporte pas les meilleurs résultats en termes de minimisation du poids, du coût ni des performances mécaniques et énergétiques. Il peut alors être judicieux de se tourner vers des constructions mixtes, voire de nouveaux matériaux.

Une construction mixte actuellement prisée est le bois-béton. La forme la plus classique mélangeant ces deux matériaux est de construire les dalles en béton et les poteaux et poutres en bois (figure 24).

Les préoccupations climatiques poussent aussi à chercher de nouveaux matériaux constructifs, pouvant répondre à la double problématique de résistance structurelle et d'isolation, tout en maintenant un impact environnemental relativement faible. Citons :

- Le béton de chanvre, matériau biosourcé composé d'une matrice cimentaire dont les inclusions sont des fibres de chanvre. Les fibres végétales dans le ciment sont plus légères que les granulats classiques (masse volumique du béton classique $\approx 2400 \text{ kg/m}^3$, celle d'un béton de chanvre $\approx 400 \text{ kg/m}^3$), elles présentent aussi une faible conductivité thermique et un impact environnemental plus faible [23]. Le poids propre de la structure est donc limité, comme les dimensions des fondations et des éléments de reprise de charge, et le coût de transport. Cependant, la résistance en compression du béton de chanvre ($\sim 2 \text{ MPa}$ [24]) est nettement plus faible que celle d'un béton classique et est donc utilisé pour l'isolation des murs en étant associé à une ossature porteuse.
- La brique auto-isolante, en argile au faible impact environnemental et d'une grande recyclabilité, présente des avantages structurels et environnementaux. Sur la figure 26, les vides des briques sont remplis avec de la laine de roche pour l'isolation thermique, cet assemblage permet d'atteindre une résistance thermique $R = 4,56 \text{ m}^2\text{K/W}$ pour une épaisseur de 36 cm (similaire à la brique de chanvre). L'argile apporte aussi l'avantage d'un matériau perspirant, qui assure un confort thermique autant au niveau de la température que de l'humidité relative.



Figure 24 : Bâtiment construction mixte, poteaux et poutres en bois, dalle en béton (plateau de Saclay)



Figure 25 : Briques auto-isolantes Climamur [25]

Références :

[1]: X. Jourdain & H. Horsin Molinaro (2018). *Formulation d'un béton ordinaire*.

https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/formulation-dun-beton-ordinaire

[2]: A. Marlot, X. Jourdain & H. Horsin Molinaro (2022). *Béton bas carbone : Introduction aux enjeux modernes de l'industrie du béton*. https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/beton-bas-carbone-introduction-aux-enjeux-modernes-de-lindustrie-du-beton

[3]: Planétoscope - ConsoGlobe (2012). *La production mondiale de béton*.

<https://www.planetoscope.com/matieres-premieres/1374-production-mondiale-de-beton.html>

- [4]: C. Allain - 20minutes (2018). *Rennes : La très croyante Bretagne inaugure sa première église en 40 ans*. <https://www.20minutes.fr/rennes/2218923-20180211-rennes-tres-croyante-bretagne-inaugure-premiere-eglise-40-ans>
- [5]: Opération campus Bordeaux (2019). *Escabelle*. <https://operation-campus.u-bordeaux.fr/Renover-l-immobilier/Sur-le-domaine-universitaire/Campus-Montaigne-Montesquieu/Escabelle>
- [6]: P. Monti (1961). *Servizio fotografico (Torino, 1961)*. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=35591549>
- [7]: Wikipedia. *Palazzetto dello Sport*. https://es.wikipedia.org/wiki/Palazzetto_dello_Sport
- [8]: S. Maintenaz (2022). *Optimisation et fabrication numérique des structures en béton*. Thèse de doctorat. ENPC.
- [9]: nouveau Lyon (2018). *Hôtel-Dieu : J-8 avant l'ouverture*. <https://nouveaulyon.fr/2018/04/19/hotel-dieu-j-8-louverture/>
- [10]: F. Leroy - Batirama (2020). *Béton bas carbone : Rector revisite la structure poteaux-dalle*. <https://www.batirama.com/article/34820-beton-bas-carbone-rector-revisite-la-structure-poteaux-dalle.html>
- [11]: Se connaître - De l'introspection à la culture (2012). *Le pont Albert Louppe*. <https://mieux-se-connaître.com/2012/04/le-pont-albert-louppe/>
- [12]: anquiscopio (1923). *Hangars de dirigeables à Orly*. <https://arquiscopio.com/archivo/2013/02/02/hangares-para-dirigibles-de-orly/?lang=fr>
- [13]: Javiermes (2018). *Maqueta funicular de la iglesia de la colonia Güell usada por Gaudí.jpg*. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=70637666>
- [14]: O. Sigmund (2001). *A 99 line topology optimization code written in Matlab*. Structural and Multidisciplinary Optimization. 21(2):120-127.
- [15]: L. Arnaud (2023). *Optimisation topologique - Design organique pour la fabrication additive*. Techniques de l'Ingénieur. Réf. BM7987 V1.
- [16]: Académie de Versailles (2009). *Le pont Albert-Louppe - Héritage du temps*. <https://fr.slideshare.net/technopujades/pont-albert-louppe>
- [17]: B. Anglade & D. Comberton (2018). *Impression 3D : présentation générale*. https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/impression-3d-presentation-generale
- [18]: Construction3D (2024). *MAxiPrinter*. <https://www.constructions-3d.com/la-maxi-printer>
- [19]: Z. Toutou, M. Cador, N. Roussel, L. D'Aloia Schwartzebtruber, É. Vilbé & R. Le Roy (2005). *Rhéologie des bétons autoplacants - Évaluation de la thixotropie*. BULLETIN DES LABORATOIRES DES PONTS ET CHAUSSEES - 258-259. Réf.4599. pp.15-27.
- [20]: XtreeE - The large-scale 3D. <https://xtreee.com/>
- [21]: K. Dana - d'a (2022). *Contre la surconsommation de béton, la structure comme performance*. Entretien avec Colin Reynier et Léonard Lassagne. <https://www.darchitectures.com/2-7-contre-la-surconsommation-de-beton-la-structure-comme-performance-entretien-avec-colin-reynier-et-leonard-lassagne-a5869.html>
- [22]: L. Loulou (2013). *Durabilité d'un assemblage mixte bois-béton collé sous chargement hydrique*. Thèse de doctorat. Paris-Est.

[23]: Cerema (2021). *Performance énergétique des bâtiments : une étude montre que le béton et chanvre consomme très peu d'énergie*. <https://www.cerema.fr/fr/actualites/performance-energetique-batiments-etude-beton-chanvre>

[24]: J. Page, M. Sonebi & S. Amziane (2016). *Étude expérimentale des propriétés d'un béton de chanvre incorporant un adjuvant viscosant*. *Revue des composites et des matériaux avancés*. N° 3-4/2016, 349-366.

[25]: Climamur (2024). *Les briques Climamur®*. <https://www.climamur.fr/Climamur-gamme-produit/Briques-Climamur.html>