

Caractérisation de la variabilité de la résistance en traction de bâtonnets en bois

Culture Sciences
de l'Ingénieur

Xavier JOURDAIN - Hélène HORSIN MOLINARO

Édité le
16/01/2023

école
normale
supérieure
paris-saclay

Lors de la conception d'un ouvrage, un bureau d'ingénierie a besoin de caractéristiques matériaux. L'estimation de la résistance en traction de bâtonnets en bois permet d'appréhender cette problématique tout en sensibilisant à la notion de variabilité.

Pour traiter un ensemble de valeurs de résistance en traction, deux méthodes peuvent être employées :

- estimer la moyenne et l'écart-type de la population des résultats expérimentaux via des formules mathématiques puis modéliser la répartition par la loi log-normale associée ;
- minimiser l'écart entre une loi log-normale et l'histogramme des résultats expérimentaux en faisant varier la moyenne et l'écart-type de cette loi afin d'identifier la loi la plus appropriée.

L'objectif dans cette étude est de déterminer la résistance caractéristique en traction du bois composant des bâtonnets. La notion de « caractéristique » en génie civil se reporte généralement au quantile inférieur à 5% de l'ensemble de la population (i.e. si une infinité de tests étaient réalisés, seulement 5% des valeurs obtenues seraient inférieures à ce quantile).

La loi de probabilité utilisée dans cette ressource est la loi log-normale particulièrement adaptée aux propriétés mécaniques ou de transfert des matériaux [1]. D'autres phénomènes, comme la hauteur de neige ou le poids volumiques des matériaux peuvent être modélisés par une loi normale [2].

1 – Campagne d'essai

La campagne d'essai porte sur 76 bâtonnets en bois sollicités en traction pure jusqu'à rupture (dispositif d'essai présenté sur la figure 1). Les efforts de rupture obtenus ont été relevés et sont donnés dans l'annexe « *Resultats_Exp_Traction_Fmax.csv* » disponible en annexe de cette ressource [3].

La variabilité est étudiée sur la résistance en traction ainsi obtenue.



Figure 1 : Dispositif d'essai en traction des bâtonnets en bois, source [1]

2 – Estimation d'un écart-type et d'une moyenne

Dans cette première approche, la moyenne μ et l'écart-type σ de la population des résultats expérimentaux sont estimés via des formules mathématiques puis une exploitation de la loi normale associée permet d'identifier le quantile des valeurs inférieures à 5% de l'ensemble de la population.

Cette estimation, disponible en annexe de cette ressource [3], est basée sur le fichier « *Caracterisation_Variabilite_essais_Loi_LogNormale_exp.py* ».

Les résultats obtenus pour la caractérisation des efforts maximaux sont les suivants :

- moyenne (fonction moyenne() sous excel) $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1389 \text{ N}$
- écart-type sans biais pour une population complète mais avec biais pour une population incomplète (fonction ecartypep() sous excel) $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} = 337,5 \text{ N}$
- écart-type sans biais pour une population incomplète (fonction ecartype() sous excel)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} = 339,7 \text{ N}$$

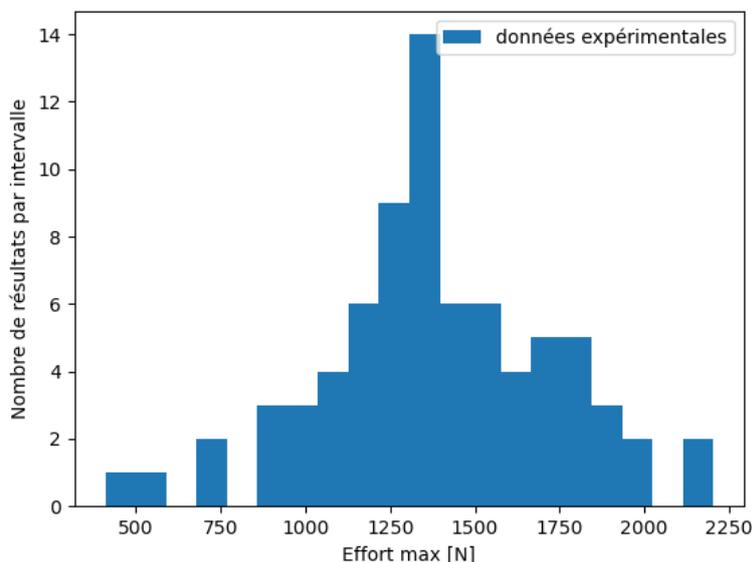


Figure 2 : Répartition des 76 résultats expérimentaux (en nombre)

