

Élève de l'ENS Paris-Saclay, Nathan Vani, lors de sa première année en Sciences pour l'Ingénieur (année SAPHIRE) a suivi le parcours « Ingénierie civile ». Dans ce cadre les élèves ont, sur un thème imposé, à réaliser un état de l'art, un mémoire et à présenter une courte leçon. Cette ressource est issue de ce dossier.

Les cordes font partie des premiers outils créés et utilisés par les humains. À l'origine réalisées à partir de fibres végétales nouées entre elles, leurs utilisations étaient nombreuses, on notera notamment l'aide au déplacement de charges lourdes et la construction des premiers ponts suspendus. L'Égypte et la Chine antiques créeront en premier des machines de fabrication de cordes, en utilisant d'une part des fibres de roseaux et de palmiers, et de l'autre du chanvre. La marine sera pendant longtemps la première utilisatrice de cordages, et c'est dans ce secteur que l'évolution technique que constituent les câbles sur les cordes apparut au début du XVIII^e siècle.



Figure 1 : Pont de corde Inca, source [1]



Figure 2 : Câblage du Brooklyn Bridge, pont suspendu de New-York, source [2]

Cette ressource propose, après un aperçu de l'utilisation des câbles dans le génie civil, d'aborder les aspects technologiques puis les bases du calcul analytique et numérique de cette utilisation. Les câbles sont un formidable outil permettant de créer des structures esthétiques, économiques et souvent novatrices, ils sont et resteront ainsi des éléments centraux en génie civil.

1 – Introduction

On nomme câble l'entrelacement de plusieurs torons autour d'une âme, les torons étant eux-mêmes constitués de l'entrelacement de plusieurs fils métalliques. Ces câbles originellement conçus à partir de fer puddlé¹ furent d'abord utilisés dans la marine et l'industrie minière. Depuis, les progrès techniques réalisés sur l'acier et les procédés de fabrication font que les câbles restent un choix compétitif dans de nombreux domaines. Hors de son utilisation structurelle, on notera également l'usage de câble dans le transport et la machinerie lourde comme organe de support (ascenseurs, bacs fluviaux, téléphériques, puits de mine etc.) et mécanisme de transmission d'efforts.

¹ Ancien procédé d'affinage de la fonte permettant la fabrication en grande quantité de fer aux caractéristiques supérieures à celles de la fonte.

On peut définir géométriquement un câble par une forme cylindrique, avec un diamètre très inférieur à sa longueur. C'est cette géométrie qui explique son caractère souple, on l'admettra communément comme parfaitement flexible. Ainsi, le modèle classique du câble ne peut supporter aucune contrainte de flexion, torsion, compression ou d'effort tranchant. On n'aura alors dans les câbles que des efforts de traction tangents à l'axe du câble, on appellera cet effort la *tension* du câble. [3, 4, 5].

Un second point important est que, sans charge, un câble n'a pas de forme propre et ne peut supporter quasiment aucun effort. Il est donc nécessaire d'utiliser des câbles contraints initialement. Dans de rares cas, le poids ou d'autres forces peuvent suffire à contraindre les câbles, notamment dans le cas des ponts suspendus où la masse du tablier aide à cet effet. Néanmoins dans la majorité des cas, il est nécessaire d'effectuer une mise en contrainte préalable sur les câbles, c'est la *prétension*. L'intensité de cette charge initiale est fondamentale au travail de l'ingénieur structure.

Ce comportement ainsi que d'autres particularités font des câbles un élément intéressant à utiliser dans le cadre du génie civil. On citera notamment parmi ces particularités leurs nuances de résistances élevées, de grandes portées, la possibilité de modifier la répartition et la direction des charges, leur aspect esthétique plaisant de par son ouverture. Les câbles sont ainsi utilisés dans le génie civil pour de nombreux domaines dans les constructions modernes, des ponts suspendus aux toitures de stade.

2 – Utilisations en génie civil

Dans le génie civil moderne, de nombreuses structures utilisent des câbles pour diverses fonctions. On se contentera ici d'en dresser une liste non-exhaustive, en proposant une classification selon leur forme une fois la structure en état de service [3, 6, 7].

2.1 - Structures utilisant des câbles rectilignes

À condition que la tension soit très supérieure aux charges réparties (poids propre), on peut obtenir des câbles prétendus gardant une forme rectiligne après la mise en service. Il se comportera alors comme une barre bi-articulée, ce qui facilitera son dimensionnement. C'est notamment le cas des ponts à haubans, des pylônes haubanés, des tirants structurels - par exemple pour des tirants de toiture (figure 3) et des contreventements (figure 4).

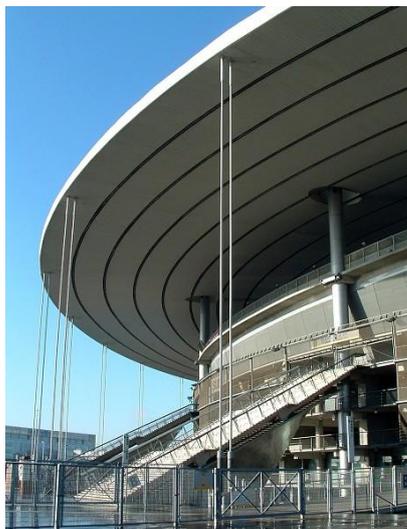


Figure 3 : Hauban de stabilité, Stade de France, source Jacques Mossot [8]



Figure 4 : Contreventement sur un immeuble suisse, source [9]

L'utilisation de pylône haubané est très utilisée dans les télécommunications comme en figure 5 et autres ouvrages en hauteur comme sur la figure 6, mais on peut également utiliser des câbles rectilignes afin de stabiliser un ouvrage dans sa phase de chantier. Les câbles sont ainsi des éléments structurels très compétitifs permettant de réduire de beaucoup la masse finale de l'ouvrage.



