

Étude approfondie d'un banc de torsion/traction : étude théorique

Cette ressource est issue d'une séance de travaux pratiques portant sur l'étude d'un banc d'essai dédié à l'étude du comportement à la traction et/ou à la torsion d'éprouvettes métalliques.

Cette ressource présente l'étude théorique des modèles employés lors d'une campagne d'essais sur un banc de torsion/traction. Ce banc est exposé dans la ressource « *Étude approfondie d'un banc de torsion/traction : présentation* » [1], les objectifs, les manipulations ainsi que les incertitudes y sont également détaillés. La ressource « *Résultats expérimentaux* » [2] synthétise les résultats obtenus à l'issue de la campagne d'essai.



Figure 1 : Le banc de torsion/traction

Cette ressource détaille les modèles employés afin de déterminer :

- La relation entre le moment de torsion M_T et la rotation maximale de l'éprouvette θ_L en élasticité linéaire;
- L'effort normal N_L appliqué à l'éprouvette ;
- Les contraintes principales σ_I , σ_{II} et σ_{III} appliquées à l'éprouvette ;
- Le moment de torsion $M_{T,pl}$ menant à la plastification, d'après les critères de Tresca et von Mises ;
- Le moment de torsion M_T appliqué par le banc d'essai, à partir de la différence de déformation $\Delta\varepsilon$ mesurée par le montage en pont complet ;
- Les valeurs des contraintes réelles et principales, à partir des déformations ε_a , ε_b et ε_c mesurées par les rosettes à 45° .

1 – Comportement en élasticité linéaire (modèle 1D)

Sous l'hypothèse de Saint-Venant (les sections droites restent planes), l'éprouvette métallique peut être modélisée par une poutre de longueur L [m], de section S [m²], de module d'élasticité E [MPa], de module de cisaillement μ [MPa], et de moment d'inertie en rotation I_0 [m⁴] (figure 2).

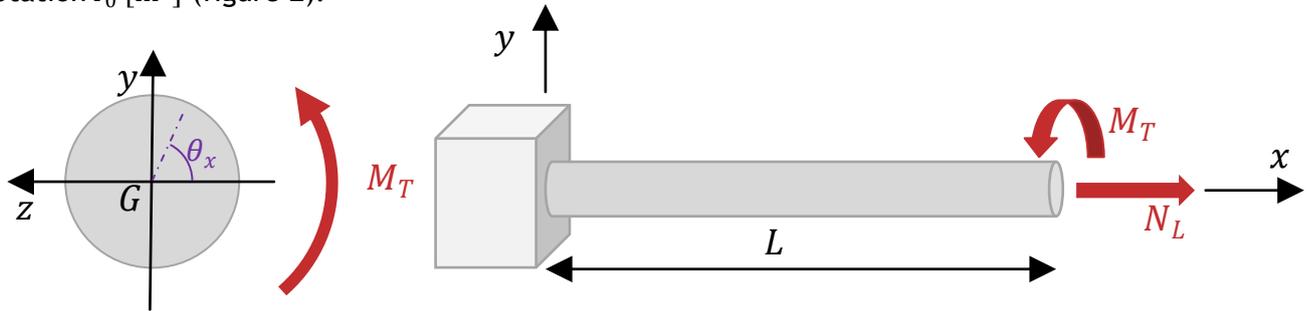


Figure 2 : Modèle mécanique de l'éprouvette métallique

Une rotation θ_L et un effort normal N_L sont appliqués en $x = L$, tandis que l'éprouvette est encadrée en $x = 0$.

Conditions aux limites :

- $\theta_x(x = 0) = 0$;
- $u_x(x = 0) = 0$;
- $\theta_x(x = L) = \theta_L$;
- $N_x(x = L) = N_L$.

1.1 - Sollicitations

La poutre est uniquement sollicitée en $x = L$, i.e. (1) :

$$M_T(x) = M_T = C^{te} \quad \& \quad N_x(x) = N_L = C^{te} \tag{1}$$

La figure 3 donne les sollicitations appliquées à l'éprouvette.