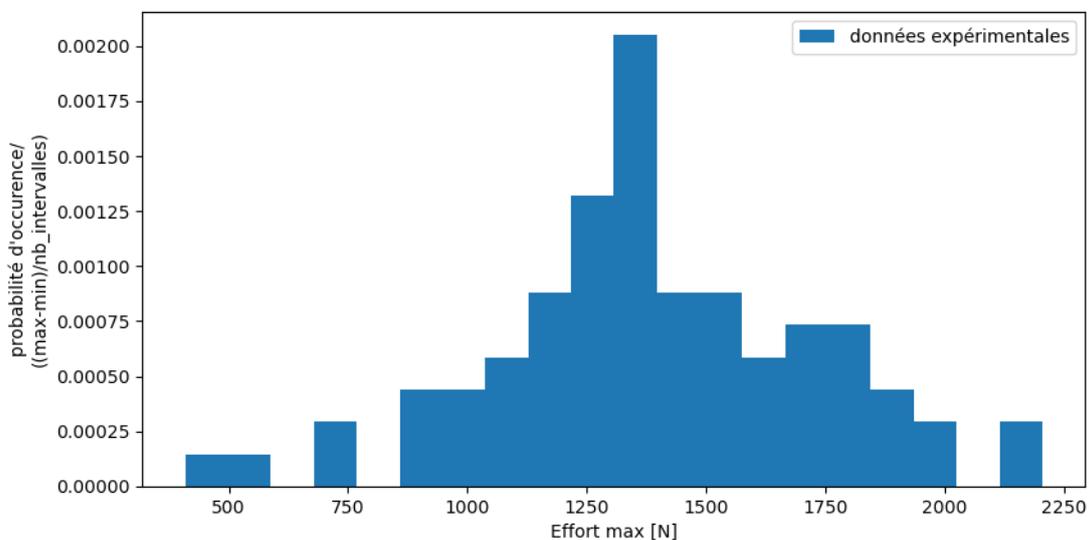


Figure 3 : Répartition des 76 résultats expérimentaux (intégrale à 1)

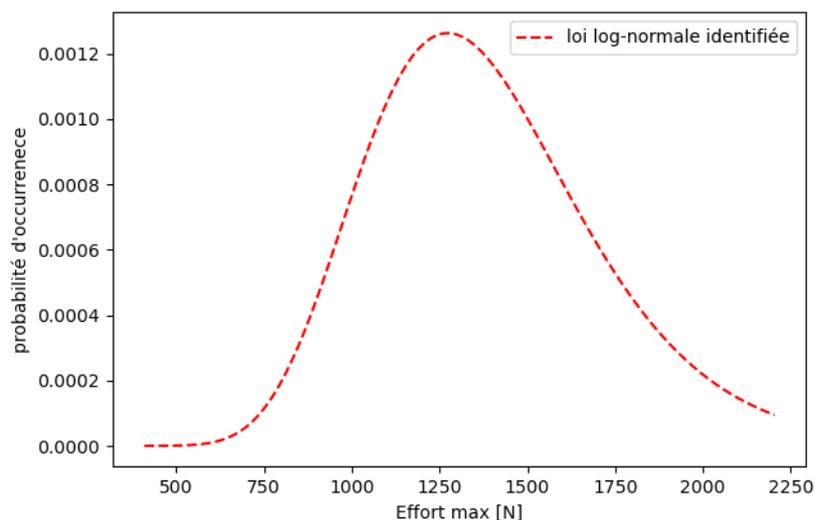


Figure 4 : Loi log-normale identifiée

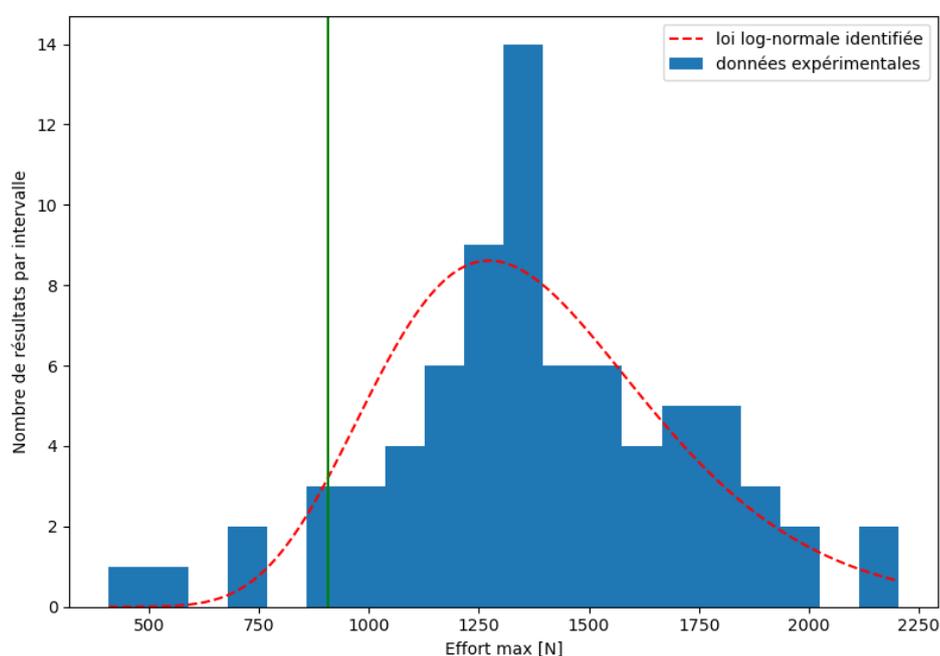


Figure 5 : Répartition des 76 résultats expérimentaux (en nombre) [erreur relative : 10,69%]