Figure 5 : Pylône haubané de télécommunication radio, source CGTI



Figure 6 : Mats haubanés d'éolienne, source Galva Union

2.2 - Structures utilisant des câbles courbes

Lorsque les charges sont réparties le long d'un câble, il prend nécessairement une forme courbe. C'est le cas notamment des ponts suspendus et de certains types de toiture. On prendra notamment l'exemple du système Jarwerth schématisé figure 7, qui utilise cette forme de câble pour créer une toiture courbe. On y notera l'utilisation de câbles inférieurs rectilignes dits contre-câbles afin de prétendre le câble et d'agir en contreventement. Les figures 8 et 9 montrent l'exemple d'une application de ce type de toiture.

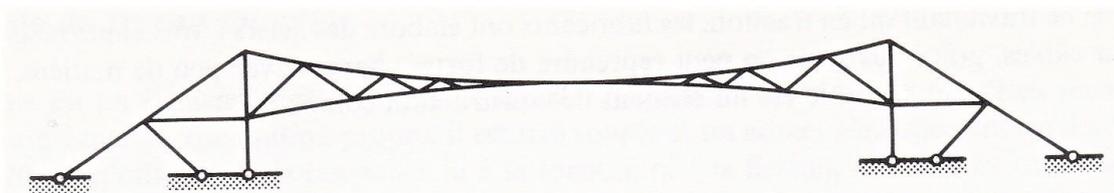


Figure 7 : Représentation d'une toiture de type Jarwerth avec des câbles courbes, source [3]



Figure 8 : Squelette du Billingham Forum avec toiture Jarwerth, source Something Concrete+Modern



Figure 9 : Billingham Forum achevé, Angleterre 1967, source Something Concrete+Modern

2.3 - Structures utilisant des câbles en réseaux

En faisant se croiser une série de câbles, on peut réaliser une surface courbe à même de supporter un parement. Entre chaque nœud, les câbles se comportent comme des barres. Sur ce type de structure, on utilisera une combinaison de câbles courbes et rectilignes afin d'assurer la stabilité. On notera également qu'à cet effet, la courbure de la surface doit être négative (allure concave). De par cette courbure, ce type de structure se destine surtout comme toiture, à l'image du stade olympique de Munich (figure 10).



Figure 10 : Stade de Munich (Allemagne), toiture soutenue par des câbles en réseaux, source [10]

2.4 - Utilisation des câbles pour la précontrainte

Les câbles, de par leur forme et la relative simplicité de leur mise en tension, sont très adaptés à la précontrainte d'autres matériaux. L'exemple le plus courant est celui du béton précontraint conçu par Eugène Freyssinet. Encore aujourd'hui, le béton précontraint, plutôt que le béton armé, est très utilisé dans la réalisation de grands ouvrages où des dalles de grandes portées sont nécessaires. La mise en tension des câbles se fait en post-tension ou en pré-tension - avant ou après coulage - et le choix des câbles y est important.



Figure 11 : Poutres en béton précontraint, source Perasso Alpes

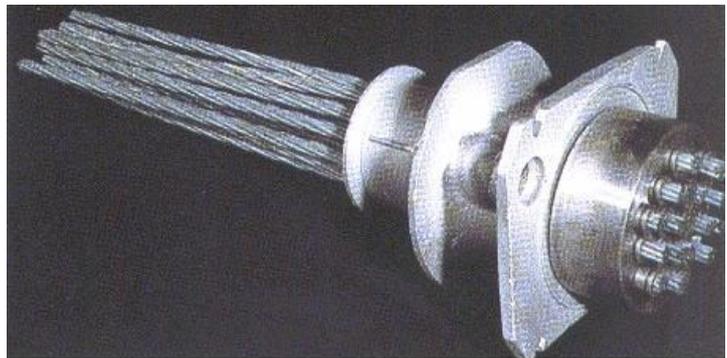


Figure 12 : Tête d'ancrage en post-tension, source InfoCiments

3 – Aspects technologiques

3.1 - Généralités sur la structure d'un câble

Les câbles en acier sont composés de l'entrelacement de torons autour d'une âme, elle-même étant généralement un toron. Ces torons sont eux-mêmes composés de l'entrelacement de fils métalliques. On représente sur la figure 13 la structure usuelle d'un tel câble. La dénomination d'un câble est la suivante : "nombre de torons x nombre de fils par torons". Ainsi, un câble 7x19 sera composé de 7 torons composés chacun de 19 fils de même diamètre. On notera également

l'existence de câbles à torons parallèles, composés de plusieurs torons non-enroulés, entourés d'une gaine. On peut également utiliser un seul toron comme câble, ce qu'on appelle communément un monotoron. [11]

Deux choix principaux de type d'acier sont proposés sur le marché :

- L'acier inoxydable : cet acier fortement allié (de l'ordre de 18% de chrome, 8% de nickel) a une excellente résistance à la corrosion mais une résistance moindre, l'inox 305 a également la propriété de ne pas être magnétique ;
- L'acier galvanisé : cet acier peu allié a subi un traitement thermique de galvanisation, ce qui lui donne de meilleures propriétés mécaniques. Sa résistance à la corrosion est cependant moindre.

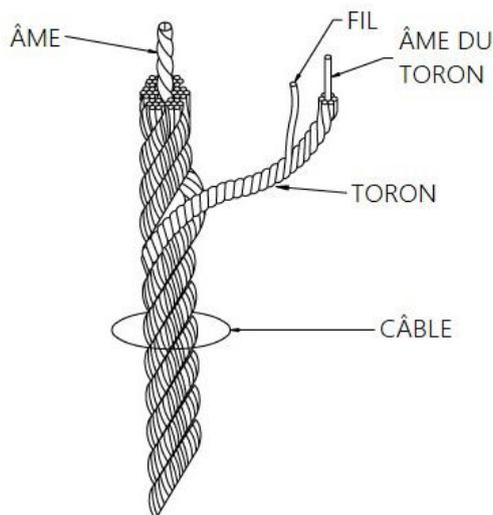


Figure 13 : Structures d'un câble, source Bergen Cable

Différentes déclinaisons de chacun de ces aciers existent également, et ce choix dans un projet dépend des propriétés mécaniques et de la résistance à la corrosion, ce qui importe dans le cas de structures à câbles découverts. L'utilisation d'acier galvanisé requiert ainsi un revêtement extérieur en zinc à renouveler, cette solution est la plus couramment utilisée [11].

3.2 - Choix de la structure interne

Un autre choix important est celui de la structure du toron et du nombre de fils. Une structure plus lourde augmentera la résistance mais diminuera la flexibilité du câble. Une gamme importante de possibilités existe, on n'en dressera pas ici une liste exhaustive, néanmoins on citera les critères importants de choix de la structure d'un câble :

- Résistance mécanique à la charge maximum nécessaire en prenant en compte les facteurs de sécurité ;
- Résistance à la fatigue ;
- Résistance à l'abrasion dans la structure interne ;
- Habilité à garder sa structure interne sous la contrainte.

3.3 - Quelques ordres de grandeur

Au niveau de la structure des câbles, les fils utilisés ont un diamètre compris entre 0,2 à 5,5 mm. L'enroulement des fils se fait avec un pas d'hélice, nommé pas de toronnage, de l'ordre de 25 diamètres. La résistance mécanique recherchée sur les câbles est de l'ordre de 1 400 à 2 000 N/mm², valeur très élevée.

Au niveau du module d'Young, les aciers utilisés ont en général un module d'Young de 210 GPa, qui est donc celui des fils. Néanmoins, l'enroulement fait augmenter le caractère élastique du matériau, on a donc un module d'Young pour un toron de neuf fils de l'ordre de 170 GPa, et un câble 7x9 aura un module d'Young de l'ordre de 140 GPa. Signalons également que lorsque le câble se courbe, son module d'Young diminue encore [5, 11].

3.4 - Mise en place : prétension et liaisons

On montrera dans la troisième partie que la tension est la plus importante aux appuis du câble, les pièces de liaisons doivent donc être suffisamment résistantes. Généralement, on bloque le bout du câble dans un culot fileté permettant de maintenir en position l'extrémité du câble comme représenté figure 14. Les éléments de liaisons sont alors classiques pour créer différents types de liaisons, on en représente quelques uns figure 15. Dans les cas les plus simples type pylône haubané, des tendeurs classiques peuvent suffire en pièce d'ancrage. De même différentes pièces existent pour relier différents câbles entre eux comme figure 16 et 17 [5].

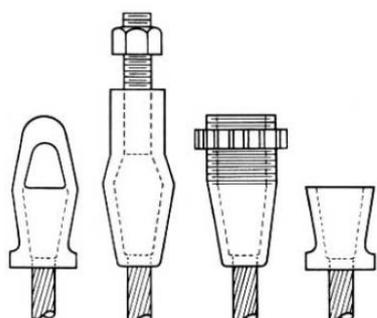


Figure 14 : Quelques culots filetés pour l'attache des câbles, source [5]

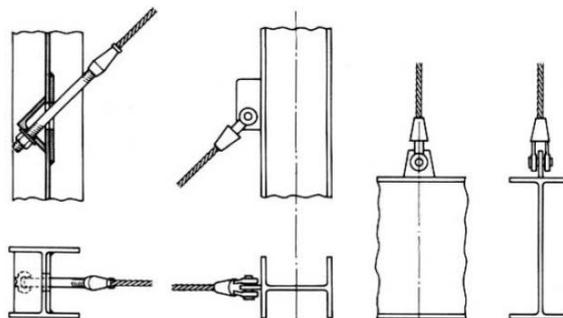


Figure 15 : Quelques systèmes de liaison entre un câble et les structure, source [5]

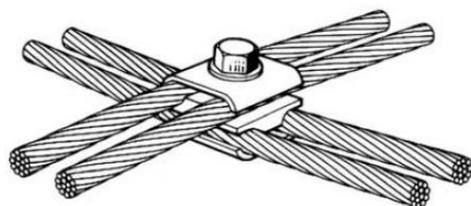


Figure 16 : Liaison entre des câbles perpendiculaires et parallèles en T, source [5]

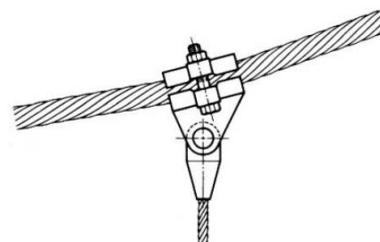


Figure 17 : Liaison entre un câble courbe et un câble rectiligne, source [5]

La précontrainte se fait grâce à des vérins hydrauliques. Le contrôle de cette précontrainte est capital afin d'assurer le bon fonctionnement de cet ouvrage, et plusieurs types de capteurs peuvent aider à cet effet.

3.5 - Maintenance des structures à câbles et capteurs

Dans le secteur du génie civil, le processus de maintenance est capital afin d'assurer la pérennité des ouvrages sur leur longue durée de vie. Les structures à câbles en particulier nécessitent une maintenance pour de nombreux problèmes. Nous en présenterons quelques uns tout en citant des exemples de solution de surveillance [7].

Perte de la prétension dans les câbles

Dû au vieillissement du matériau et aux cycles de charge-décharge, les câbles auront tendance à perdre une partie de leur prétension. Si cela n'est pas surveillé, les conséquences sur la sécurité de l'ouvrage peuvent être catastrophiques. À ce sujet, on citera notamment l'exemple récent du

pont de Morandi. Différents capteurs permettent de mesurer la tension au cours de la vie de l'ouvrage.

Premièrement, des capteurs d'efforts peuvent être directement appliqués dans le câble ou sur un vérin assurant la prétension. Ce choix est le plus simple, mais nécessite un nombre très important de capteurs permanents. Au contraire, il existe des appareils de mesure directement applicables sur un câble afin d'en mesurer la tension, ce sont les tensiomètres comme représenté figure 18. Ils consistent à faire passer le câble entre trois rouleaux qui causent une déviation locale de la direction locale du câble. Des cellules d'effort permettent alors de remonter à la tension. Ces capteurs ne nécessitent pas l'accès à l'extrémité des fils, mais néanmoins ils sont limités à des câbles de faibles diamètres, de l'ordre de 3 ou 4 cm.



Figure 18 : Tensiomètre permettant de mesurer la tension interne d'un câble, source BM Engineering

Une autre possibilité de capteur réside dans ceux utilisant le principe de la corde vibrante. Il permet de déterminer la fréquence d'oscillation d'un câble à partir d'accéléromètres, avec laquelle on peut aisément remonter à la tension *via* la relation (1) avec T l'effort de tension et μ la masse linéique.

$$f_{propre} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (1)$$

Une fois la prétension mesurée, on peut la modifier grâce à un vérin hydraulique installé en bout de câble de manière permanente ou non.

Vérification du comportement vibratoire

Face à des charges radiales, les câbles auront tendance à vibrer, ce qui peut avoir des comportements dynamiques catastrophiques. Pour assurer en permanence des vibrations minimales, on peut surveiller l'ouvrage grâce à des accéléromètres disposés dans les câbles. Il est également nécessaire de surveiller la tension dans les câbles comme nous venons de le voir puisqu'une tension forte aura tendance à diminuer les phénomènes de résonance. Enfin, il est nécessaire de surveiller l'état des amortisseurs via des cellules d'effort permanentes et des contrôles humains régulier.

Rupture des câbles par vieillissement ou sollicitations extrêmes

Dans le cas des ponts à haubans, la durée de vie de l'ouvrage (de 50 à 100 ans) excède de beaucoup celle des haubans (environ 15 ans avec une forte variabilité). Il est donc nécessaire d'assurer le remplacement des haubans à temps afin d'éviter des conséquences structurelles catastrophique. Pour des raisons d'économie, on assure donc la surveillance des câbles afin de repérer les haubans à remplacer, le remplacement étant un processus difficile, nécessitant une phase d'étude et bloquant en partie l'ouvrage pendant une certaine durée.

Ainsi, pour assurer le bon état des câbles face au vieillissement, on peut utiliser des capteurs permanents à ultra-son permettant de prévenir l'organisation responsable. Cela se fait en

mesurant régulièrement la vitesse et le temps de propagation des ondes dans le câble, ce qui permet de déterminer le nombre de fils rompus, puisque la rupture se fait fil par fil de manière progressive avec le vieillissement.

Les sollicitations extrêmes nécessitent des solutions au cas par cas, notamment grâce à des revêtements externes. C'est notamment le cas pour les résistances au feu et aux explosions pour lesquelles on peut mettre en place des revêtements moulés spécifiques autour des gaines.

Vieillessement des pièces et corrosion

Comme sur tout ouvrage, le vieillissement des pièces est un problème, et ceci est exacerbé par la présence de pièces de liaisons et d'amortisseurs qui sont relativement fragiles par rapport aux éléments structuraux. Ainsi, les amortisseurs, les gaines, les pièces d'étanchéité nécessitent une révision régulière. Également, des vidanges des fluides peuvent être nécessaires dans les haubans afin d'assurer une lubrification optimale minimisant les frottements.

La corrosion représente également un problème dans le fait que l'on n'a souvent pas accès à l'intégralité des câbles. Une méthode de détermination de la corrosion peut se faire via des capteurs ultra-son non permanents qui nécessitent néanmoins l'accessibilité des extrémités des fils.

Cette liste de capteurs et de difficultés à surveiller est loin d'être exhaustive, mais ce sont néanmoins les principales maintenances à prévoir en amont de la construction d'un ouvrage utilisant des câbles.

4 – Bases de calculs analytiques

Toute construction de structures à câbles nécessite dorénavant l'utilisation de programmes de calculs numériques, bien plus efficaces, précis et permettant de se passer des hypothèses simplificatrices. Néanmoins, il reste important pour l'apprenant de maîtriser quelques méthodes de calcul analytiques afin de mieux appréhender le comportement de telles structures [4, 5, 12].

Notons également, que les câbles présentent des difficultés particulières pour les calculateurs. Cela vient notamment du fait que la géométrie après chargement est très différente de la géométrie à vide. Ceci exclut donc l'utilisation du principe de superposition, et rend inutilisable la géométrie hors charge pour déterminer les équations d'équilibre. Ces problématiques seront abordées d'un point de vue numérique dans la cinquième partie, nous verrons ici quelques fondements de calculs analytiques que nous appliquerons dans la quatrième partie sur un exemple concret.

4.1 - Reprise de la compression

Il a été dit dans la première partie qu'un câble ne pouvait reprendre que des efforts de traction. Néanmoins, grâce à la prétension, un câble peut supporter des efforts de compression à condition que la norme des efforts de compression soit inférieure à celle de l'effort de prétension. Ainsi, le câble reste sollicité en traction et conserve donc sa rigidité. Ce phénomène est schématisé figure 19. D'un point de vue structurel, cette propriété rend viable l'utilisation de câbles.

Également, ceci est capital afin d'assurer la pérennité des structures, puisque les câbles doivent absolument rester tendus tout du long de la vie de l'ouvrage car des cycles de détente-tension provoquent une fatigue très importante. Le calibrage de la prétension est donc primordial. On représente figure 20 un exemple concret de la nécessité de la reprise de tension sur un pylône haubané sur un cas simplifié à deux dimensions.

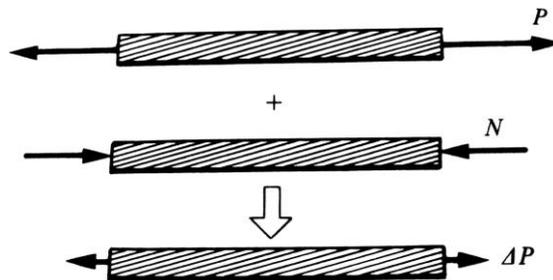


Figure 19 : Schématisation de la reprise d'un effort de compression avec précontrainte, source [3]

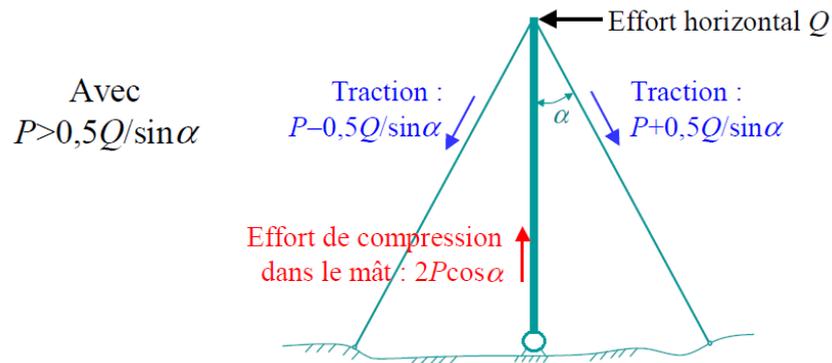


Figure 20 : Exemple de l'utilité de la reprise de compression sur un pylône haubané où P est la prétension, source [6]

4.2 - Effort horizontal et équation fondamentale

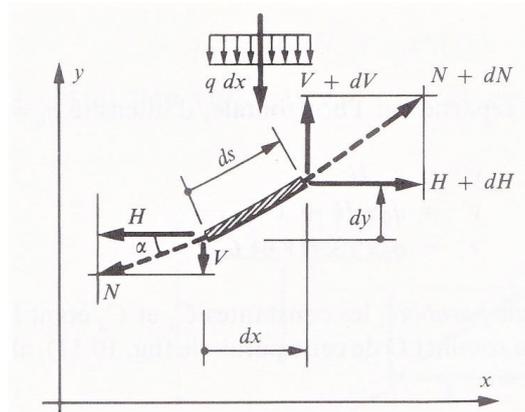


Figure 21 : Schéma de l'isolement d'un tronçon infinitésimal de câble, source [3]

Nous allons ici déterminer l'équation différentielle déterminant la forme d'un câble. Pour cela, on procède à l'isolement d'un tronçon de câble de longueur ds comme représenté figure 21. Les efforts exercés sur le tronçon sont la charge linéique $q(x)$, la tension de norme N en (x, y) et la tension de norme $N + dN$ en $(x + dx, y + dy)$. On décompose ces deux tensions en une composante verticale (respectivement $-V$ et $V + dV$) et une composante horizontale (respectivement $-H$ et $H + dH$). On émet les deux hypothèses suivantes :

- La charge $q(x)$ appliquée sur le câble est linéique, uniquement portée par la verticale ;
- L'angle α est faible, ce qui revient à dire que $dx \gg dy$.

Par la dernière hypothèse, on a donc que $\tan \alpha \approx \alpha$. D'où, par des considérations géométriques, on obtient les équations suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha = \frac{V}{H} \quad (2)$$

On effectue l'équilibre des trois forces selon l'horizontale et selon la verticale :

$$\Sigma F_x = -H + H + dH = 0$$

$$\Sigma F_y = -V - q(x).dx + V + dV$$

La première équation donne $dH = 0$. On en déduit donc que la composante horizontale de la tension est constante le long du câble. De la seconde, on déduit $\frac{dV}{dx} = q(x)$. D'où, en utilisant l'équation (4.2), on obtient que :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) H = q(x)$$

Et finalement :

$$y'' = \frac{q(x)}{H} \quad (3)$$

Cette dernière équation est dite équation différentielle du câble, et sa résolution fournit la configuration $y(x)$ du câble, sa forme d'équilibre. Les deux constantes d'intégration liées à sa résolution traduisent ainsi les conditions d'appui aux limites du câble. On peut encore déterminer des formules utiles permettant de déterminer la tension en fonction du déplacement et de calculer la longueur du câble en place. On a par définition $N = \sqrt{H^2 + V^2}$, d'où :

$$N = H \sqrt{1 + \frac{V^2}{H^2}}$$

$$\text{donc } N = H \sqrt{1 + y'^2} \quad (4)$$

À propos de la longueur, on a par définition que $s = \int_{x_1}^{x_2} dx$. Or $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. On a donc aisément :

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (5)$$

Les équations (4) et (5) sont ainsi des formules particulièrement utiles dans une démarche de dimensionnement.

4.3 - Premier cas classique : la parabole

Nous allons d'abord étudier le cas d'un câble sous une charge verticale répartie selon l'horizontale de valeur linéique q . On commencera par déterminer la géométrie prise par le câble et l'effort horizontal, pour cela deux méthodes sont possibles pour aboutir aux mêmes résultats.

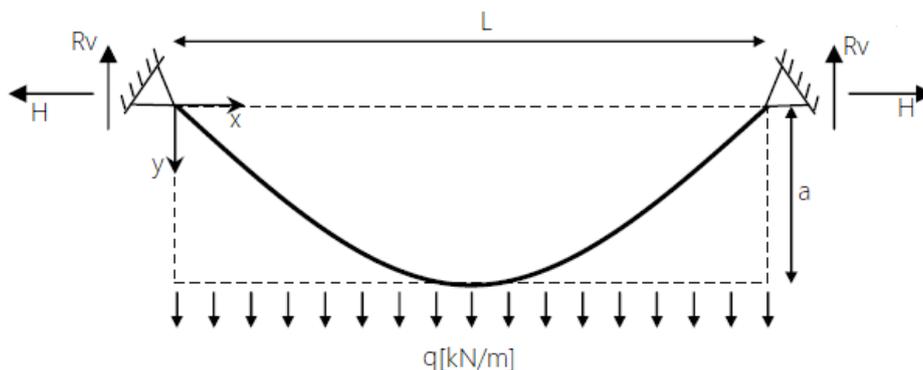


Figure 22 : Schéma d'un câble sous répartition uniforme de charge, prenant la forme d'une parabole, source [6]

Première méthode pour la géométrie : équation différentielle

Pour cette méthode, on part de l'équation fondamentale (3). La résolution donne ici :

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{q}{H} \\y' &= \frac{qx}{H} + C_1 \\y &= \frac{qx^2}{2H} + C_1x + C_2\end{aligned}$$

On décide alors par convenance de placer l'origine de notre repère sur le sommet de la parabole. On a alors les conditions initiales $y'(0) = 0$ et $y(0) = 0$ pour déterminer les deux constantes d'intégration. On a alors aisément trouvé la forme géométrique de notre câble selon l'équation 6, ce qui correspond à une parabole.

$$q = \frac{qx^2}{2H} \quad (6)$$

Déterminons enfin l'effort horizontal. Pour cela, on introduit les coordonnées de $B(\frac{L}{2}, a)$ dans l'équation 6 pour déterminer H , on obtient alors :

$$H = \frac{qL^2}{8a} \quad (7)$$

Seconde méthode pour la géométrie : isolement

Pour cette seconde méthode plus intuitive puisqu'elle n'utilise pas l'équation fondamentale, on va utiliser les équations d'équilibres en effort et en moment. Tout d'abord, l'équilibre en effort vertical et la symétrie du problème donne $R_V = \frac{qL}{2}$ la réaction en un appui. On va alors déterminer H . Pour cela, on isole la partie gauche du câble, du point d'appui au sommet et on utilise l'équation de l'équilibre en moment. En supposant le câble parfaitement flexible, son moment fléchissant est nul. On calcule ainsi H :

$$\begin{aligned}\frac{qL}{2} \frac{L}{2} - Ha + \left(\int_0^{\frac{L}{2}} x \vec{e}_x \wedge (-q dx) \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_z &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{qL}{2} \frac{L}{2} - Ha - \frac{qL^2}{8} &= 0 \\ H &= \frac{qL^2}{8a}\end{aligned}$$

Enfin, déterminons la géométrie en isolant le câble de l'appui au point (x,y) et en effectuant de la même manière l'équilibre en moment :

$$\frac{qL}{2} x - \frac{qL^2}{8a} y - q \frac{x^2}{2} = 0 \quad (8)$$

On a donc trouvé l'équation (4.3) qui est bien une équation de parabole, et en effectuant un changement d'origine du repère pour le déplacer au sommet de la parabole, on retrouve bien l'équation 6.

Tension et longueur

À des fins de dimensionnement, on est amené à déterminer la tension maximale dans le câble. Puisque la composante horizontale est constante, c'est le tronçon le plus incliné qui est soumis au plus grand effort de traction ($N(x)$, somme de H et V). On trouve donc la tension la plus élevée aux appuis ici, et en général à l'un des deux appuis. On a donc ici :

$$N_{max} = \sqrt{H^2 + R_V^2}$$
$$N_{max} = \sqrt{\left(\frac{qL^2}{8a}\right)^2 + \left(\frac{qL^2}{2}\right)^2}$$

$$N_{max} = \frac{qL^2}{8a} \sqrt{1 + \left(\frac{4a}{L}\right)^2} \quad (9)$$

On a donc bien déterminé la tension maximale dans notre câble. On aurait également simplement pu utiliser l'équation (4). Calculons à présent la longueur du câble chargé. On dispose de l'équation (5), qu'on va appliquer à notre exemple :

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{8ax}{L^2}\right)^2}$$

On épargnera au lecteur la résolution analytique de cette solution, qui donne le résultat suivant :

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 + 16a^2} + \frac{L^2}{8a} \ln \left(\frac{4a + \sqrt{L^2 + 16a^2}}{L} \right) \quad (10)$$

On a donc déterminé analytiquement les équations littérales nécessaires au dimensionnement d'un tel câble.

Remarque sur la géométrie d'un câble

On remarquera ici que la valeur de la flèche vaut $a = \frac{qL^2}{8H}$. Pour rendre parfaitement droit un câble soumis à une charge verticale, ce qui sera toujours le cas à cause du poids propre, il faudrait rendre nulle la valeur de la flèche. Pour cela, il est nécessaire d'augmenter H . On obtient donc qu'ainsi qu'un câble droit nécessite un effort infini de tension. On admettra la généralisation de ce résultat : sur un câble non-vertical une légère courbure apparaîtra même si l'effort de prétension est très grand.

4.4 - Second cas classique : la chaînette

Nous allons étudier le second cas classique, celui d'un câble sous une charge $p(s)$ répartie par unité de longueur du câble comme représenté figure 23. Cette modélisation est bien plus réaliste pour représenter le poids propre du câble ou la charge d'une couverture soutenue par les câbles.

On devra forcément passer ici par l'équation fondamentale (3). Néanmoins, cette équation utilise la charge $q(x)$ répartie sur l'horizontale. On veut donc la retrouver à part de la charge par unité de longueur du câble $q(s)$. On a ainsi :

$$q(x)dx = p(s)ds$$

$$\text{or } ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\text{d'où } q(x) = p\sqrt{1 + y'^2}$$

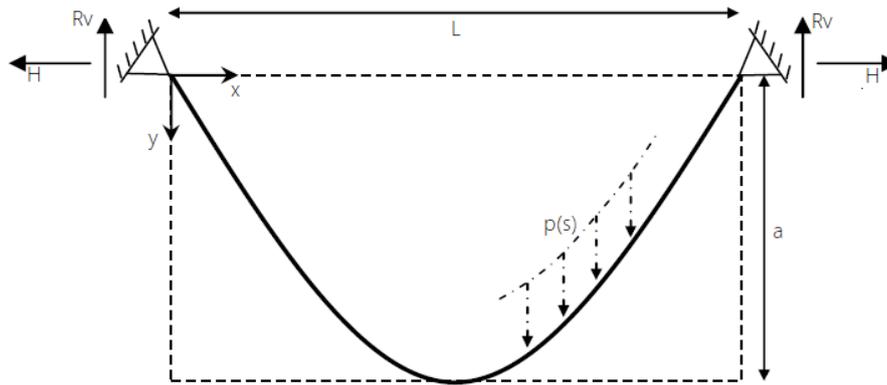


Figure 23 : Schéma d'un câble sous une charge répartie le long du câble qui prend alors la forme de la chaînette, source [6]

On obtient donc finalement l'équation différentielle en supposant la charge constante p_0 :

$$y'' = \frac{p_0}{H} \sqrt{1 + y'^2} \quad (11)$$

À nouveau, on épargnera au lecteur le détail des calculs analytiques de cette partie, les équations de la chaînette étant particulièrement calculatoire. On trouve ainsi après intégration la géométrie de la courbe, appelée chaînette :

$$y = \frac{H}{p_0} \cosh\left(\frac{p_0}{H} x + C_1\right) + C_2$$

En plaçant l'origine du repère au sommet de la chaînette, avec les conditions limites $y'_o(0) = 0$ et $y(0) = 0$, on obtient ainsi :

$$y = \frac{H}{p_0} \cosh\left(\frac{p_0}{H} x - 1\right) \quad (12)$$

Enfin, en appliquant les formules (5) et (4), on calcule enfin :

$$s = \frac{H}{p_0} \sinh\left(\frac{p_0 L}{2H}\right) \quad (13)$$

$$N_{max} = H \cosh\left(\frac{p_0 L}{2H}\right) \quad (14)$$

On conclura donc sur le fait que, bien que plus représentative d'une charge répartie, ce cas est bien plus complexe que le précédent. On verra qu'il est possible sous certaines conditions de se ramener au cas d'une géométrie parabolique pour simplifier des calculs à la main. Néanmoins, comme abordé dans la cinquième partie, cette complexité calculatoire n'est pas tant un problème pour les méthodes numériques.

4.5 - Des hypothèses simplificatrices

On dresse ici une liste des principales hypothèses simplificatrices propres aux calculs de câbles ainsi que leurs limites. Rappelons néanmoins que la puissance de calcul actuelle permet de se passer de ces hypothèses. L'intérêt de ces hypothèses est alors surtout limité au calcul analytique. Ces hypothèses sont :

- La parfaite flexibilité du câble, qui permet de supposer le moment fléchissant nul ;
- L'inextensibilité du câble, sa section étant faible et sa résistance élastique élevée cette hypothèse est raisonnable. Néanmoins elle est à faire avec prudence, puisqu'on utilise souvent de très longs câbles ;
- L'importance du poids propre du câble. Celui-ci peut tout à fait être négligé dans le cas d'autres charges bien plus importante, une couverture par exemple, et sur des câbles fortement précontraints. Cette hypothèse est donc à étudier au cas par cas.

Une dernière hypothèse est celle de l'élanement du câble. Ainsi, si le rapport de la longueur sur la flèche est suffisamment élevé (rapport de 10 strictement minimum), le câble est considéré comme très élané comme illustré sur la figure 24. Dans le cas d'un grand élanement, on peut considérer qu'une répartition par unité de longueur du câble (chaînette) est équivalente à une répartition par unité horizontale (parabole). Ceci permet donc d'utiliser la géométrie parabolique dans les calculs, ce qui les simplifie grandement.

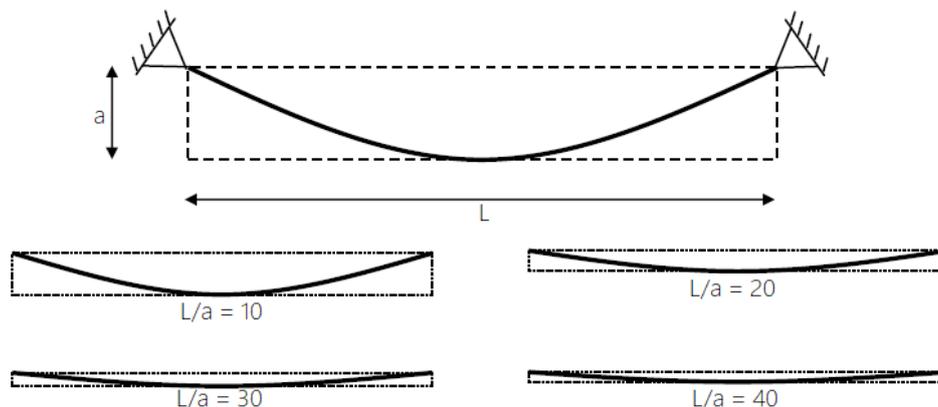


Figure 24 : Schéma représentant l'évolution de l'élanement sur une corde tendue, source [6]

5 – Méthodes numériques et structures à câbles

La difficulté du traitement numérique des câbles réside dans la très forte non-linéarité de leur comportement, tant du point de vue de leur rigidité que de leur géométrie. Les algorithmes à utiliser sont complexes, et peuvent consister à chercher un état d'équilibre par éléments finis. Le domaine de la modélisation numérique des câbles est délicat, et les logiciels de calcul utilisent différentes possibilités. Nous traiterons ici d'un cas en particulier le traitement des câbles dans le logiciel Robot Structural Analysis à des fins d'illustration [12, 13, 14].

Robot Structural Analysis dispose de deux éléments structuraux assimilables à des câbles : l'élément « Traction-Compression » et l'élément câble. La différence réside dans le fait que ce dernier présuppose l'existence d'une force de précontrainte dans l'élément, c'est donc celui-là qu'on utilisera lors dans la très grande majorité de nos calculs de structures. Notons néanmoins qu'ils ont tous les deux le point commun d'utiliser des calculs non-linéaires.

Dans le cas de l'élément câble, ces calculs se fondent sur la théorie des câbles extensibles à faible flèche qui utilisent les hypothèses suivantes :

- De grands déplacements sont autorisés, mais à condition de déformations locales faibles ;
- Les sollicitations doivent être quasi-statiques ;
- Les câbles restent dans un domaine élastique, avec un module d'Young constant ;
- Pas de couple imposé ;
- Les câbles ne peuvent reprendre des efforts de cisaillement ou de moment de flexion ;

- Les variations de l'aire de section de câble sont négligeables.

La rigidité du câble est alors fonction de la rigidité de l'acier et de la structure interne utilisées, de la tension, des charges transversales et des déplacements aux appuis.

Lorsqu'on définit un câble, après avoir spécifié deux nœuds d'accroche, il y a deux possibilités de renseigner ses caractéristiques. Soit on renseigne la longueur de câble désirée à l'équilibre et un algorithme calcule la force de précontrainte nécessaire, soit on renseigne la précontrainte appliquée et on obtient via un algorithme la forme d'équilibre de notre structure avec les longueurs de câbles. Ce dernier peut rencontrer des problèmes de convergence puisqu'un état d'équilibre n'existe pas forcément. Cette problématique sera illustrée dans la présentation avec l'exemple de la modélisation d'une poutre console soutenue en bout par un câble. On remarque ainsi qu'en fonction de notre modélisation hyperstatique ou isostatique, il arrive de ne pas trouver de solutions.

Finalement, via ces deux algorithmes différents à fonctionnements inverses, Robot Structural Analysis permet de déterminer l'état d'équilibre d'une structure. Cette méthode crée néanmoins des problèmes de convergence dans certaines situations, comme avec des câbles d'orientation trop légèrement différentes, ou avec plusieurs câbles fixés sur un même élément droit dont les forces de prétension sont les mêmes. Ce domaine reste très vaste et le traitement par éléments finis de ces structures est très complexe, on recommandera à propos l'ouvrage de référence de Topping et Ivany [13].

6 – Conclusion

Cette ressource a été écrite afin d'être un aperçu rapide de l'utilisation des câbles dans le Génie Civil. Grâce aux relativement récents progrès technologiques dans la conception des câbles et dans la puissance de calcul, les structures à câbles représentent un nombre important des grands ouvrages récents et futurs. Les câbles sont un formidable outil permettant de créer des structures esthétiques, économiques et souvent novatrices.

On ne pourra que conseiller aux intéressés de considérer cette ressource comme un préambule, les ouvrages cités en référence peuvent aider à l'approfondissement. Ce sujet soulève en effet de nombreuses problématiques intéressantes pour tout ingénieur-chercheur dans le domaine du Génie Civil structurel.

Références :

[1]: Photo courtesy of Rutahsa Adventures www.rutahsa.com - uploaded with permission by User:Leonard G. at en.wikipedia – Transféré de en.wikipedia à Commons par Jalo utilisant CommonsHelper., CC BY-SA 1.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6767457>

[2]: I, FoxCompany2, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2366294>

[3]: Traité de génie civil de l'EPFL, Volume 1, Analyse des structures et milieux continus : statique appliquée, F. Frey, chapitre 11, 1990

[4]: Fundamentals of Structural Engineering, J.J. Connor et S. Faraji, éditions Springer, chapitre 5, 2013

[5]: Constructions métalliques - Structures à câbles, J.-P. Laute, Techniques de l'Ingénieur, 10 février 1992

- [6]: Calculer une structure : De la théorie à l'exemple, P. Latteur, éditions Academia, chapitre 13, 2006
- [7]: Fiches technologiques des solutions de maintenance de Freyssinet, comme via cette présentation <http://www.freyssinet.com.au/download/file/fid/363>
- [8]: Structurae, <https://structurae.info/>
- [9]: <https://www.halfen.com>
- [10]: Diego Delso, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19338219>
- [11]: Fiches technologiques des produits de Bergen Cable et leur introduction « Cable 101 », <https://www.bergencable.com>
- [12]: Wires and cables in some discrete structures of Civil Engineering, P. Alart, D. Dureisseix, R. Laniel, S. Pagano, 2016
- [13]: Computer aided design of cable membrane structures, B.H.V. Topping and P. Ivany, édition Kippen, 2007
- [14]: Robot Structural Analysis : conseils d'utilisation des câbles, article d'Oliver baye pour VillaBim, <https://villagebim.typepad.com/villagebim/2018/04/robotstructural-analysis-conseils-d-utilisation-des-cables.html>