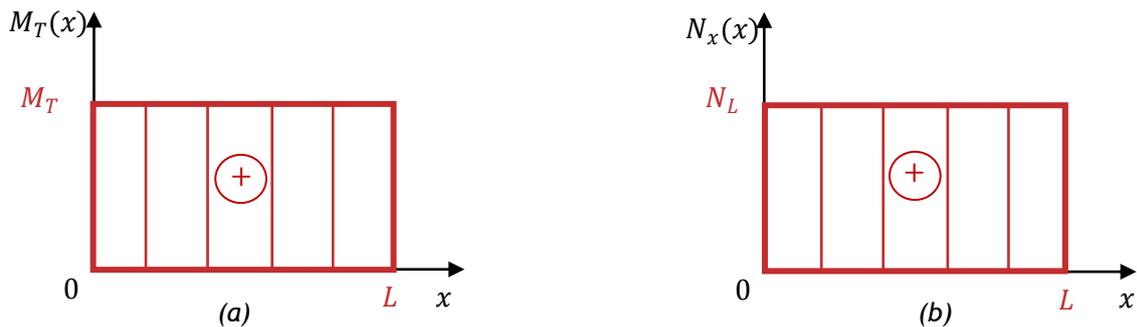


Figure 3 : (a) Moment de torsion et (b) effort normal dans l'éprouvette

De plus, les lois de comportement en torsion et en traction sont définies par les équations (2) et (3).

$$\frac{d\theta_x(x)}{dx} = \frac{M_T(x)}{\mu I_0} \tag{2}$$

$$\frac{du_x(x)}{dx} = \frac{N_x(x)}{ES} \tag{3}$$

Après intégration et prise en compte des conditions aux limites, on obtient par conséquent les expressions de θ_x et u_x ((4) & (5)). Leur évolution est représentée figure 4.

$$\theta_x(x) = \frac{M_T}{\mu I_0} x = \theta_L \frac{x}{L} \quad (4)$$

$$u_x(x) = \frac{N_L}{ES} x \quad (5)$$

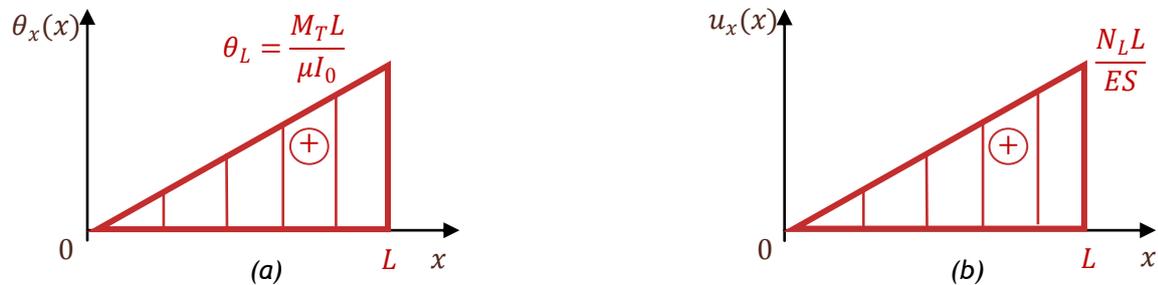


Figure 4 : (a) Rotation axiale et (b) déplacement normal de l'éprouvette

L'équation (6) donne ainsi la relation théorique entre le moment de torsion M_T et la rotation θ_L (mesurés via le banc d'essai).

$$M_T = \frac{\mu I_0}{L} \theta_L \quad (6)$$

Notes :

- Le module de cisaillement μ est relié au module d'élasticité E et au coefficient de poisson ν par la relation (7).

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (7)$$

- L'équation (8) donne la valeur du moment d'inertie en torsion I_0 dans le cas où la section est circulaire de diamètre D .

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{32} \quad (8)$$

- L'équation (9) donne quant-à-elle l'expression de I_0 dans le cas où la section est circulaire, creuse, de diamètre extérieure D_e et de diamètre intérieur D_i .

$$I_0 = \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{32} \quad (9)$$

1.2 - Contraintes

La contrainte normale σ_{xx} induite par l'effort de traction N_L est définie par la relation (10).

$$\sigma_{xx} = \frac{N_L}{S} \quad (10)$$

La relation (11) donne quant-à-elle la contrainte de cisaillement $\tau_{\theta x}$ induite par le moment de torsion M_T , dans le cas où la section est circulaire.

$$\tau_{\theta x}(r) = \mu\gamma = \frac{M_T}{I_0} r \quad (11)$$

Avec $\gamma = \frac{d(r\theta_x)}{dx}$ la distorsion générée par la rotation de la section [rad].

Note : dans le cas où la section est un profil mince fermé, et en admettant $\tau_{\theta x}$ constant et tangent au contour moyen de la section Γ , $\tau_{\theta x}$ est défini par la relation (12).

$$\tau_{\theta x} = \frac{M_T}{2eS_i} \quad (12)$$

Avec e l'épaisseur de la membrane [m] et S_i la section à l'intérieur du contour moyen [m²] (figure 5).

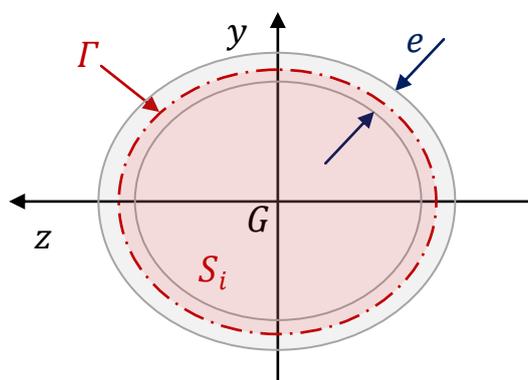


Figure 5 : Géométrie d'un profil mince fermé

2 – Expression de l'effort normal N_L appliqué à l'éprouvette

L'effort normal N_L est appliqué à l'éprouvette suivant le schéma mécanique détaillé figure 6. L'application d'une charge verticale P (à l'aide de masses) induit un moment, qui, grâce à une différence de longueur de bras de levier, génère un effort N_L dans l'éprouvette (avec $N_L > P$).

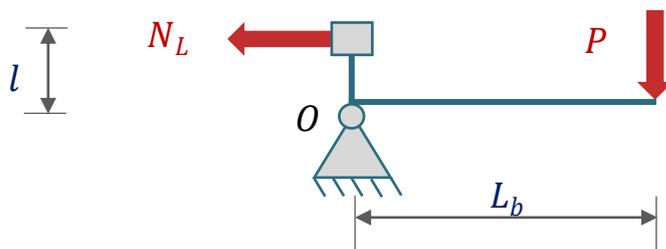


Figure 6 : Schéma mécanique du banc de chargement en traction

En écrivant l'équilibre en moments par rapport à O , on obtient ainsi la relation (13).

$$\sum M_{/O} = 0 = N_L l - P L_b \quad \text{soit} \quad N_L = P \frac{L_b}{l} \quad (13)$$

La mesure des dimensions du banc d'essai a permis d'identifier les longueurs suivantes :

- $l = (10,2 \pm 0,2)$ cm ;
- $L_b = (45,5 \pm 0,2)$ cm.

Ce qui donne un rapport $\xi = \frac{L_b}{l} = (4,46 \pm 0,02)$ entre la charge P appliquée sur le support et l'effort normal N_L appliqué à la barre.

Expression des contraintes principales

L'éprouvette métallique est sollicitée par une contrainte normale σ_{xx} , ainsi que par une contrainte tangentielle $\tau_{\theta x}$. La relation (14) donne la forme du tenseur des contraintes.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{x\theta} & 0 \\ \tau_{\theta x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Les contraintes principales σ_I , σ_{II} et σ_{III} sont quant-à-elles définies comme les racines du polynôme caractéristique de $\underline{\underline{\sigma}}$ ((15) et (16)).

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_i \underline{\underline{1}}) = 0 \quad (15)$$

Soit :

$$-\sigma_i(\sigma_i^2 - \sigma_i \sigma_{xx} - \tau_{\theta x}^2) = 0 \quad (16)$$

Les expressions de σ_I , σ_{II} et σ_{III} sont par conséquent données par la relation (17).

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{\theta x}^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{III} = 0 \quad (17)$$

3 – Calcul du moment de torsion à la plastification

Afin de s'assurer de pouvoir plastifier (ou non) la section, il est nécessaire d'estimer avant la réalisation de l'essai le moment de torsion $M_{T,pl}$ menant à la plastification. Cette valeur peut être quantifiée par rapport aux critères de Tresca et/ou von Mises. Ce paragraphe détaille la méthode employée pour estimer sa valeur, en fonction des données du problème.

3.1 - Contrainte tangentielle à la plastification d'après le critère de Tresca

L'équation (18) donne l'expression du critère de Tresca, en fonction de la résistance élastique σ_y [MPa] du matériau.

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_y \quad (18)$$

Soit, dans le cas d'étude considéré (19) :

$$|\sigma_I - \sigma_{II}| = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{\theta x}^2} \leq \sigma_y \quad (19)$$

L'expression de $\tau_{\theta x,pl}$ est ainsi déduite en fixant $|\sigma_I - \sigma_{II}| = \sigma_y$ (20).

$$\tau_{\theta x,pl} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_y^2 - \sigma_{xx}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_y^2 - \left(\frac{N_L}{S}\right)^2} \quad (20)$$

3.2 - Contrainte tangentielle à la plastification d'après le critère de von Mises

Le critère de von Mises est donné par l'équation (21).

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2)} \leq \sigma_y \quad (21)$$

D'où l'on déduit l'expression de $\tau_{\theta x,pl}$ (22).

$$\tau_{\theta x,pl} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 - \sigma_{xx}^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_y^2 - \left(\frac{N_L}{S}\right)^2} \quad (22)$$

La figure 7 donne la représentation des critères de Tresca et von Mises dans le repère des contraintes principales (σ_I, σ_{II}), ainsi que la position des points correspondants au chargement ($\sigma_{xx}, \tau_{\theta x,pl}$).

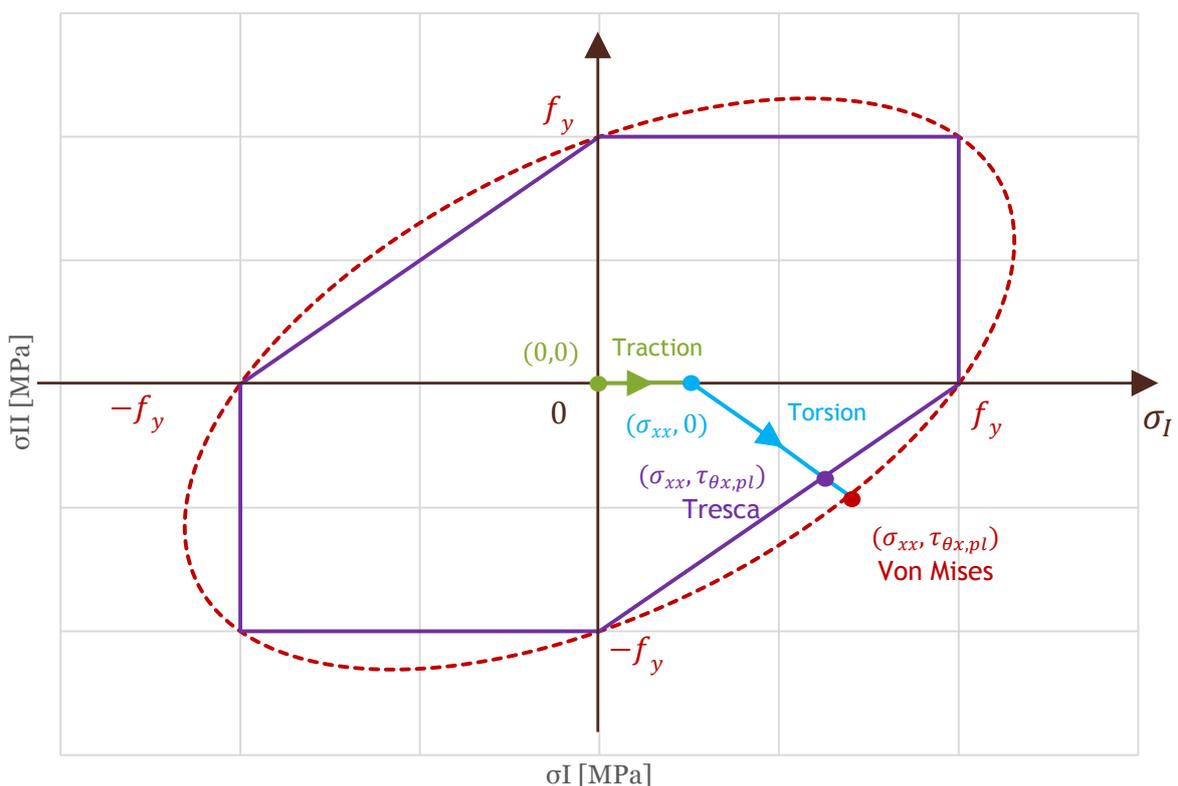


Figure 7 : Représentation des critères de Tresca et von Mises et évolution du chargement durant l'essai.

Les moments de torsion à la plastification peuvent alors être déduits, pour chacun des critères employés, en utilisant les équations (11) et (12) (en fonction de la géométrie de la section).

4 – Mesure du moment de torsion à partir d'un montage en pont complet

Outre les mesures de la rotation axiale θ_L et du moment de torsion M_T réalisables directement depuis le banc d'essai (à l'aide du repère gradué pour la rotation et du comparateur pour le moment de torsion), il est également possible d'instrumenter les barres à l'aide d'un montage en pont complet (figure 8), permettant de mesurer au milieu de la barre (en $L/2$) deux fois la distorsion maximale γ_{max} (en $r = R$ dans le cas d'une éprouvette cylindrique).

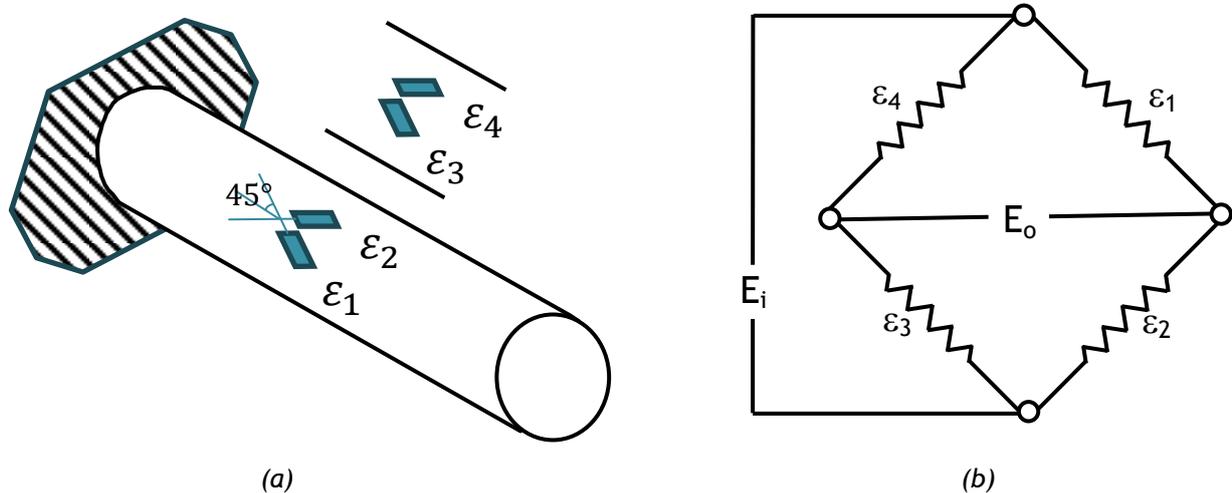


Figure 8 : Montage en pont complet, (a) positionnement des capteurs et (b) schéma électrique, source [3]

À partir du schéma électrique du pont complet, nous pouvons démontrer (voir l'encadré ci-après *Démonstration de l'expression du pont complet*) l'équation (23), liant les tensions d'entrée et de sortie en fonction des déformations des jauges.

$$E_0 = E_i K \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4)}{4 + 2K(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)} \quad (23)$$

Or, les déformations mesurées peuvent s'exprimer en fonction de la distorsion (24).

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{\gamma}{2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -\frac{\gamma}{2} \quad (24)$$

Par conséquent, l'équation (23) peut se réécrire sous la forme suivante (25).

$$E_0 = \frac{E_i K}{4} 2\gamma \quad (25)$$

La sortie de l'indicateur de déformation nous fournit une valeur correspondant à 2γ (26).

$$\varepsilon_{mesurée} = \frac{4E_0}{E_i K} = 2\gamma \quad (26)$$

La distorsion γ_{max} est définie telle que $\gamma_{max} = \frac{\varepsilon_{mesurée}}{2} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| = |\varepsilon_3 - \varepsilon_4|$. Dans le cas où la section de l'éprouvette est circulaire, on obtient ainsi (27) :

$$\gamma_{max} = \frac{\varepsilon_{mesurée}}{2} = \frac{RM_T}{\mu I_0} \quad (27)$$

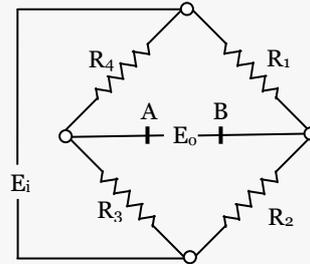
Soit, en considérant les équations (26) et (27) :

$$M_T = \frac{\pi ER^3}{4(1+\nu)} \gamma_{max} = \frac{\pi ER^3}{8(1+\nu)} \varepsilon_{mesurée} \quad (28)$$

Nous obtenons, par conséquent l'expression du moment de torsion en fonction de la déformation mesurée par le montage en pont complet.

Démonstration de l'expression du pont complet

La figure ci-dessous présente la définition du pont Wheatstone utilisé pour le montage en pont complet.



Nous cherchons à déterminer l'expression de la tension de sortie E_o en fonction de la tension d'entrée E_i et des déformations fournies par les jauges. Partons de l'expression (a).

$$E_o = V_A - V_B \quad (a)$$

En utilisant le pont diviseur de tension on peut exprimer les potentiels V_A et V_B (b) :

$$V_A = E_i \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) \quad \& \quad V_B = E_i \left(\frac{R_2}{R_2 + R_1} \right) \quad (b)$$

Nous exprimons ainsi la tension de sortie en fonction des résistances de chaque jauge (c) :

$$E_o = E_i \left(\frac{R_3 R_1 - R_2 R_4}{(R_3 + R_4)(R_2 + R_1)} \right) \quad (c)$$

Considérons dans un premier temps qu'initialement les jauges ont une résistance identiques tel que $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4$. Dans un second temps, nous considérons que chaque jauge subit une déformation donc les résistances varient tel que R_i devient $R_i + \Delta R_i$. En posant $\delta_i = \frac{\Delta R_i}{R_i}$ et en négligeant les termes d'ordre 2 (δ_i^2), nous obtenons l'équation (d).

$$E_o = E_i \left(\frac{\delta_1 + \delta_3 - \delta_2 - \delta_4}{4 + 2(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)} \right) \quad (d)$$

Enfin, nous exprimons les termes $\delta_i = K \varepsilon_i$ pour obtenir l'équation (e).

$$E_o = E_i K \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4)}{4 + 2K(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)} \quad (e)$$

5 – Dépouillement des rosettes à 45°

Afin de déterminer les contraintes appliquées au matériau, il est également possible de mettre en place des rosettes à 45° (figure 9). Ces rosettes permettent de mesurer les déformations ε_a , ε_b et ε_c dans trois directions différentes, respectivement orientées à 0°, 45° et 90°. À partir de ces mesures, il est ainsi possible de déterminer les déformations principales ε_I , ε_{II} et ε_{III} , ainsi que les contraintes principales σ_I , σ_{II} et σ_{III} et réelles σ_{xx} et $\tau_{\theta x}$.

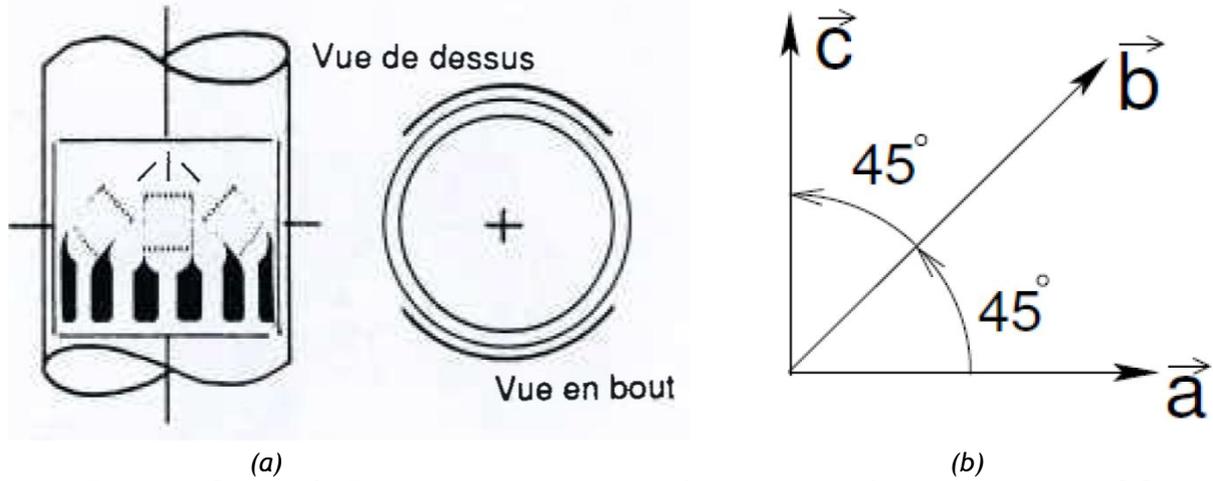


Figure 9 : Rosette à 45° : (a) positionnement et (b) orientation des capteurs, source [3]

5.1 - Détermination de ε_I et ε_{II}

Les équations (29), (30) et (31) donnent les expressions des déformations ε_a , ε_b et ε_c dans le repère de Mohr (σ , τ).

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos(2a) \quad (29)$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos\left(2a + \frac{\pi}{2}\right) \quad (30)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos(2a + \pi) \quad (31)$$

Avec a l'angle définissant l'orientation des directions principales. On note $d = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2}$ la position du centre du cercle de Mohr des déformations et $r = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2}$ son rayon. Sachant que $\cos(2a + \pi) = -\cos(2a)$ et que $\cos(2a + \pi/2) = -\sin(2a)$, on aboutit alors aux équations suivantes ((32), (33) et (34)).

$$\varepsilon_a = d + r \cos(2a) \quad (32)$$

$$\varepsilon_b = d - r \sin(2a) \quad (33)$$

$$\varepsilon_c = d - r \cos(2a) \quad (34)$$

On obtient ainsi les expressions de d , r et a ((35), (36) & (37)).

$$d = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \quad (35)$$

$$r = \sqrt{(\varepsilon_b - d)^2 + (\varepsilon_c - d)^2} \quad (36)$$

$$\tan(2a) = \frac{\varepsilon_b - d}{\varepsilon_a - d} \quad (37)$$

Les déformations principales ε_I et ε_{II} sont donc définies en fonction de ces paramètres par l'équation (38).

$$\varepsilon_I = d + r \quad \& \quad \varepsilon_{II} = d - r \quad (38)$$

5.2 - Détermination de ε_{III} , σ_I et σ_{II}

Sous l'hypothèse des contraintes planes, on admet que $\sigma_{III} = 0$. Dans ce cas de figure, les tenseurs des déformations et des contraintes s'écrivent dans la base principale tel que défini par l'équation (39).

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix} \quad \& \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Or, d'après la loi de Hooke (40) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \quad (40)$$

Avec λ le premier coefficient de Lamé [MPa], défini par (41).

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (41)$$

Les contraintes et les déformations principales sont par conséquent reliées par le système d'équations défini par (42).

$$\begin{cases} \sigma_I = (2\mu + \lambda)\varepsilon_I + \lambda(\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}) \\ \sigma_{II} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{II} + \lambda(\varepsilon_I + \varepsilon_{III}) \\ 0 = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{III} + \lambda(\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \end{cases} \quad (42)$$

La déformation principale ε_{III} est donc obtenue à l'aide de la relation (43).

$$\varepsilon_{III} = -\frac{\lambda(\varepsilon_I + \varepsilon_{II})}{2\mu + \lambda} \quad (43)$$

À partir des deux premières relations du système (42), il est ainsi possible d'identifier les contraintes principales σ_I et σ_{II} .

5.3 - Expression des contraintes réelles σ_{xx} et τ_{xy}

Les contraintes normale σ_{xx} et tangentielle $\tau_{\theta x}$ appliquées à la section de l'éprouvette sont définies dans le repère principal par les équations (44) et (45).

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos\left(2a + \frac{\pi}{2}\right) \quad (44)$$

$$\tau_{\theta x} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin\left(2a + \frac{\pi}{2}\right) \quad (45)$$

La figure 10 donne leur représentation dans le plan de Mohr (σ, τ).

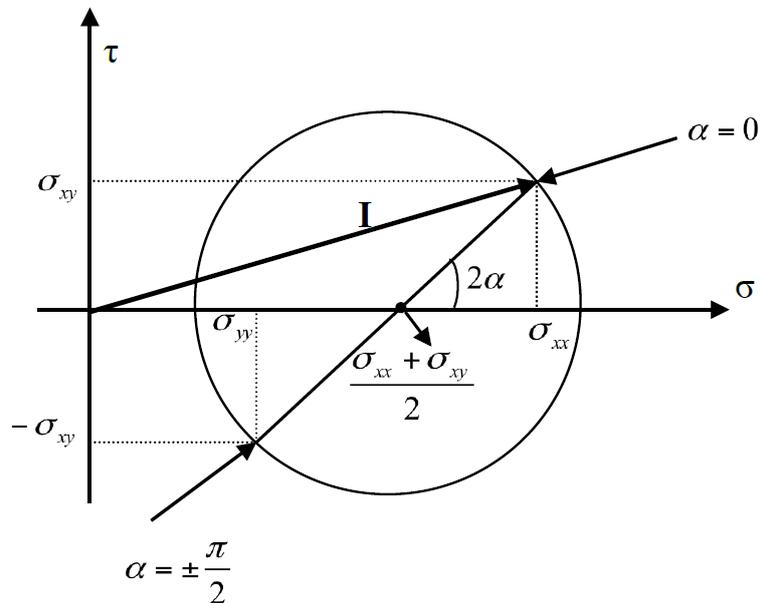


Figure 10 : Représentation des contraintes appliquées à l'éprouvette dans le plan de Mohr

À partir de la valeur de $\tau_{\theta x}$, il est ainsi possible de déterminer la valeur du moment de torsion M_T appliqué à l'éprouvette.

La ressource « *Étude approfondie d'un banc de torsion/traction : résultats expérimentaux* » [2] présente la campagne d'essais réalisée et permet la comparaison avec l'étude théorique.

Références :

[1]: Étude approfondie d'un banc de torsion/traction : présentation, B. Bodnar, M. Briat, V. Forcadell, C. Desodt, C. Giry, https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/etude-approfondie-dun-banc-de-torsion-traction-presentation

[2]: Étude approfondie d'un banc de torsion/traction : résultats expérimentaux, B. Bodnar, M. Briat, V. Forcadell, C. Desodt, C. Giry, https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay/ressources_pedagogiques/etude-approfondie-dun-banc-de-torsion-traction-resultats-experimentaux

[3]: Le petit journal de l'analyse expérimentale des contraintes - Vol.6 - Février 1992