La loi log-normale identifiée à partir de la moyenne et de l'écart-type obtenus à partir de 76 valeurs expérimentales, possède 95.0% de ses valeurs au-dessus de 829,9 N.

3 – Identification d'un couple (moyenne, écart-type) pour minimiser l'écart entre un histogramme de valeur et une loi log-normale

Dans cette seconde approche, l'écart au sens des moindres carrés entre une loi log-normale et l'histogramme des résultats expérimentaux est minimisé en faisant varier la moyenne et l'écart-type de cette loi à identifier. Cette étude se base sur le fichier « *Caracterisation_Variabilite_essais_exp_Loi_LogNormale_par_optimisation.py* » disponible en annexe de cette ressource [3].

Observation de la fonction coût à minimiser

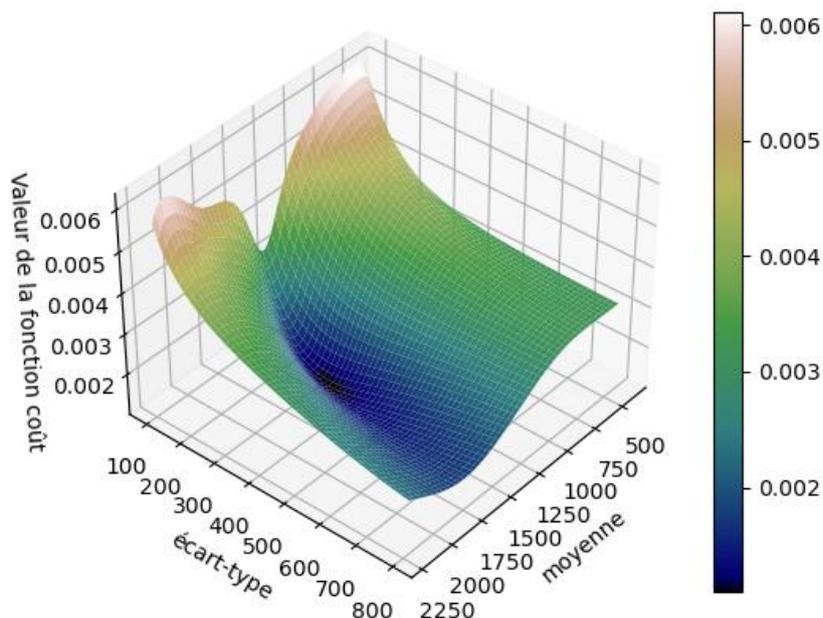


Figure 6 : Fonction coût à minimiser

Comme le montre la figure ci-dessus représentant la fonction coût (au sens des moindres carrés) à minimiser, il semble bien qu'il existe un minimum global pour un couple (moyenne ; écart-type).

Le couple (moyenne ; écart-type) qui permet de minimiser cette fonction est (1441,8 ; 320,7) N.

Les courbes obtenues avec ces valeurs sont données ci-dessous.

