ECOLES NORMALES SUPERIEURES
ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2026

VENDREDI 17 AVRIL 2026
08h00 - 13h00

FILIERE PSI - Epreuve n° 8

MODELISATION (XUSR)

Durée : 5 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Il est recommandé aux candidats :

- De respecter l'ensemble des notations alphabétiques et numériques du sujet ;
- De préciser ses propres notations lorsque cela s'avère nécessaire ;
- De justifier ses hypothèses et rédiger clairement ses réponses ;
- De numéroter soigneusement les pages de sa copie.

Vers un ciel plus propre : un turbopropulseur hybride pour l'aviation régionale



Figure 1 – Projet de turbopropulseur hybride (source https://theaircurrent.com)

Dans un contexte de transition énergétique et de réduction des émissions de gaz à effet de serre, le secteur aéronautique est confronté à des enjeux environnementaux majeurs. L'aviation civile représente une part croissante des émissions mondiales de CO_2 et les prévisions de trafic aérien pour les prochaines décennies rendent indispensable le développement de solutions de propulsion plus propres et plus efficaces. Parmi celles-ci, l'avion hybride-électrique apparaît comme une voie prometteuse pour répondre aux exigences de décarbonation du transport régional.

Toutefois, à ce jour, aucun avion hybride de transport régional n'est pleinement opérationnel ni certifié pour un usage commercial. Ce travail se limite donc à une étude de modélisation, qui vise à explorer les performances théoriques d'un turbopropulseur à carburant fossile et la possibilité d'intégrer une deuxième source d'énergie, en vue de contribuer aux choix technologiques futurs dans le développement de l'aviation bas-carbone.

Partie A – L'avion de transport régional

- A-1 Les enjeux énergétiques
- A-2 Modélisation d'un turbopropulseur
- A-3 Le régulateur de pas d'hélice
- A-4 Validation du modèle

Partie B - L'alimentation électrique en énergie d'un avion hybride et électrique

- B-1 Modélisation d'une pile à combustible à membrane échangeuse de protons
- B-2 Augmentation de la puissance massique des entrainements électriques et fiabilité
- B-3 Décharges partielles au sein des conducteurs

L'ensemble du sujet vise à mettre en évidence la continuité entre la modélisation thermodynamique classique et l'intégration d'une architecture hybride, ouvrant la voie à une propulsion plus efficiente et respectueuse de l'environnement.

Important : une aide pour les calculs numériques est proposée en annexe.

Partie A – L'avion de transport régional

A-1 Les enjeux énergétiques

Commençons par estimer, grâce à une modélisation simple, les besoins énergétiques pour un profil de vol typique du transport régional, où nous considèrerons les phases de décollage, montée et vol en palier (nous négligerons les dépenses énergétiques lors de la descente et de l'atterrissage).

Le paramétrage et les caractéristiques sont présentés Figures 2 et 3.

La force de propulsion totale est appelée « poussée » et se note ici $\overrightarrow{T_u}$.

La résistance de l'air $\overrightarrow{T_x}$ est modélisée par une force qui dépend de la phase de vol :

- décollage : $\overrightarrow{T_x} = \vec{0}$;
- montée : $\overrightarrow{T_x} = -KV(t)^2\overrightarrow{x_1}$;
- palier : $\overrightarrow{T_x} = -\frac{K}{2}{V_p}^2\vec{x}$.

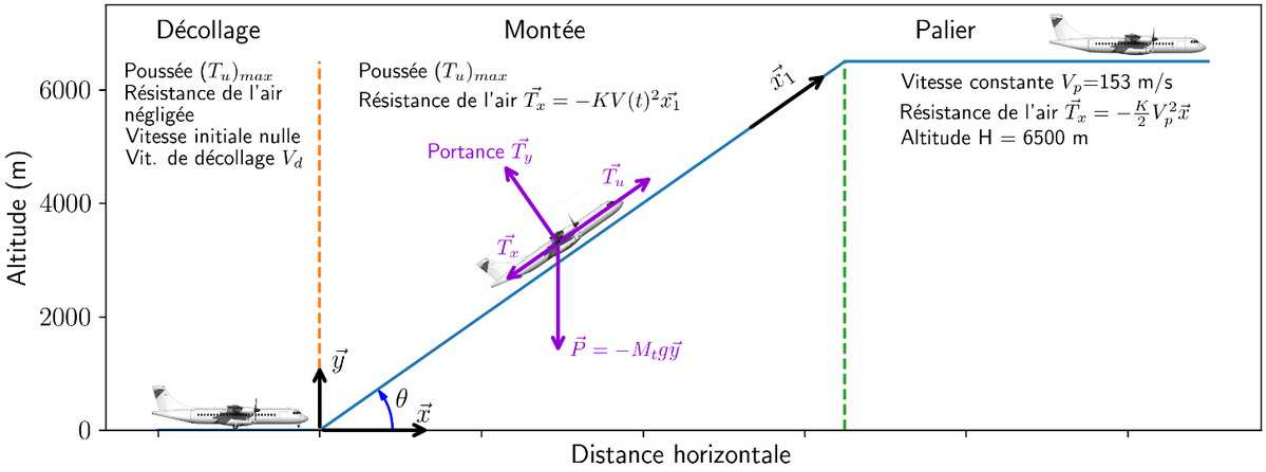


Figure 2 – Paramétrage et caractéristiques des phases de vol

Le tableau suivant résume les caractéristiques de l'avion étudié et de son environnement :

Masse de l'avion (à vide)	$\boldsymbol{M_v = 22\,000\ kg}$
Carburant consommé pour ce vol	570 L soit $M_c = 450\ kg$
Charge utile	$M_u = 7\,400\ kg$
Coefficient de frottement visqueux de l'air	$K = 1.22$ au niveau du sol
Vitesse de décollage	$V_d = 55\ m/s$ (200 km/h)
Vitesse de croisière	$V_p = 153\ m/s$ (550 km/h)
Altitude de croisière	$H = 6\,500\ m$
Poussée max des 2 turbopropulseurs	$(T_u)_{max} = 48\,000\ N$
Angle de montée	$\theta = 5°$
Accélération de la pesanteur	$g = 9{,}81\ m/s^2$
Nombre maximal de passagers	78
Consommation (donnée constructeur)	2,4 $L/passager/100\ km$
Carburant	Kérosène (pour la modélisation : dodécane $C_{12}H_{26}$, densité 0,75)

Figure 3 – Tableau de données

Préliminaire. Pour les besoins de cette modélisation, on considère une fonction f, de la variable réelle t, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ solution de l'équation différentielle non linéaire :

$$(E_1) \quad f' = -Af^2 + B \qquad avec \begin{cases} A \text{ et } B \text{ des constantes réelles strictement positives} \\ f(0) = f_0 \quad et \ |f_0| < \sqrt{\frac{B}{A}} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction tangente hyperbolique, notée th, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

Cette fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et sa bijection réciproque est notée $Argth$. On note enfin $k = \sqrt{\frac{B}{A}}$ et u la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u(t) = \frac{f(t)}{k}$.

Question 1.

- Montrer que u est solution de l'équation différentielle (E_2) : $u' = \omega(1 - u^2)$ où ω est une constante à préciser.
- Résoudre (E_2) en posant, pour $t \geq 0$, $u(t) = th\big(v(t)\big)$ avec v une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- En déduire, pour $t \geq 0$, $f(t)$ en fonction de A, B et f_0.

Question 2. Pour les 3 phases de vol, donner l'expression de la vitesse $V(t)$ en fonction des paramètres présentés sur les Figures 2 et 3. On notera M_t la masse totale de l'avion : $M_t = M_v + M_u + M_c$. Le vol se fera à masse totale M_t constante (on néglige les variations de la masse M_c de carburant (qui représentent ici moins de 2 % de la masse totale)).

Question 3.

- Commenter la modélisation proposée concernant la force de frottement de l'air.
- Pour chaque phase, évaluer le sens de l'erreur commise par rapport à la réalité.
- Conclure sur l'erreur globale.

Pour les 3 phases de vol, la vitesse est tracée sur la Figure 4 :

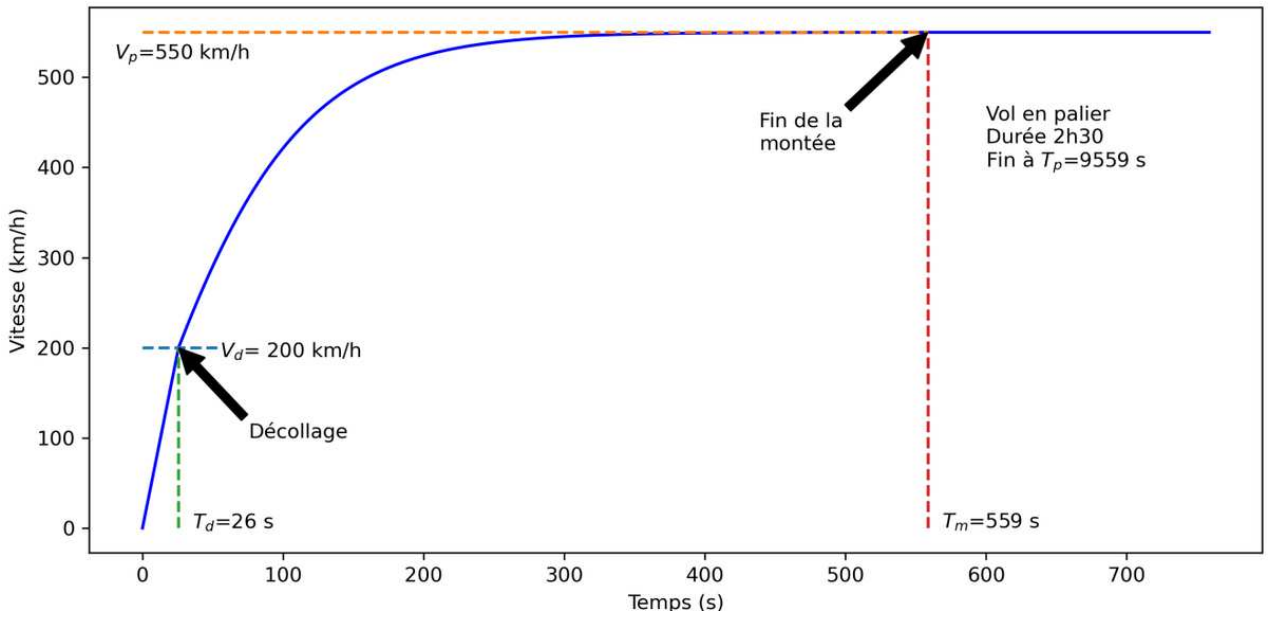


Figure 4 – Évolution de la vitesse de l'avion en fonction du temps

On note ρ_e la densité énergétique des batteries susceptibles d'être utilisées pour propulser l'avion. Actuellement, les batteries candidates sont les batteries Li-ion NMC/NCA (Lithium-ion Nickel-Manganèse-Cobalt ou Nickel-Cobalt-Aluminium), dont la densité énergétique vaut :

$$\rho_e \approx 250 \, Wh.kg^{-1}$$

Question 4. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'avion, donner l'expression de l'énergie que doivent fournir les turbopropulseurs E_{TP} pour ce profil de vol (durée T_p), en fonction de $V(t)$ et des différents paramètres et temps caractéristiques (le calcul de l'intégrale de $V(t)^3$ n'est pas attendu).

L'énergie dépensée pour contrer les frottements visqueux en phase de montée est égale $27.10^5\ J$.

Question 5. Estimer chaque terme de l'expression précédente et critiquer la modélisation proposée.

Question 6.

- En déduire la masse de batterie m_b nécessaire avec ce modèle, pour une propulsion 100 % électrique.
- Comparer avec la masse à vide.
- Un avion de transport régional 100 % électrique est-il envisageable ?
- Quel serait l'impact sur le coefficient K et la consommation ?

Un modèle plus fin, non développé ici, tenant compte de l'évolution réelle de la pression atmosphérique, de paramètres aérodynamiques plus précis, de modifications de la structure de l'avion, donne les résultats suivants (énergie totale E en *joules*, masse M_t en *kg*). Des interpolations linéaires ont été réalisées sur les deux parties de la courbe et sont précisées sur le graphique.

Au-delà de 30 T, on sort du domaine réel et le modèle est exploratoire.

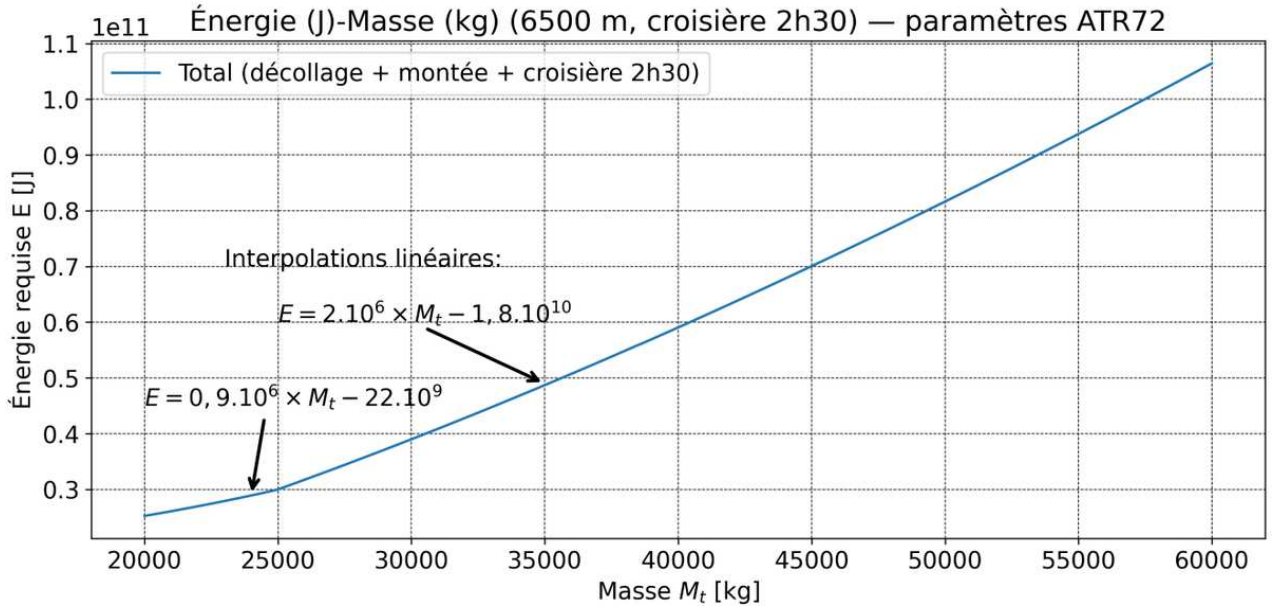


Figure 5 – Nouveau modèle : estimation de l'énergie nécessaire en fonction de la masse totale

Question 7. L'ajout de batteries implique une augmentation de la masse embarquée, ce qui nécessite de nouvelles batteries. En vous appuyant sur les interpolations linéaires du modèle ci-dessus (Figure 5), ainsi que sur la densité énergétique ρ_e, discuter l'existence d'une solution.

A-2 - Modélisation d'un turbopropulseur

Afin d'évaluer avec précision les bénéfices d'une architecture hybride, il est indispensable de disposer d'un modèle thermodynamique détaillé du turbopropulseur conventionnel. Ce modèle va permettre de dresser un bilan énergétique, de relier consommation spécifique et conditions de vol, et d'en déduire la quantité de CO_2 émise pour une mission type.

Contrairement au turboréacteur qui produit sa poussée en accélérant un flux d'air à haute vitesse, le turbopropulseur est constitué d'un compresseur et d'une turbine qui entraine une hélice.

Le rendement du turbopropulseur est supérieur à celui du turboréacteur, mais son utilisation est limitée en altitude et en vitesse. Ce mode de propulsion est optimal pour les avions de transport régionaux qui nous intéressent ici.

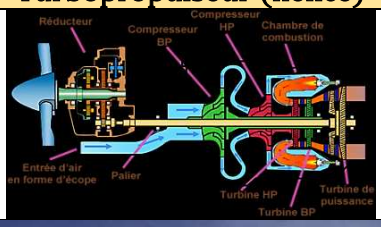
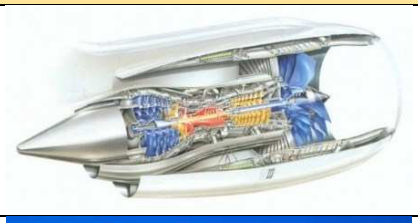
Turbopropulseur (hélice)	Turboréacteur
	
	
Avion de transport régional ATR72	Avion long-courrier A350

Figure 7 – Turbopropulseur et turboréacteur



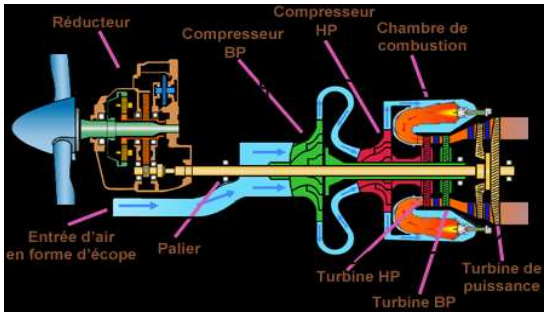


Figure 8 – Turbopropulseur PW127 (Pratt & Whitney) équipant l'ATR72 et schéma de principe

Le turbopropulseur étudié ici comprend :

- une entrée (diffuseur)
- un étage de compression
- une chambre de combustion
- une turbine HP qui entraîne le compresseur et une turbine libre qui entraîne l'hélice
- un réducteur pour obtenir la meilleure vitesse de rotation possible pour l'hélice.

L'objectif de cette partie est de déterminer le travail fourni à l'hélice pour la propulsion de l'avion, la consommation spécifique et la quantité de CO_2 émise.

Les hypothèses clés sont :

- gaz parfaits à c_p constant (air et gaz brûlés) ;
- transformations adiabatiques avec pertes modélisées par des rendements ;
- combustion idéale à pression totale constante ;
- cycle stationnaire et ouvert (entrée = air, sortie = gaz brûlés) ;
- pas de pertes mécaniques au niveau des compresseurs/turbines, pas de pertes de charge ;
- 78 passagers dans l'avion.

Le tableau de la Figure 9 précise les grandeurs utiles pour cette modélisation.

Constante des gaz parfaits	$R = 8{,}314\ J.mol^{-1}.K^{-1}$		Coefficient isentropique de l'air	$\gamma = 1.4$
Coefficient isentropique du dodécane gazeux	$\gamma_f = 1.05$		Coefficient isentropique des gaz brulés	$\gamma_c = 1.3$
Conditions ambiantes	$P_1 = 0{,}85\ bar$ $T_1 = 250\ K$		Coefficient de détente de la tuyère	π_e
Rapport de compression du compresseur	$r_c = 12$		Rendement isentropique du compresseur	$\eta_c = 0{,}85$
Rendement mécanique (réducteur)	$\eta_m = 0{,}95$		Rendement isentropique de la turbine	$\eta_T = 0{,}9$
Enthalpies standards de formation (T° combustion)			Masses molaires	
$\Delta_f H^\circ(CO_2(g))$	$-392\ kJ/mol$		$M(C)$	$12\ g/mol$
$\Delta_f H^\circ(H_20(g))$	$-237\ kJ/mol$		$M(H)$	$1\ g/mol$
$\Delta_f H^\circ(C_{12}H_{26}(g))$	$-355\ kJ/mol$		$M(O)$	$16\ g/mol$
			$M(N)$	$14\ g/mol$

Figure 9 – Tableau avec les grandeurs physiques liées à la modélisation

Le turbopropulseur fonctionne selon un cycle de Brayton ouvert, illustré Figure 10 :

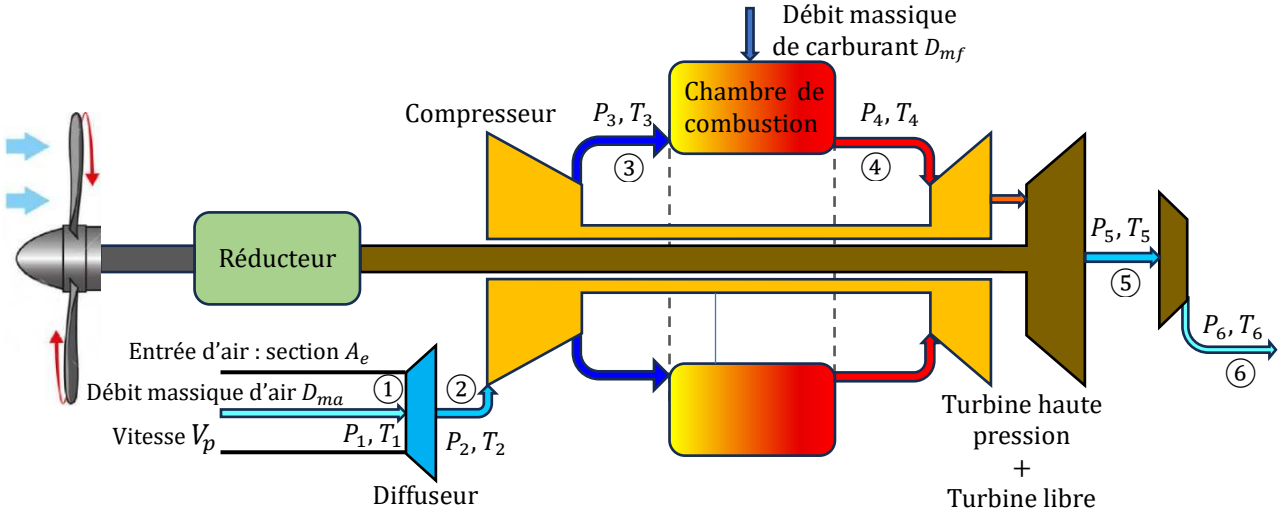


Figure 10 – Les différents étages du cycle thermodynamique ouvert (cycle de Brayton)

- **①⟹② Admission d'air** : dans cette étape, l'air est ralenti à vitesse quasi nulle. Hypothèse : compression isentropique faible (Mach subsonique), pas de transfert thermique. L'entrée d'air a une section A_e et l'avion vole à une vitesse V_p (nombre de Mach μ_1).
- **②⟹③ Compression** : l'air est comprimé par le compresseur. On note η_c le rendement isentropique du compresseur, T_3 la température de sortie réelle du compresseur et T_{3s} la température isentropique. Le taux de compression est noté r_c $\left(= \frac{P_3}{P_2}\right)$.
- **③⟹④ Combustion** : ajout du carburant et combustion à pression supposée constante. Lors de cette phase, le carburant est ajouté avec un débit massique D_{mf}.
- **④⟹⑤ et ⑤⟹⑥ Détente** : le gaz se détend dans la turbine, qui extrait l'énergie pour entraîner le compresseur et l'hélice via le réducteur. L'écoulement se termine au passage d'une tuyère d'éjection (5-6), où la détente se termine jusqu'à la pression ambiante P_1. Le coefficient de détente vaut $\pi_e = \frac{P_6}{P_5} \approx \frac{P_1}{P_5}$.

  On note η_T le rendement isentropique de la turbine, T_5 la température réelle de sortie de la turbine et T_{5s} la température isentropique, γ_f le coefficient isentropique du dodécane gazeux.

Pour un compresseur, le rendement isentropique est le **rapport du travail minimal théorique** (isentropique) au **travail réel consommé** pour atteindre la même pression de sortie.

Pour une turbine, le rendement isentropique est défini comme le rapport **du travail réel produit** au **travail maximal théorique** (isentropique) que la turbine pourrait fournir entre les mêmes pressions d'entrée et de sortie.

L'objectif est de déterminer la puissance reçue par l'hélice en fonction du débit massique de carburant. Une analyse chimique de la combustion permettra de quantifier la pollution générée par le turbopropulseur.

On note χ_s la compressibilité de l'air à entropie constante : $\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s$, ρ_a sa masse volumique et M_a sa masse molaire.

Question 8. Établir l'expression de χ_s pour un gaz parfait en fonction de sa pression P et de γ.

Question 9. La vitesse du son étant définie par $V_{son} = \sqrt{\frac{1}{\rho\chi_s}}$, exprimer V_{son} à partir de γ, M_a, R et T.

Question 10. Exprimer la capacité calorifique massique à pression constante d'un gaz parfait c_p en fonction de γ, M(masse molaire) et R la constante des gaz parfaits.

Le nombre de Mach à l'entrée du turbopropulseur est défini par $\mu_1 = \frac{V_p}{V_{son}}$.

Question 11. Donner l'expression de D_{ma} (débit massique d'air en entrée du turbopropulseur, Figure 10) en fonction du nombre de Mach μ_1, la masse volumique de l'air ρ_a, sa masse molaire M_a, la section d'entrée A_e, la température d'entrée T_1 et les constantes liées aux gaz parfaits.

La figure suivante (Figure 11) illustre le résultat précédent, en atmosphère standard (15°C et $1{,}013.10^5\ Pa$ au niveau de la mer), pour un avion de transport régional type ATR72 équipé d'un turbopropulseur PW127.

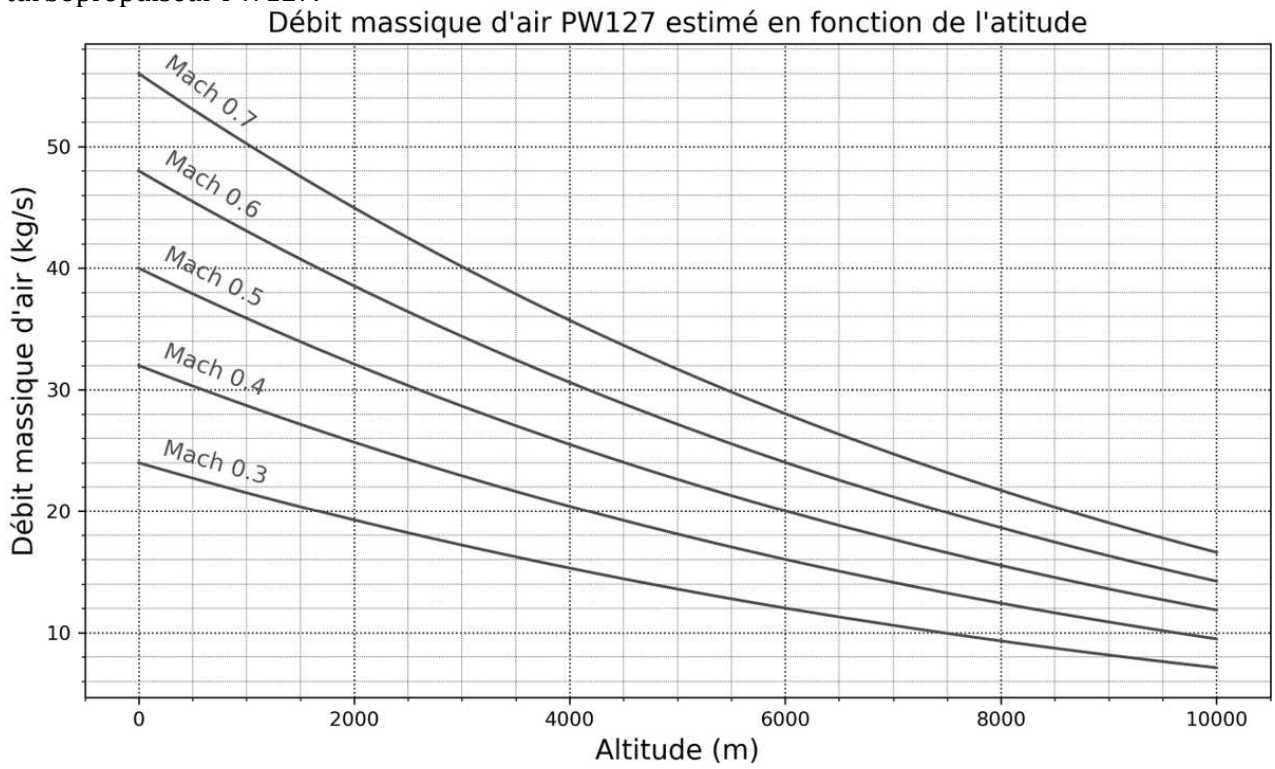


Figure 11 – Débit massique en fonction de l'altitude et du nombre de Mach, en atmosphère standard

Question 12. Déterminer l'expression de T_2, puis P_2, en fonction de T_1 (respectivement P_1), γ et μ_1.

Question 13. Déterminer T_3 en fonction de T_2, γ, r_c et η_c ainsi que la puissance apportée par le compresseur P_{comp}, en fonction du débit massique d'air D_{ma}, de R, M_a, γ, T_2, r_c et η_c.

Le carburant utilisé est un mélange complexe d'hydrocarbures (paraffines, cycloparaffines, aromatiques). On va utiliser dans notre modélisation un hydrocarbure « moyen », le dodécane $C_{12}H_{26}$. La combustion est complète (excès d'air).

L'air est ici représenté par un mélange oxygène/azote : 20 % de O_2 et 80 % de N_2 (en quantité de matière).

Question 14.

- Écrire l'équation de combustion. Le coefficient stœchiométrique du dodécane sera unitaire.
- En déduire la valeur AFR (Air Fuel Ratio) définie par $AFR = \frac{Masse\ d'air}{Masse\ de\ carburant}$ pour être dans les proportions stœchiométriques.

À l'altitude considérée (6 500 m), **il n'y a que 20 % de l'air entrant qui participe à la combustion** (source « *Etude paramétrique des turbopropulseurs* », *Boudali Errebai 2018* »). La combustion reste complète.

Le débit d'air servant à la combustion est donc $\mathbf{0,2 * D_{ma}}$.

Question 15. En déduire la valeur du débit massique de carburant D_{mf} dans le cadre d'un vol à 6 500 m d'altitude à $Mach$ 0,5 .

Question 16. Calculer l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H°$ de la combustion du dodécane (on négligera l'enthalpie de vaporisation du carburant). Commentez le signe.

Avant d'être vaporisé, le carburant est réchauffé dans un échangeur carburant/huile, ce qui permet de refroidir l'huile et d'éviter le givrage du carburant au moment de la pulvérisation. Le dodécane arrive donc à la température T_3, sous forme gazeuse, dans la chambre de combustion.

De plus, grâce à la valeur AFR trouvé en question 14, on négligera l'énergie nécessaire à l'échauffement du dodécane jusqu'à T_4.

Question 17. À l'aide d'un bilan au niveau de la chambre de combustion, déterminer la température T_4 en fonction de T_3, M_a, $\Delta_r H°$, R, et γ.

Question 18. Déterminer la puissance totale P_{tot} extraite au cours de la détente ④⟹⑤ et ⑤⟹⑥, en fonction de D_{ma}, T_4, AFR, des différentes constantes et des pressions P_4 et P_1.

On note η_m le rendement de la chaine cinématique menant à l'hélice.

Question 19. Donner l'expression de la puissance reçue par l'hélice en fonction des puissances présentes aux différents étages et du rendement mécanique η_m.

Le cycle de Brayton correspondant à notre modélisation est donné par la Figure 12 ci-dessous.

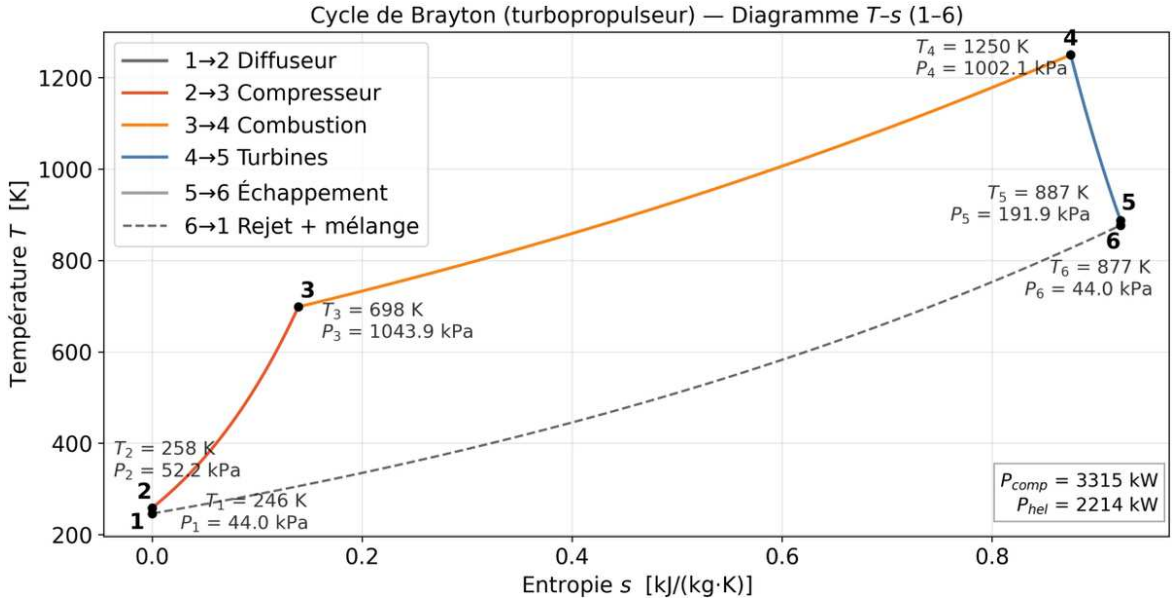


Figure 12 – Diagramme $T - s$ du cycle de Brayton pour le turbopropulseur, à Mach 0.5.

Question 20. Comment le graphique précédent est-il modifié si les hypothèses suivantes de la modélisation ne sont pas strictement vérifiées (répondre qualitativement) :

- transfert thermique vers l'extérieur (non adiabatique) ;
- combustion incomplète ;
- pertes de charge dans l'écoulement.

Question 21. En reprenant l'équation de combustion de la question 14, en déduire le débit massique (en kg/s) de CO_2 émis par l'avion présenté (ATR 72, 2 turbopropulseurs, vol à 6500 m avec 20 % d'air utile).

Question 22.

- Déterminer numériquement la consommation de carburant par passager pour 100 km en vol de croisière (78 passagers dans l'avion).
- Comparer avec la donnée constructeur de consommation (tableau de la Figure 3). Conclure sur la qualité du modèle.

Les questions précédentes ont permis de déterminer les paramètres thermodynamiques de l'écoulement, selon le schéma de la Figure 13 :

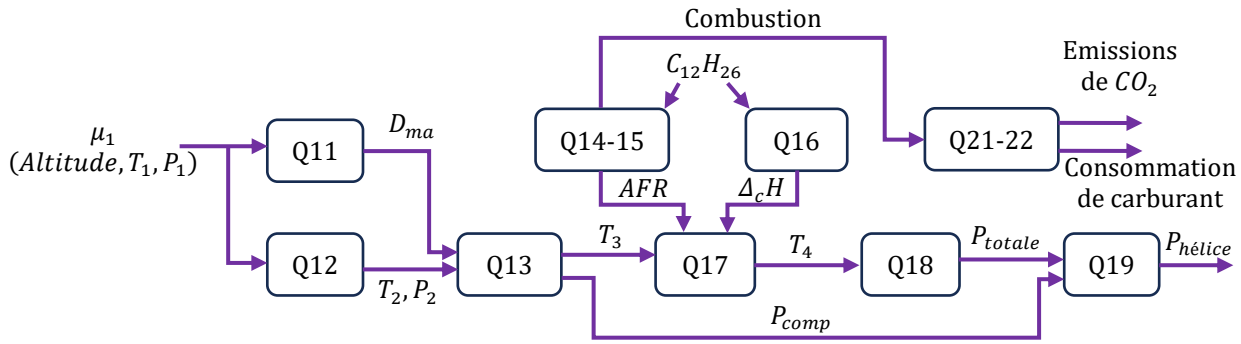


Figure 13 –Vue d'ensemble de la modélisation thermodynamique

La question 19 a permis d'établir l'expression de la puissance que reçoit une hélice ($P_{hélice}$) en fonction des conditions de vol. La Figure 14 s'appuie sur ce résultat et donne la puissance totale qui sert à propulser l'avion (80 % de $P_{hélice}$, 2 turbopropulseurs) en fonction du nombre de Mach μ_1 et de l'altitude (T_1 et P_1 sont donc connues par les conditions d'atmosphère standard).

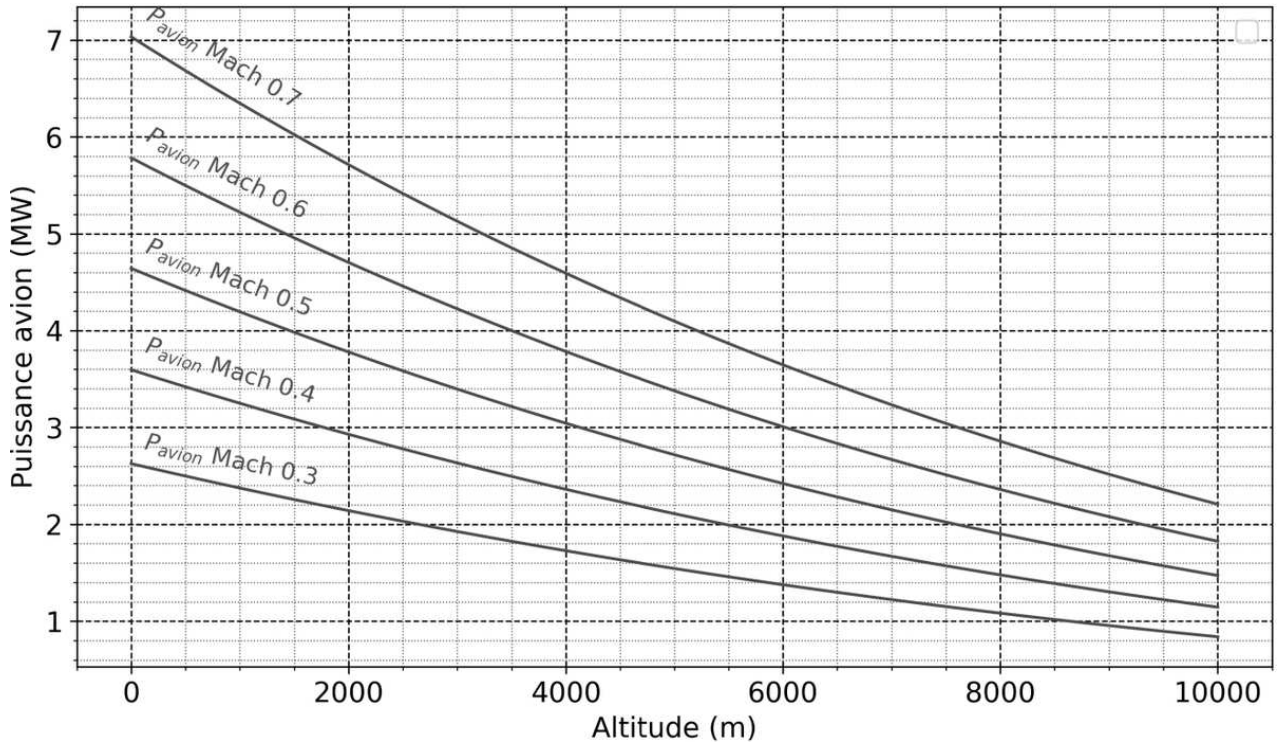


Figure 14 – Puissance théorique propulsant l'avion

La Figure 15 donne quant à elle la puissance de la résistance de l'air en fonction de l'altitude et du nombre de Mach.

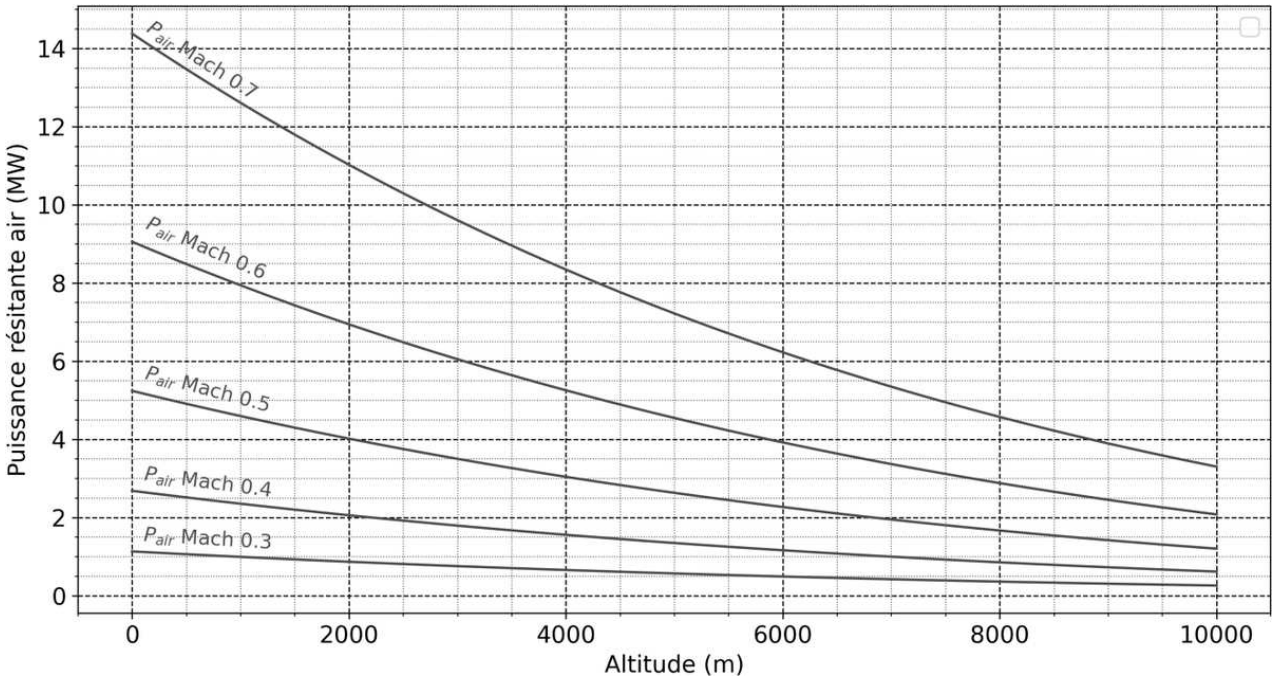
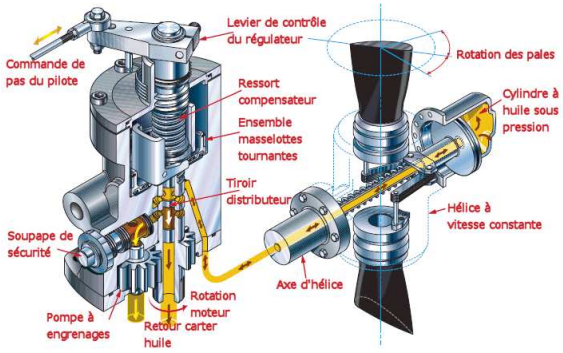


Figure 15 – Puissance résistante de l'air

Question 23. Analyser finement les valeurs de ces courbes et expliquer pourquoi la vitesse de croisière de cet avion est $Mach$ 0,5.

A-3 - Le régulateur de pas d'hélice

Nous allons maintenant établir un modèle pour le régulateur de pas d'hélice. Le pilote agit sur la puissance délivrée et c'est un système mécanique qui régule le pas d'hélice pour que la vitesse de rotation de cette dernière soit constante en palier. L'étude de cette partie du turbopropulseur va permettre de construire un modèle complet incluant la thermodynamique, la chimie de combustion et la régulation mécanique.



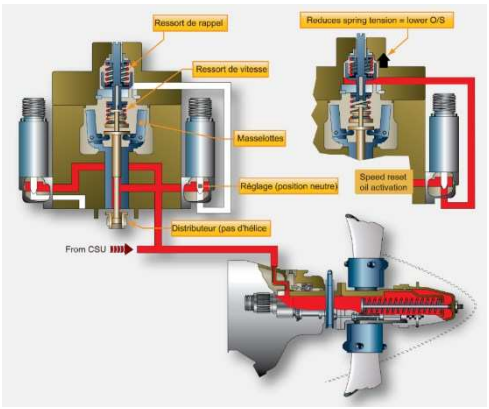
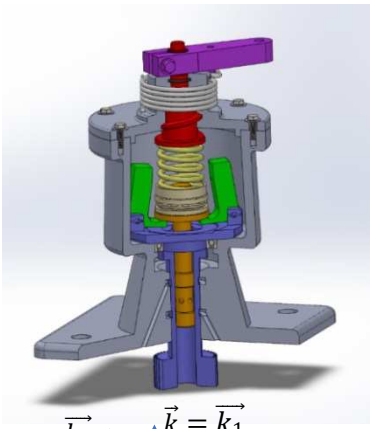


Figure 16 – Régulateurs centrifuges de pas d'hélice

Le régulateur contient des masselottes (**3** et **4**) montées sur un axe tournant avec l'hélice, via un réducteur. Quand le régime augmente, la force centrifuge fait s'écarter les masselottes vers l'extérieur.

Un ressort s'oppose à l'écartement. Il est réglé pour maintenir un équilibre à un régime cible.

Le déplacement du point M (masselottes contre ressort) actionne une valve hydraulique pilotant le pas d'hélice. La charge sur le turbopropulseur change alors et impacte la vitesse de rotation du régulateur.



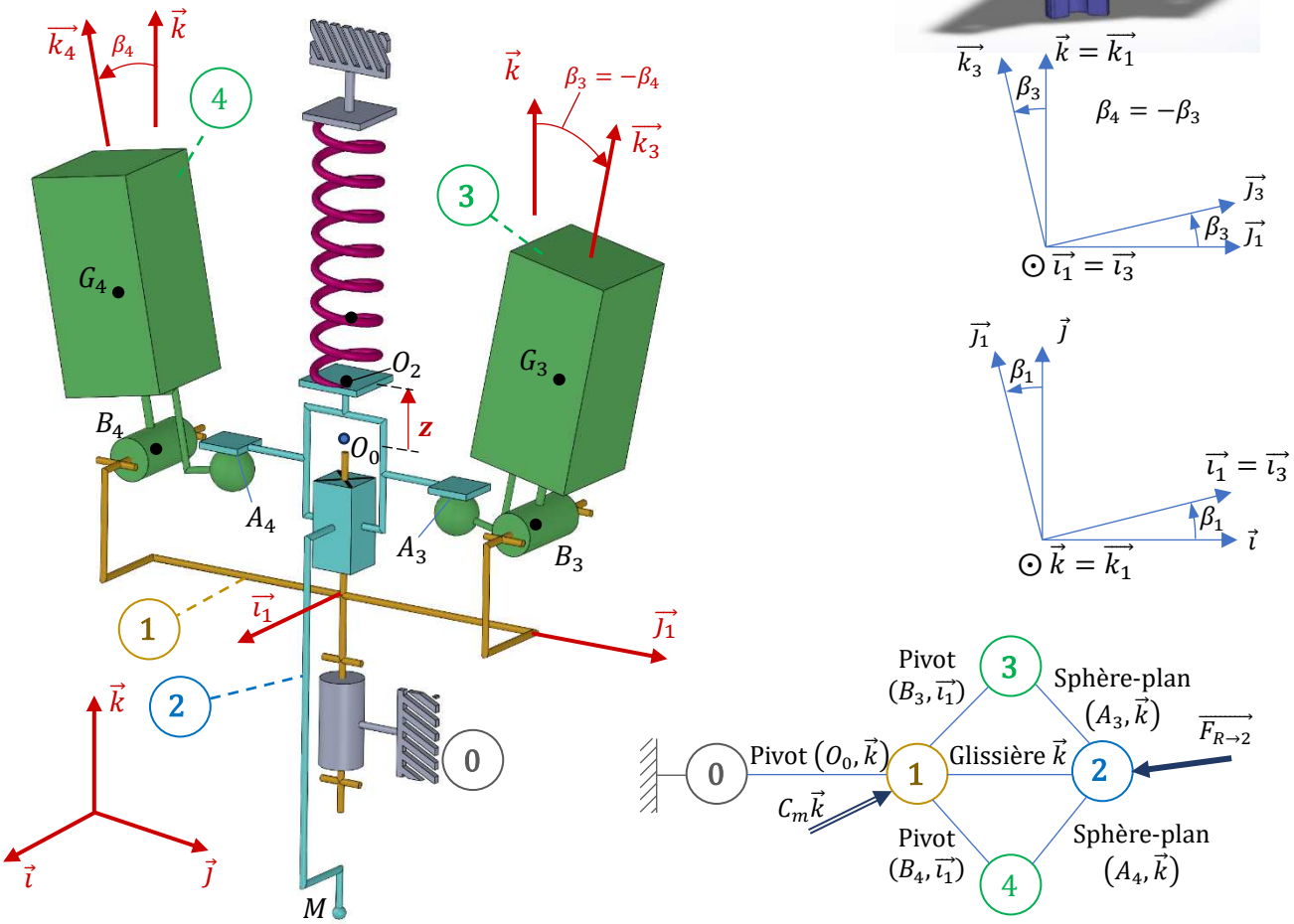


Figure 16 – Schéma cinématique du régulateur, vue 3D, paramétrage, graphe des liaisons

Hypothèses et paramétrage :

- l'angle β_3 reste faible au cours du mouvement :

$$cos(\beta_3) \approx 1 \text{ et } sin(\beta_3) \approx \beta_3$$

- $(O_0, \vec{k}, \vec{\imath_1})$ est plan de symétrie matériel et géométrique ;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites et le repère $R_0(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sert de référentiel galiléen ;
- les actions de la pesanteur sur les masselottes **3** et **4** sont négligées devant les forces d'inertie ;
- le poids de **2** est négligé ;

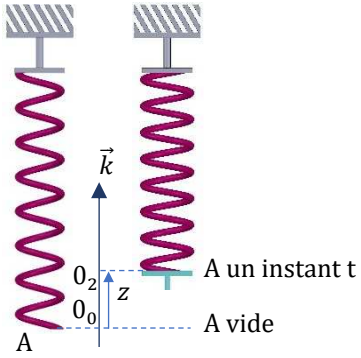


Figure 17 – Ressort et origine

- le déplacement de la pièce **2** est repérée par la variable $z = \overrightarrow{O_0O_2}.\vec{k}$, qui mesure l'écrasement du ressort à un instant t par rapport à sa position à vide O_0 (Figure 17) ;
- le ressort, de raideur k_R, exerce un effort $\overrightarrow{F_{R\to 2}}$ sur la pièce **2** tel que : $\overrightarrow{F_{R\to 2}} = -k_R z\vec{k}$;
- la vitesse de rotation de **1** par rapport à **0** est supposée constante : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\beta}_1\vec{k} = \omega_1\vec{k}$.

Géométrie : $\overrightarrow{B_3G_3} = a_3\overrightarrow{k_3}$ $\quad \overrightarrow{O_2A_3} = -c\vec{k} + d\overrightarrow{j_1}$ $\quad \overrightarrow{O_0O_2} = z\vec{k}$

$\overrightarrow{B_3A_3} \approx -b_3\overrightarrow{j_3}$ $\quad \overrightarrow{O_0B_3} = -a\vec{k} + b\overrightarrow{j_1}$

Données de masse : Moment d'inertie par rapport à $(O_0, \vec{k})$ de l'arbre d'entraînement **1** :

$$I_{(O_0,\vec{k})}(1) = I_1$$

Distributeur **2** : masse M_2

Masselottes **3** et **4** (identiques) : masse M_3, de centre d'inertie G_3 et de matrice d'inertie $\overline{\overline{I(G_3,3)}} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{\imath_1},\overrightarrow{J_3},\overrightarrow{k_3})}$

Effort de liaison : La résultante de l'action mécanique de **2** sur **3** est notée : $\overrightarrow{R_{2\to 3}} = -Z_{23}\vec{k}$.

La vitesse de rotation de l'arbre **1**, par rapport à la structure de l'avion, est d'environ 100 rad/s, ce qui rend les forces de pesanteur faibles ($\approx 1{,}5\ N$) devant les forces centrifuges ($\approx 100\ N$).

Question 24. Expliquez l'avantage d'un tel ratio entre ces deux forces.

Question 25. Exprimer β_3 en fonction de z.

Question 26. Écrire le théorème du moment dynamique à la masselotte **3**, au point B_3, dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_0, en projection sur $\overrightarrow{\imath_1}$.

Question 27. Appliquer le théorème de la résultante dynamique à **2**, en projection sur $\vec{k}$.

Question 28. En déduire l'équation de mouvement en fonction de ω_1, z, $\ddot{z}$ et des autres constantes du mécanisme. Le résultat sera proposé sous la forme :

$$K_1\ddot{z} + K_2 z = K_3$$

où K_1, K_2 et K_3 sont des constantes à préciser.

Question 29. Quel est l'inconvénient majeur de ce modèle ?

En vol, le pilote dispose de deux leviers de commande (Figure 18):

- la vitesse hélice CL (Condition Level), qui reste constante en vol en palier,
- la puissance (POWER).

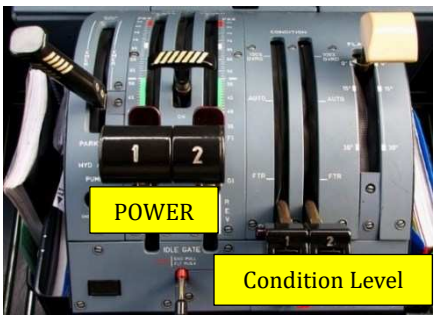


Figure 18 – Poste de pilotage : paramètres de vol

Pour certains turbopropulseurs, lorsque le pilote veut une puissance de traction de l'hélice plus importante, cela se traduit par une augmentation du débit massique de kérosène dans le turbopropulseur et un déplacement vertical du ressort du régulateur, c'est-à-dire une modification du point O_0. En palier, la vitesse de rotation ω_1 reste constante, l'excès de puissance étant absorbé par un changement de pas d'hélice et donc un couple résistant plus grand. Le schéma global de cette régulation est donné par la Figure 19.

Le régulateur centrifuge de pas (Propeller Control Unit (PCU)) ajuste automatiquement le pas pour maintenir $\omega_{hélice}$ demandé lorsque le couple change.

L'hélice et le régulateur sont placés tous deux en aval d'un réducteur, de rapport $r_1 = 1/15$ pour l'hélice et $r_2 = 0{,}8$ pour le régulateur.

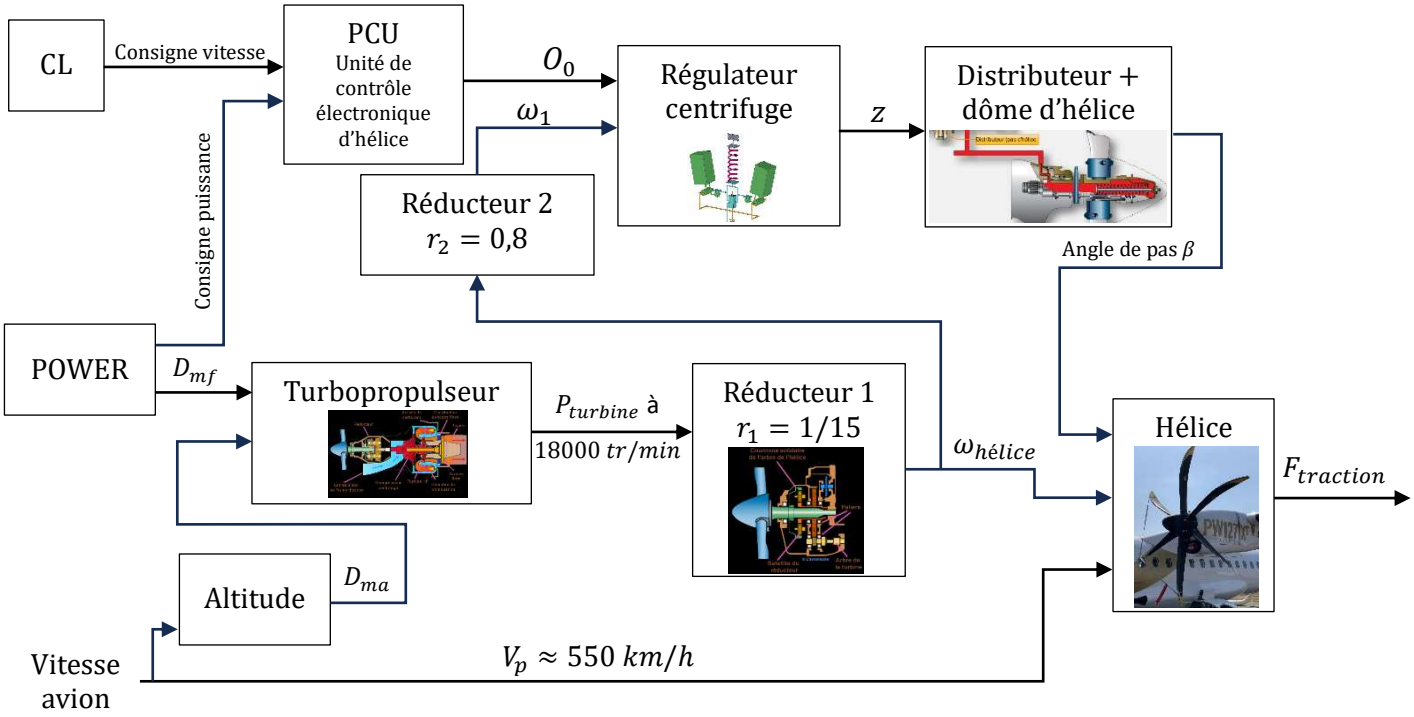


Figure 19 – Schéma de régulation pour la puissance fournie à l'hélice

L'équation différentielle trouvée en question 28 s'écrit, pour un réglage POWER de 70%, avec des valeurs numériques issues de données ou plans constructeurs :

$$5{,}42.10^{-2}\ddot{z}(t) + 7080z(t) = 14{,}5 \quad .$$

Ces valeurs sont obtenues dans les conditions suivantes :

- vol en palier, $Mach$ 0,5 ($\approx 550\ km/h = 153\ m/s$), altitude 6500 m ;
- POWER sur 70 % ;

Question 30. La structure de l'avion étant déformable, elle peut transmettre certaines vibrations et le régulateur pourrait alors devenir un oscillateur forcé. En analysant le schéma de régulation de la Figure 19, indiquer si la fréquence de résonance de cet oscillateur est présente dans les conditions de vol considérées (turbopropulseur, régulateur et hélice).

A-4 - Validation du modèle

Les Figures 20, 21 et 22 complètent la modélisation du turbopropulseur en affichant respectivement les courbes de comportement suivantes :

- déplacement z de la tige du régulateur, en extrapolant la loi obtenue précédemment aux différents réglages de puissance affichée,
- angle de pas d'hélice en fonction du déplacement de la tige du distributeur,
- poussée totale des 2 hélices en fonction du pas, commande POWER sur 70%, altitude 6500 m, $Mach$ 0,5.

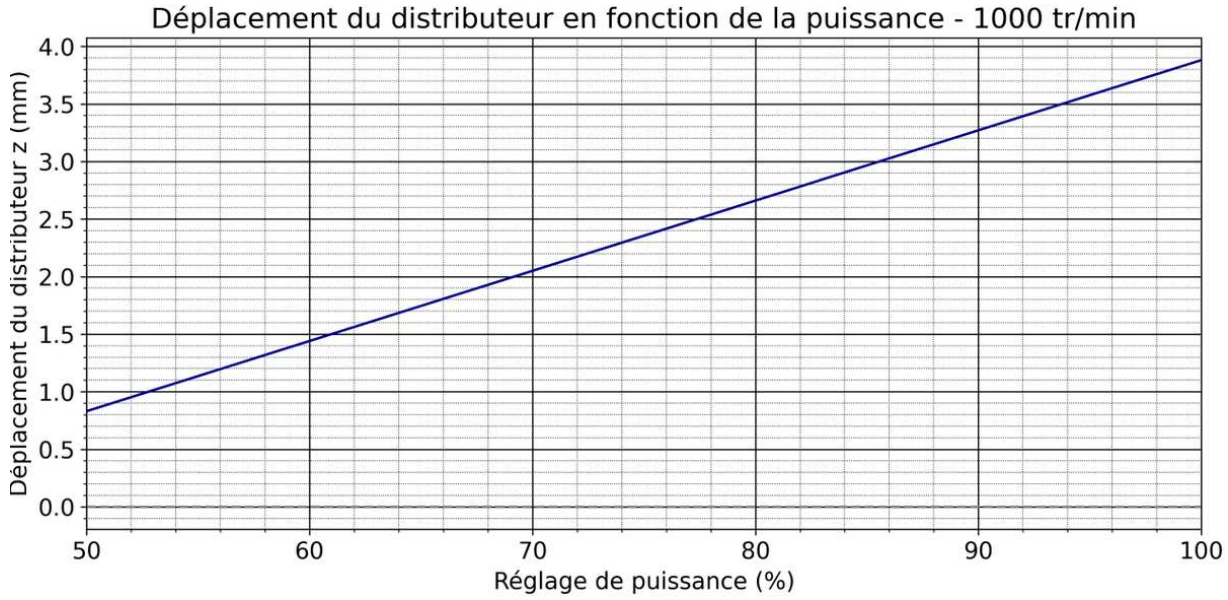


Figure 20 – loi entrée-sortie du régulateur centrifuge

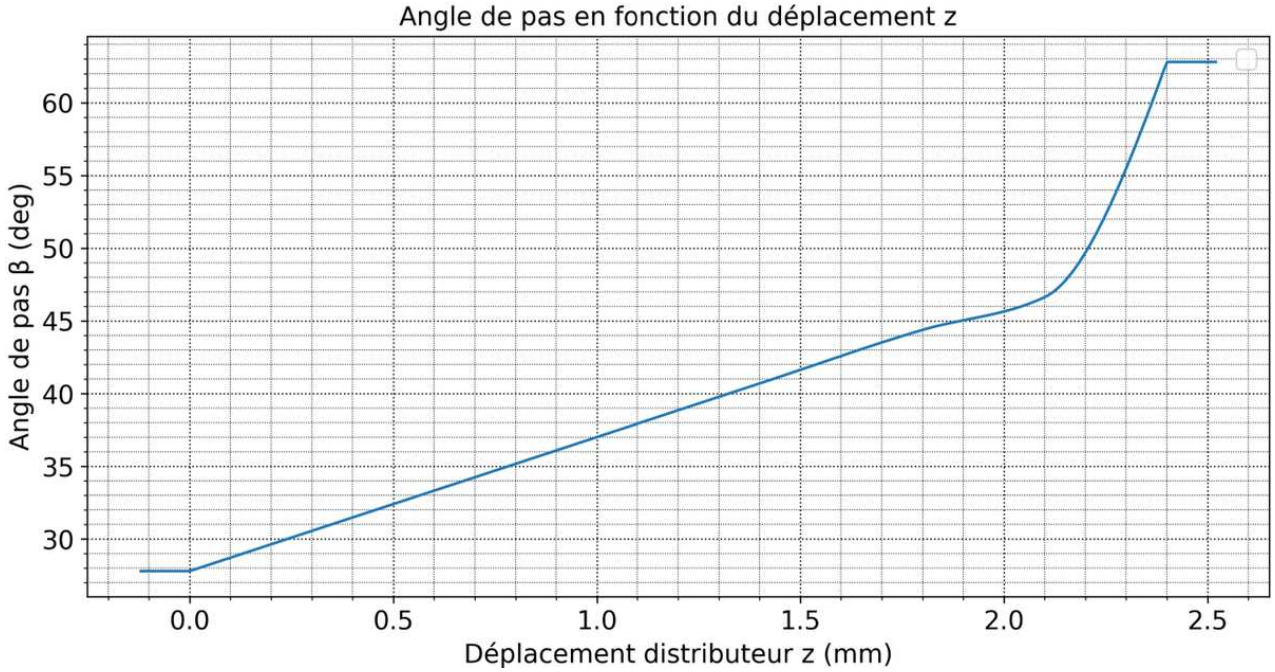


Figure 21 - Angle de pas d'hélice en fonction du déplacement du distributeur

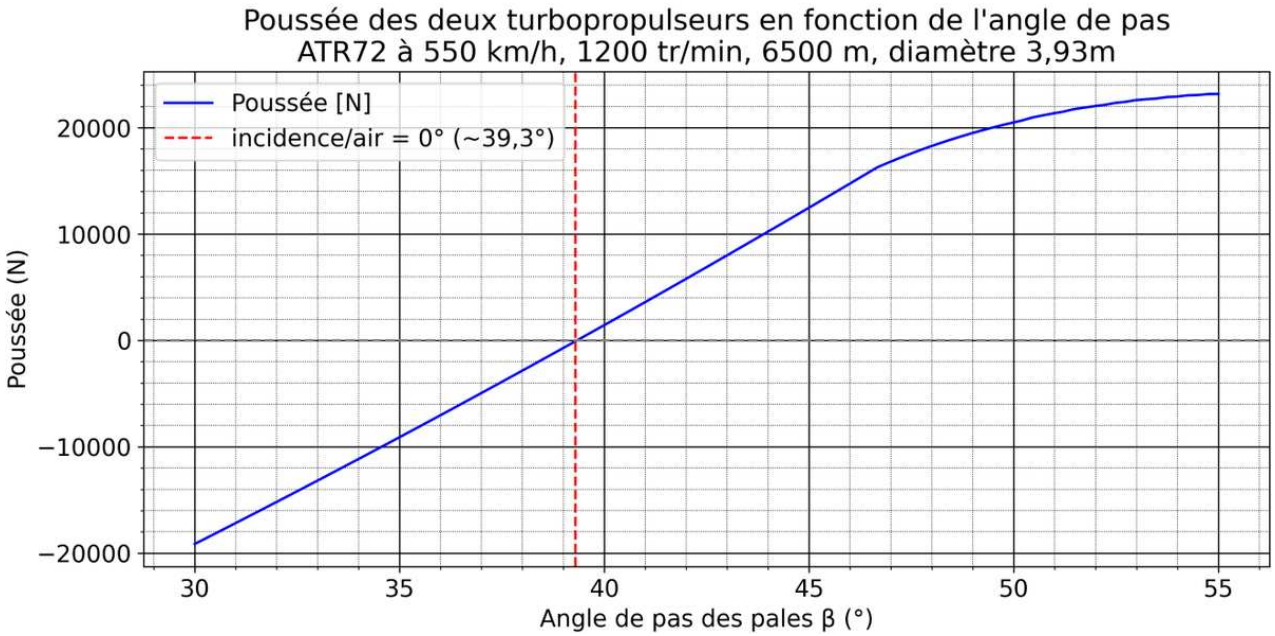


Figure 22 – Poussée de l'hélice en fonction du pas, commande POWER à 70%

Question 31. Déterminer la force propulsive en vol en palier ($6\,500\,m - Mach\,0{,}5$), à 70 % de puissance maximale.

Question 32.

- Estimer, à partir des données des Figures 2 et 3 ou de la Figure 15, la force résistante de l'air dans ces conditions de vol.
- Comparer avec la valeur précédente et discuter de la pertinence du modèle.

Question 33. Dans le cadre d'un avion tout électrique, proposer, sous forme de schéma cinématique, un mécanisme permettant de faire varier le pas d'hélice, sans hydraulique cette fois : l'actionneur serait un moteur électrique.

Partie B - L'alimentation électrique en énergie d'un avion hybride et électrique

L'étude précédente a permis de modéliser le fonctionnement d'un turbopropulseur conventionnel d'avion de transport régional, avec son bilan d'émissions de CO_2 ainsi que son régulateur centrifuge assurant la stabilité du régime moteur.

Cependant, cette analyse a révélé la forte dépendance énergétique du turbopropulseur vis-à-vis du carburant fossile. Or, les enjeux environnementaux actuels — réduction des émissions de CO_2, limitation du bruit et amélioration du rendement énergétique global — incitent à repenser la manière dont l'énergie est produite, stockée et utilisée à bord.

En effet, si l'énergie spécifique élevée du kérosène ($\sim$11,9 kWh/kg) a permis à l'aviation thermique de prospérer, l'énergie spécifique des batteries actuelles (0,101 kWh/kg pour les batteries sodium-ion, 0,25 kWh/kg pour les lithium-ion) limite fortement la progression et le développement de ce type de transport.

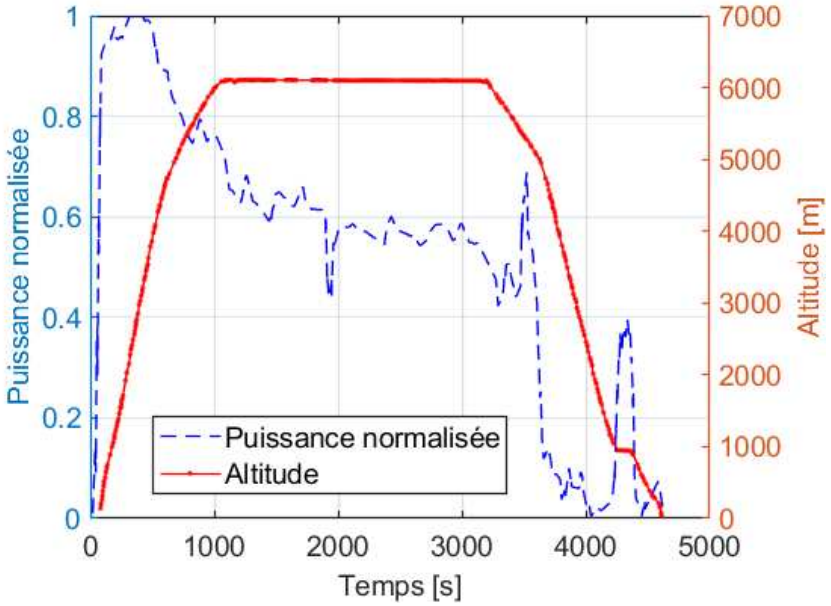


Figure 23 – Profils standard en puissance pour un vol inter régional

L'étude de la partie A n'a pas pris en compte les variations de puissance en fonction du temps, qui sont souvent en contradiction avec l'utilisation optimale des moyens de production d'énergie à bord. Sur la Figure 23, nous pouvons remarquer trois phases d'énergie distinctes :

- le décollage avec une puissance maximale sur un temps court,
- le vol stationnaire où la puissance est constante,
- l'atterrissage avec une puissance moyenne faible mais des variations importantes de la puissance.

Différentes technologies de sources d'énergie sont en concurrences pour les avions électriques et hybrides : batteries, piles à combustible et supercondensateurs. Chacune de ces sources ne permet pas seule d'alimenter en énergie un avion. Il est nécessaire de les combiner afin d'obtenir une source globale d'énergie permettant d'adresser les différentes parties du vol.

Nous allons maintenant nous intéresser à des problématiques liées à la pile à combustible.

B-1 Modélisation d'une pile à combustible à membrane échangeuse de protons

Il existe différentes technologies de piles à combustibles certaines étant toujours en développement dans les laboratoires. Parmi ces différentes technologies, la pile à combustible à membrane échangeuse de protons (PEMFC) est l'une des technologies les plus avancées et utilisées dans l'industrie. Nous pouvons trouver cette technologie de quelques watts, à plusieurs centaines de kilowatts. Elle possède une énergie spécifique supérieure à 3 kWh/kg avec un rendement de l'ordre de 40 à 50 %. La PEMFC transforme l'énergie chimique libérée durant la réaction du dihydrogène et du dioxygène en énergie électrique. Sa structure simplifiée se trouve sur la Figure 24 :

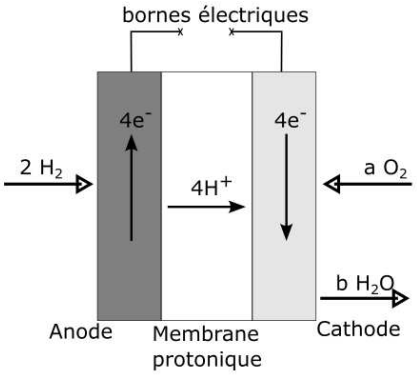


Figure 24 - Source d'énergie énergie électrique W_e

Deux demi-équations d'oxydoréduction se produisent dans la PEMFC : une au niveau de l'anode et la seconde au niveau de la cathode.

Au niveau de l'anode, le dihydrogène introduit sous pression se transforme en cations hydrogène et en électrons.

$$H_2 \rightarrow 2\,H^+ + 2\,e^-$$

Au niveau de la cathode, le dioxygène introduit se transforme avec les électrons et les cations d'hydrogène en eau.

Question 34. Équilibrer la demi équation d'oxydoréduction au niveau de la cathode. Donner $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

$$4\,H^+ + 4\,e^- + \boldsymbol{a}\,O_2 \rightarrow \boldsymbol{b}\,H_2O$$

Dans le cas de la pile, la réaction oxydoréduction s'écrit :

$$2\,H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O$$

A l'équilibre thermodynamique dans l'état standard, l'enthalpie libre associée à la réaction électrochimique et la force électromotrice s'équilibre :

$$\Delta_r G^0 + n\,\mathcal{F}\,E^0_{eq} = 0$$

avec $\Delta_r G^0$ l'enthalpie libre standard de réaction qui vaut $-237{,}1\ kJ/mol$, n le coefficient stœchiométrique associé à l'électron et $\mathcal{F}$ la constante de Faraday (96485 C/mol)

Question 35. Calculer la tension à vide, notée E^0_{eq}, de la cellule.

Lorsqu'un courant électrique parcourt la pile à combustible, plusieurs phénomènes de conduction et de pertes entrent en jeu. Du point du vue du fonctionnement électrique externe, nous relevons la caractéristique tension / densité de courant de la pile à combustible de manière expérimentale $U_{PEMFC} = f(J_{PEMFC})$ (Figure 25) :

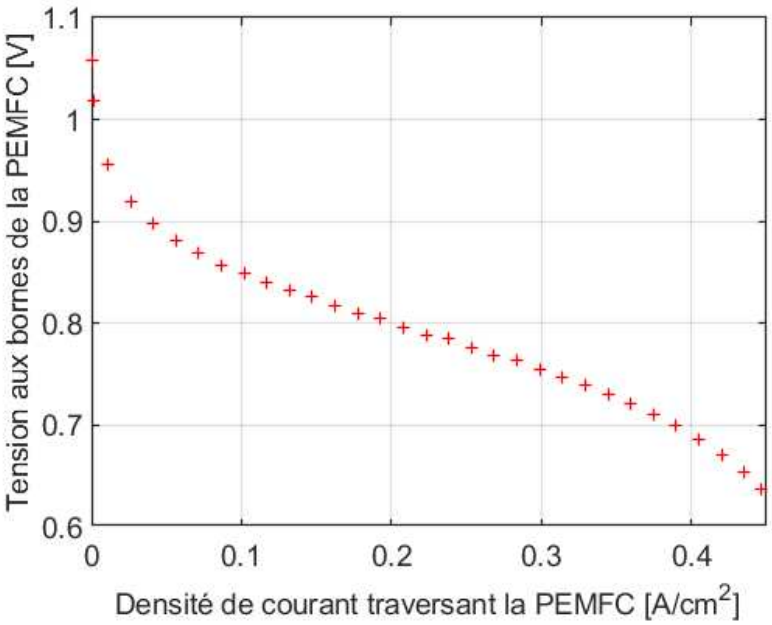


Figure 25 – Evolution de la tension, sous une pression de $1\ atm$

Dans la suite, nous cherchons à approcher la fonction $U_{PEMFC} = f(J_{PEMFC})$ par un polynôme de degré K. Cette modélisation sera ensuite utilisée pour simuler électriquement la PEMFC. Ce polynôme s'écrit sous la forme :

$$\widetilde{U}_{PEMFC} = \sum_{k=0}^{K} p_k \, {J_{PEMFC}}^k$$

avec $\widetilde{U}_{PEMFC}$, l'approximation polynomiale de U_{PEMFC}. On notera i chaque mesure réalisée de telle manière que :

$$U_{PEMFC}[i] = f(J_{PEMFC}[i])$$

Question 36. Écrire l'approximation polynomiale de U_{PEMFC} pour la mesure i sous la forme :

$$\widetilde{U}_{PEMFC}[i] = r^t[i]p = (r_0 \quad \cdots \quad r_K)\begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_K \end{pmatrix}$$

Question 37. Déduire de la forme précédente le vecteur complet $\widetilde{U}_{PEMFC}$ contenant toutes les mesures (il y a G+1 mesures) sous la forme :

$$\widetilde{U}_{PEMFC} = R\,p = \begin{pmatrix} r_{00} & \cdots & r_{0K} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{G0} & \cdots & r_{GK} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_K \end{pmatrix}$$

Question 38. La matrice R est appelée matrice des régresseurs. Compléter le code python (Figure 26) qui permet d'écrire numériquement cette matrice (MAT_REG_CONST dans le code proposé) à l'aide des mesures réalisées sur la densité de courant. Donner la complexité du code écrit.

```python
def const_mat_regresseur(POLYNOME_TAILLE: int,
                         D_COURANT: np.ndarray) -> np.ndarray:
    """
    Fonction qui construit la matrice des regresseurs à partir des mesures
    de densité de courant.

    Parameters
    ----------
    POLY_TAILLE : int
        Taille du polynôme d'approximation soit le nombre de coefficient à
    calculer K + 1.
    D_COURANT : np.ndarray
        Vecteur des densités de courant mesurées (vecteur type numpy array)
    soit de taille G + 1 mesures.

    Returns
    -------
    MAT_REG_CONST : np.ndarray
        Matrice des regresseurs (vecteur type numpy array).

    """

    # Création de la matrice des regresseurs




    return MAT_REG_CONST
```

Figure 26 – Code incomplet de construction de la matrice des régresseurs

Nous cherchons les valeurs de p_k qui permettent de minimiser la distance entre U_{PEMFC} et $\widetilde{U}_{PEMFC}$. Pour mesurer cette distance, nous utilisons une norme Euclidienne telle que :

$$\|\varepsilon\|_2^2 = \sum_{i=1}^{G} {\epsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^{G} \left(U_{PEMFC}[i] - \widetilde{U}_{PEMFC}[i]\right)^2$$

Cette fonction $\|\varepsilon\|_2^2$ est convexe. La minimisation de cette fonction revient à trouver les K+1 valeurs de p_k telles que :

$$\frac{\partial \|\varepsilon\|_2^2}{\partial\, p_k} \to 0$$

Question 39. Montrer que le vecteur des paramètres qui minimise l'erreur entre la mesure et l'approximation est calculé à partir de l'équation normale :

$$(R^t R)p = R^t\, U_{PEMFC}$$

Nous rappelons quelques règles de dérivation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial x} y^t A x = \frac{\partial}{\partial x} x^t A^t y = y^t A \; ou \; A^t y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x^t A^t A x = 2A^t A x$$

Nous proposons de comparer deux modèles polynomiaux d'ordre 1 et d'ordre 7.

Question 40. Pour le modèle d'ordre 1, démontrer que ce modèle revient à considérer comme schéma équivalent un générateur de tension avec une résistance interne en série.

Sur la Figure 27, les deux modèles ont été représentés avec les données expérimentales comme point de comparaison.

Question 41. Décrire plusieurs critères afin de comparer ces deux modèles.

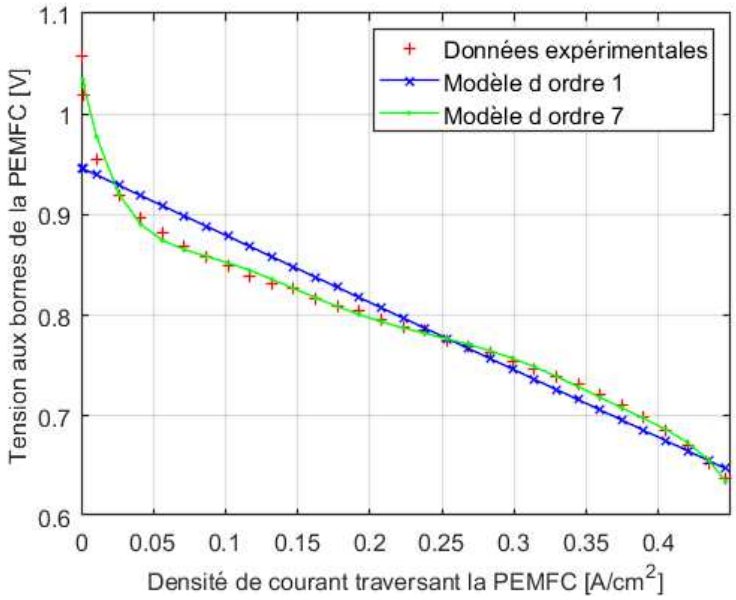


Figure 27 – Comparaison de modèles

Dans la suite, nous allons considérer un modèle du premier ordre de type source de tension et résistances internes pour la simulation électrique de la PEMFC. Pour prendre en compte le comportement dynamique, on se sert d'une capacité en parallèle des résistances, Figure 28.

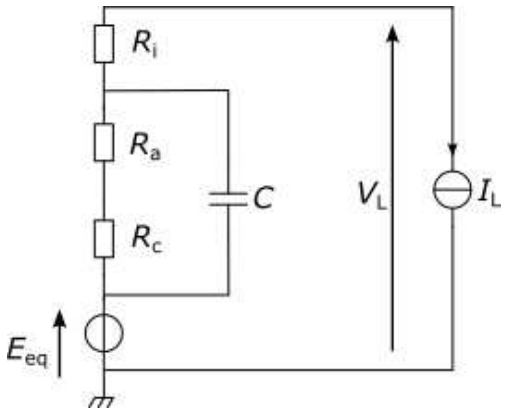


Figure 28 – Utilisation d'une capacité

R_i représente la résistance interne, R_a la résistance modélisant l'activation de la cellule, R_c la résistance modélisant la concentration au sein de la cellule, I_L le courant représentant la puissance extraite de la cellule, C représente le phénomène de couche de double charge dans la cellule, V_L la tension de la cellule et E_{eq} la tension à courant nul.

Question 42. Déterminer l'expression canonique de la fonction de transfert à l'aide de la variable de Laplace p entre le courant I_L (entrée) et V_L (sortie) pour une tension E_{eq} constante.

Question 43. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction transfert pour le courant I_L (entrée) et V_L (sortie) avec une tension E_{eq} constante. On précise que $R_i > 1, R_a > 1, R_c > 1$ et $C > 0$.

B-2 - Augmentation de la puissance massique des entrainements électriques et fiabilité

L'accroissement de la puissance massique des entrainements et notamment des machines électriques est un des critères les plus important au moment de la conception. Néanmoins, cet accroissement va s'accompagner d'une dégradation de la fiabilité de la machine électrique, la fiabilité représentant la probabilité qu'une panne arrive en un temps donné.

Question 44. Pour une machine électrique de couple maximal Γ_{max} [Nm] et de vitesse de rotation au point de base Ω_b [rad/s], définir la puissance mécanique. En définissant le couple massique Γ_{max}/M, avec M [kg] la masse de la machine, comme étant limité pour une machine donnée par la capacité à évacuer les pertes sous forme de chaleur, expliquer pourquoi l'augmentation de la puissance massique passe par l'augmentation de la vitesse de rotation de base Ω_b.

Dans les machines électriques de type synchrone, nous pouvons définir la pulsation électrique ω_b[rad/s] comme étant proportionnelle à la vitesse de rotation $\omega_b = p\Omega_b$ avec p le nombre de paires de pôles. De plus, le schéma électrique monophasé équivalent en négligeant la résistance de phase de cette machine est représenté sur la Figure 29 :

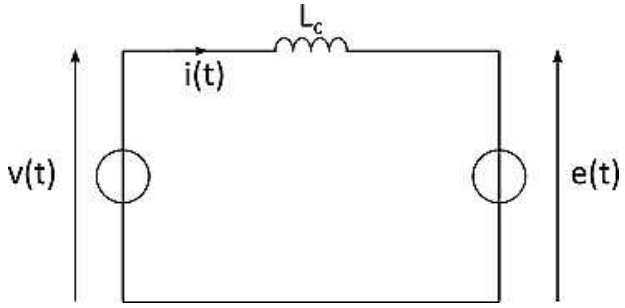


Figure 29 – Schéma électrique équivalent

Question 45. Écrire la relation entre le flux total de la phase $\phi_t(t)$ à courant nul et la force contre électromotrice $e(t)$. À partir du schéma équivalent de la Figure 29, écrire la loi des mailles puis la réécrire sous forme complexe. La forme complexe sera notée de la façon suivante :

$$x(t) \rightarrow \underline{X}(\omega).$$

Question 46. Le courant électrique $i(t)$ et la force contre électromotrice $e(t)$ sont en phase. Montrer que l'augmentation de la vitesse de base Ω_b à courant d'amplitude maximale constante conduit à augmenter l'amplitude maximale de la tension d'alimentation $v(t)$. Résumer la conséquence de l'accroissement de la puissance massique sur l'augmentation de la tension d'alimentation.

Dans la section suivante, nous allons nous intéresser à l'influence sur les conducteurs de la machine électrique de la montée en tension de l'alimentation.

B-3 - Décharges partielles au sein des conducteurs

Les machines électriques possèdent plusieurs phases électriques. Chaque phase est constituée des bobines électriques réparties dans des encoches. Dans les encoches les conducteurs sont répartis de manière plus ou moins ordonnée et ils sont entourés par un isolant de fond d'encoche pour les isoler de la carcasse métallique. Chaque conducteur possède une âme en cuivre entourée par un isolant. Chaque conducteur possède un potentiel électrique propre qui peut être différent des conducteurs voisins.

Dans cette partie nous allons étudier un mécanisme ***simplifié*** qui est à l'origine des décharges partielles dans les bobinages de machine électrique.

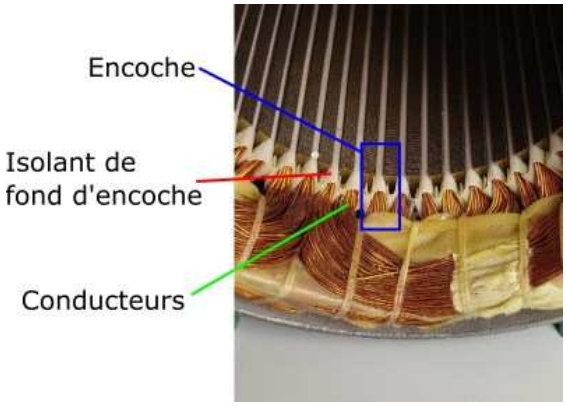


Figure 30 – Stator d'une machine électrique avec les bobinages

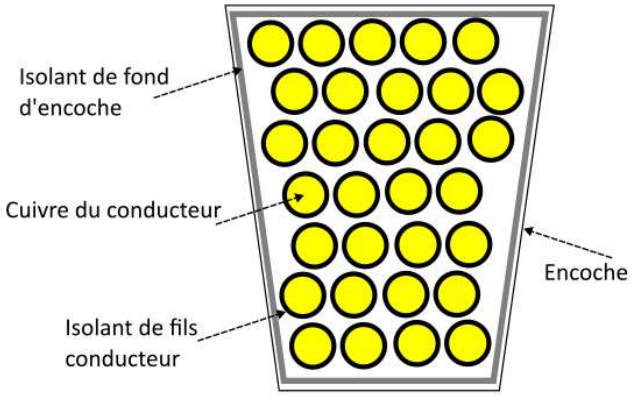


Figure 30 bis – Vue en coupe du bobinage

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à un conducteur unique dont nous allons négliger l'isolant. Ce conducteur se trouve dans un espace infini et possède un rayon R, une longueur H et une charge volumique q.

Question 47. À partir du théorème de Gauss, donner le champ électrique crée par le conducteur pour tout rayon $r \geq R$.

Dans la suite, nous allons considérer deux conducteurs identiques mais possédant des charges opposées.

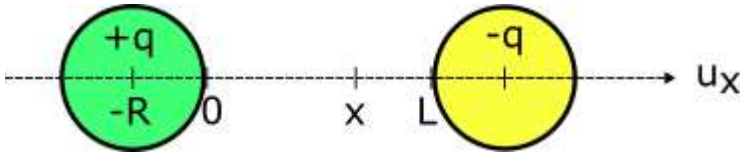


Figure 31 – Proximité de 2 conducteurs

Nous voulons obtenir l'expression du champ électrique sur l'axe où la distance entre les conducteurs est la plus faible, ici $\overrightarrow{u_x}$.

Question 48. En utilisant le théorème de superposition, écrire le champ électrique pour $0 \leq x \leq L$ en fonction de x.

Question 49. Écrire la circulation du champ électrique entre $[0, L]$. En déduire la différence de potentiel entre les deux conducteurs. On prendra L>R. Le calcul de l'intégrale n'est pas demandé.

Entre deux conducteurs de cuivre nous trouvons une couche d'isolant et de l'air. Dans les deux cas, si la tension entre les deux conducteurs devient supérieure à la tension de claquage du matériau, un arc électrique se produit. Cet arc endommage les isolants électriques ce qui conduit à la création d'un pont électrique entre les deux conducteurs et donc à la création d'un court-circuit partiel qui réduit drastiquement la durée de vie de la machine électrique. Sur la Figure 32, la courbe de Paschen donne la tension de claquage de l'air en fonction de la pression (en bar) et la distance entre les électrodes.

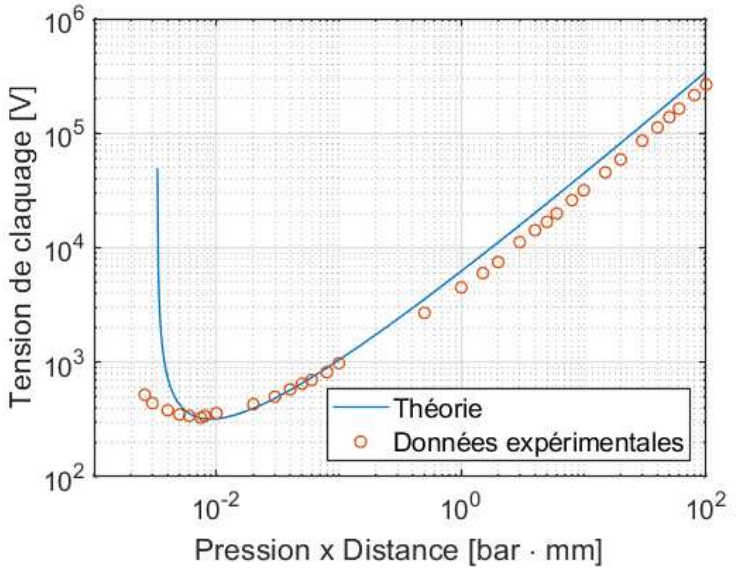


Figure 32 – Evolution de la tension de claquage en fonction de la pression

Au niveau de la mer, la pression est de 1,013 *bar*. Pour un vol commercial, l'altitude de vol est de 6 500 m en moyenne. La pression à cette altitude est de 0,264 *bar*. La distance moyenne entre deux conducteurs est de 0,1 *mm*.

Question 50. Déterminer la tension de claquage entre deux conducteurs au niveau du sol et à 6 500 m d'altitude.

Question 51. Actuellement, la tension dans les réseaux de bord est de l'ordre de 150 V, cela pose t'il problème dans ce cas d'étude ? Conclure quant à la difficulté d'augmenter la tension d'alimentation des machines électriques dans le cadre d'une application avionique.

Conclusion

Question 52. Tirer de cette étude trois points clés du développement des avions hybrides dans un contexte de transport aérien inter régions.

ANNEXE – Aide au calcul numérique

$\frac{15}{15,7} \approx 0,95$	$2 * 0,19 * 3,1 \approx 1,18$	$\frac{1,6}{0,75} = 2,1$
$0,2 * \frac{15}{15,7} \approx 0,19$	$\frac{2,2.10^6 * 3,6}{550} \approx 14400$	$\frac{2,15.10^6}{153} = 14000$
$12 * 392 = 4704$	$153^2 * 1,22 * 9 \approx 257\,000$	$70 * 44 \approx 3,1.10^3$
$13 * 237 = 3081$	$250 * 3600 = 9.10^5$	$\frac{7430}{0,17} \approx 43,7.10^3$
$13 * 392 = 5096$	$\frac{2664}{170} \approx 15,7$	$153^2 \approx 23\,000$
$0,19 * 655 \approx 125$	$55^2 \approx 3\,000$	$\frac{125}{78} \approx 1,6$
$1,6 * 0,75 = 1,2$	$\sqrt{\frac{7080}{5,42.10^{-2}}} \approx 360$	$53,2 * 5600 \approx 3.10^5$
$1,5 * 153^2 \approx 35000$	$\frac{22.10^9}{250} = 88.10^6$	$\frac{22.10^9}{250 * 3600} = 24.10^3$
$74 * 28 = 2072$	$18,5 * 32 = 592$	