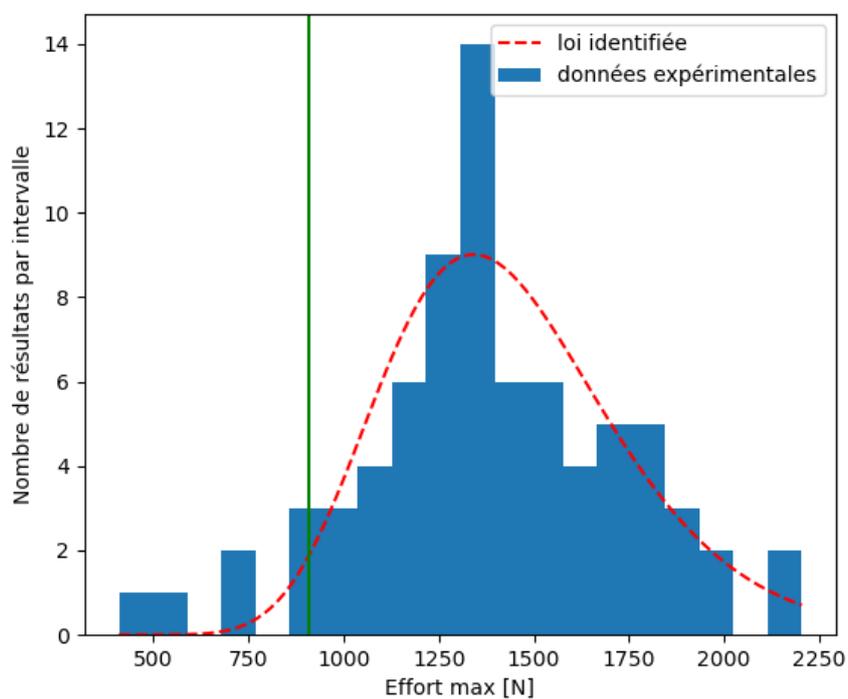


Figure 7 : Répartition des 76 résultats expérimentaux (en nombre) [erreur relative : 0,11%]

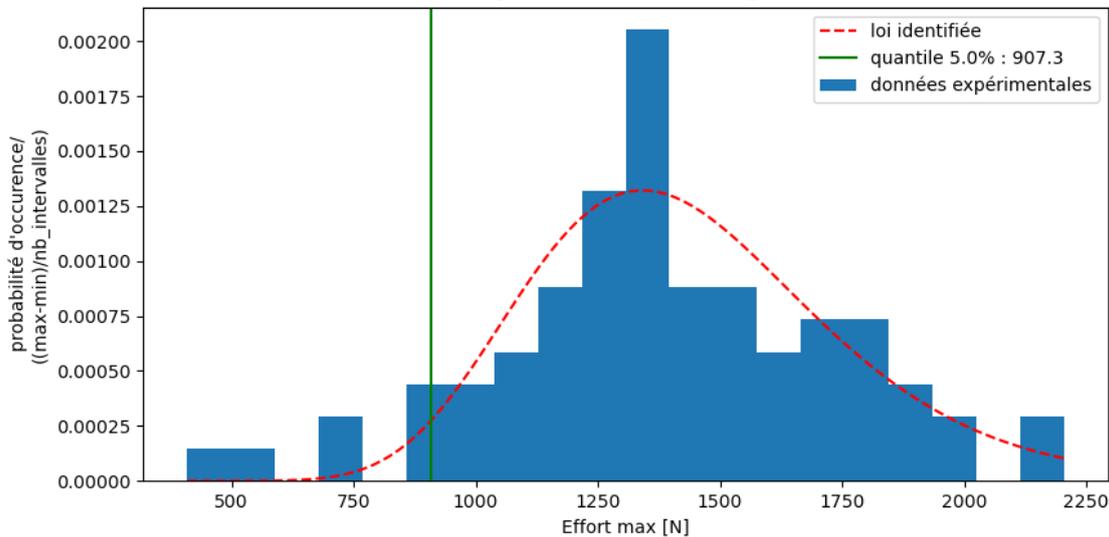


Figure 8 : Répartition des 76 résultats expérimentaux (intégrale à 1) [erreur relative : 0,11%]

Avec cette approche, 95.0% des valeurs de la loi identifiée sont au-dessus de 907,3 N (contre 829,9 N pour la première approche).

Si le nombre d'échantillons étaient infinis, les quantiles inférieurs à 5% de la population complète seraient identiques pour les deux approches. Cette étude permet de sensibiliser au fait que n'ayant jamais une infinité de mesures à disposition, il est important de mettre des coefficients de sécurité sur les caractéristiques matériaux utilisés par les ingénieurs. C'est sur une approche probabiliste que sont définis ces coefficients de sécurité dans les Eurocodes, ensemble de normes que doivent respecter les ingénieurs qui dimensionnent les ouvrages de Génie Civil.

Références :

[1]: Variabilité des propriétés du béton : caractérisation expérimentale et modélisation probabiliste de la lixiviation, thèse sur Thomas de Larrard, 2010,

https://www.irsn.fr/FR/Larecherche/Formation_recherche/Theses/Theses-soutenues/DSU/Pages/2010-de-larrard-variabilite-proprietes-beton-caracterisation-experimentale-modelisation-probabiliste-lixiviation.aspx#.YepyNt_jluV

[2]: Variables aléatoires continues, ressources.unit, consulté en janvier 2021,

http://ressources.unit.eu/cours/cyberrisques/etage_3_frederic/co/Module_Etage_3_14.html

[3]: Annexes Caractérisation de la variabilité de la résistance en traction de bâtonnets en bois :

- Resultats_Exp_Traction_Fmax.csv
- Caracterisation_Variabilite_essais_Loi_LogNormale_exp.py
- Caracterisation_Variabilite_essais_exp_Loi_LogNormale_par_optimisation.py

X. Jourdain, H. Horsin Molinaro, https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/caracterisation-dela-variabilite-en-traction-de-batonnets-en-bois

Ressource publiée sur Culture Sciences de l'Ingénieur : <https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay>