

SESSION 2026

AGREGATION CONCOURS EXTERNE

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE DES CONSTRUCTIONS**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1416A	102	2680

Projet INVICTUS

Toutes les études sont indépendantes les unes des autres. En outre, au sein d'une même étude, un grand nombre de questions peuvent être traitées de manière indépendante. Pour chaque question, en complément des résultats de calculs proprement dits, il convient de justifier les choix effectués et les calculs réalisés ainsi que de commenter les résultats obtenus. Une attention particulière doit être apportée à la présentation et à la clarté des explications.

Partie 1 : transferts de chaleur et de vapeur dans une paroi	1h10min
Partie 2 : les ponts thermiques	1h10min
Partie 3 : étude du réseau de distribution de chaleur	40min
Partie 4 : étude d'une poutre du plancher haut	50min
Partie 5 : étude d'une poutre continue	50min
Partie 6 : mise en place de tirants parasismiques et effet « diaphragme »	1h20min

Contexte de l'étude

Maitre
d'ouvrage :



Description du bâtiment

Le support des études est un bâtiment d'enseignement de 780 m² environ, il est composé de 9 salles principales :

- 6 salles de cours,
- 1 salle informatique,
- 1 salle de convivialité,
- 1 salle accueil et des pièces de circulation.

À celles-ci s'ajoutent un local serveur, un local copieur, un local électrique (TGBT), un local ménage et des sanitaires femmes (8 toilettes), des sanitaires femmes PMR, des sanitaires hommes (2 toilettes et 6 urinoirs) et des sanitaires hommes PMR (voir document technique DT0).

Site de construction

L'emplacement du site de construction a été choisi de manière à conserver une cohérence entre les structures présentes aux portes de Marcoule. Le nouveau bâtiment sera à proximité du site choisi pour réaliser les enseignements pratiques (dans l'actuel hall d'exposition du VISIATOME – aile Est du bâtiment 414). L'ensemble des terrains sur lesquels se situent ces trois bâtiments et le parking appartient au CEA Marcoule. Le site est contraint d'un point de vue urbanistique, et le choix s'est porté sur un espace libre de tout espace boisé.

Les principaux critères qui ont conduit au choix de la zone de construction sont les suivants :

- proximité avec les structures existantes de l'INSTN, de l'ICSM et du VISIATOME ;
- terrain accessible par la voirie de la ZA Marcel Boiteux et le parking des bâtiments avoisinants ;
- superficie « libre » suffisante pour la construction d'un bâtiment ;
- situation à l'extérieur de la clôture lourde du site de Marcoule ;
- environnement agréable avec présence de parties boisées aux alentours ;
- faibles dévoiements de réseaux à prendre en compte.

Performances énergétiques

L'ensemble du bâtiment a pour objectif d'être conforme à la réglementation RT2012. Les ouvrages du présent lot ne pourront être réceptionnés si l'obtention de ce label n'est pas atteinte. Les travaux de reprise seront à la charge du titulaire.

Température intérieure hiver : $T_{\text{int}} = 19\text{ °C}$

Température extérieure de base : $T_{\text{ext}} = -5\text{ °C}$

Partie 1 : transferts de chaleur et de vapeur dans une paroi

L'objectif de cette partie est d'étudier les risques éventuels de condensation dans une paroi multicouche du bâtiment et de valider le dimensionnement retenu pour le pare-vapeur.

La condensation dans les parois est une problématique qui doit être étudiée avec le plus grand soin. La paroi décrite sur la figure 1-2 sépare deux ambiances dont les conditions de température et d'humidité sont différentes. Lorsque les conditions sont réunies, il y a un risque de condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air, et ce, à l'intérieur des parois ou sur leurs parements.

Dans le fonctionnement normal d'un bâtiment, la vapeur d'eau contenue dans l'air intérieur va chercher à traverser le mur pour s'équilibrer avec l'air extérieur plus froid et moins chargé en vapeur d'eau. Cette vapeur d'eau contenue dans l'air risque de condenser dans le mur si certaines précautions ne sont pas prises.

Que ce soit dans l'étude du transfert de vapeur ou pour tout ce qui concerne le traitement de l'air humide, il est essentiel de connaître la pression et la température de changement d'état liquide-vapeur de l'eau.

Lorsque la condensation apparaît dans une paroi isolée par l'intérieur c'est à l'interface isolant/béton lorsque la température extérieure est minimale.

Dans une première étape, l'étude du transfert de chaleur à travers la paroi a pour but de connaître l'évolution de la température en son sein. La seconde étape a pour objectif d'établir la relation entre la température et la pression de vapeur saturante. Dans la troisième étape, l'étude du transfert de vapeur dans la paroi permet de conclure sur les risques de condensation dans la paroi.

Transfert de chaleur

Le coefficient de transmission thermique surfacique U (en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$) d'une paroi se calcule par la relation suivante :

$$U = \frac{1}{R_{si} + \sum_i R_i + R_{se}} \text{ avec } R_i = \frac{e_i}{\lambda_i}$$

Où :

- e_i est l'épaisseur de la couche i (en m),
- λ_i est la conductivité thermique du matériau constitutif de la couche i , en ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$),
- R_i est la résistance thermique de conduction des couches composant la paroi,
- R_{si} et R_{se} sont les résistances thermiques superficielles (voir figure 1-1).

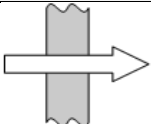
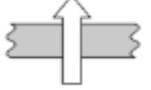
Orientation de la paroi	Orientation du flux	Schéma	R_{si} $m^2 \cdot K \cdot W^{-1}$	R_{se} $m^2 \cdot K \cdot W^{-1}$
Verticale (inclinaison $\geq 60^\circ$)	Horizontal		0,13	0,04
Horizontale (inclinaison $< 60^\circ$)	Ascendant		0,10	0,04
Horizontale (inclinaison $< 60^\circ$)	Descendant		0,17	0,04

Figure 1-1 : Tableau des résistances thermiques

Nature	Épaisseur e m	Conductivité Thermique λ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	Perméabilité π $kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} \cdot Pa^{-1}$
Plâtre	0,013	0,25	$2,3 \cdot 10^{-11}$
Isolant	0,16	0,036	$1,5 \cdot 10^{-10}$
Béton	0,2	0,8	$1,6 \cdot 10^{-12}$
Enduit	0,02	1,0	$2,7 \cdot 10^{-11}$

Figure 1-2 : Composition de la paroi étudiée

Question 1.1. Indiquer et justifier l'unité de la résistance thermique de conduction. Expliquer ce que représente R_{si} et R_{se} , préciser pourquoi R_{se} est systématiquement inférieure à R_{si} .

Question 1.2. Calculer le coefficient de transmission thermique surfacique de la paroi étudiée. Calculer la densité de flux φ traversant cette paroi. Calculer la température dans la paroi à l'interface isolant/béton.

Expression de la pression de vapeur saturante

Le diagramme des phases de l'eau pure (voir figure 1-3) illustre la phase dans laquelle se trouve l'eau suivant la pression et la température à laquelle elle est soumise.

L'objectif est d'établir la relation entre la pression et la température de changement de phase. Pour cela on utilise la formule de Clapeyron qui donne l'évolution de la pression de changement d'état d'un corps pur en fonction de la température :

Où :

- T la température de changement d'état (en K),
- P_{ab} la pression de changement d'état de la phase a à la phase b à la température T (en Pa),
- $\Delta_{ab}H$ l'enthalpie molaire de changement d'état de la phase a à la phase b (en $J \cdot mol^{-1}$),
- $\Delta_{ab}V$ la différence des volumes molaires du corps pur dans les phases a et b (en $m^3 \cdot mol^{-1}$).

$$\frac{dP_{ab}}{dT} = \frac{\Delta_{ab}H}{T \cdot \Delta_{ab}V}$$

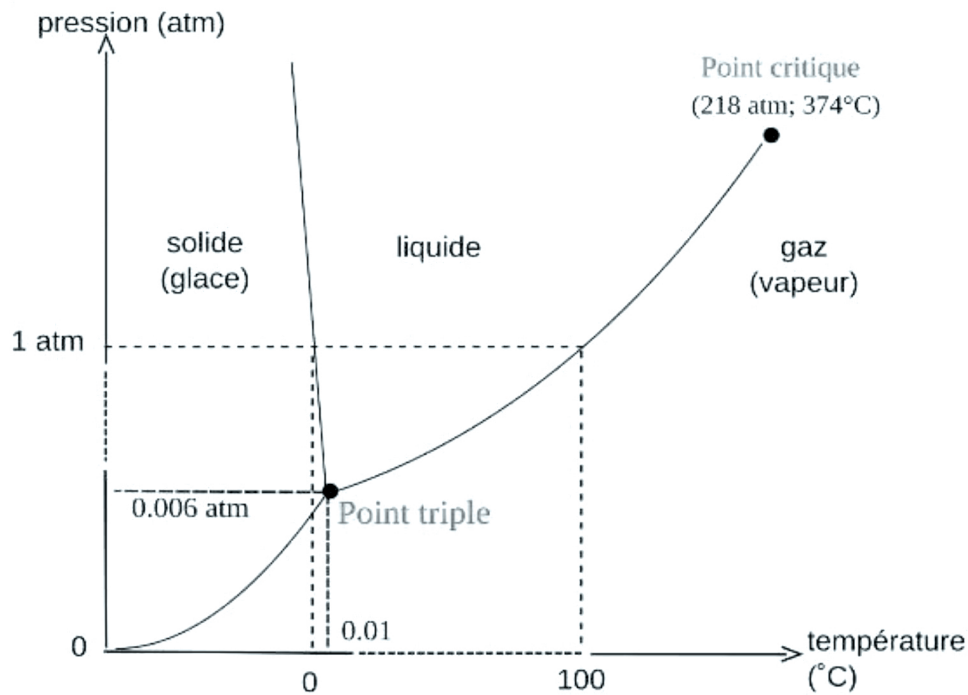


Figure 1-3 : Diagramme des phases de l'eau pure

L'étude porte sur le phénomène d'évaporation qui conduit à appliquer la formule de Clapeyron avec :

- a correspond à la phase liquide l ;
- b correspond à la phase vapeur v ;
- $P_{ab} = P_{\text{sat}}$ (pression de saturation) ;
- $\Delta_{ab}H = \Delta_{\text{vap}}H$ (l'enthalpie molaire de vaporisation).

La formule de Clapeyron s'écrit donc : $\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{\Delta_{\text{vap}}H}{T \cdot (v_v - v_l)}$.

Question 1.3. Discuter le signe des éléments de l'équation de Clapeyron, donner une interprétation graphique à partir la figure 1-3.

On cherche à obtenir une expression analytique de la pression de saturation en fonction de la température. Pour cela, on cherche, dans un premier temps, à comparer les volumes molaires de l'eau liquide et de la vapeur d'eau à pression atmosphérique.

Pour l'étude, la vapeur d'eau est considérée comme un gaz parfait et vérifie donc la relation des gaz parfaits :

Où :

- P est la pression (en Pa),
- V est le volume (en m³),
- n est le nombre de moles (en mol),
- R est la constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,
- T est la température (en K).

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Propriétés de l'eau :

- les conditions de changement de phase de l'eau sont connues à la pression atmosphérique : $P_0 = 1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$; $T_0 = 100 \text{ °C} = 373 \text{ K}$.
- la masse molaire de l'eau : $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- la masse volumique de l'eau liquide : $\rho_{\text{liq}} = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Question 1.4. **Exprimer** et **calculer** les volumes molaires de l'eau liquide (v_l) et de la vapeur d'eau à P_0 et T_0 (v_{v0}).
Montrer que l'expression de Clapeyron peut être mise sous la forme suivante : $\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{P \cdot \Delta_{\text{vap}}H}{R \cdot T^2}$.

L'enthalpie molaire de vaporisation est la quantité de chaleur échangée lors du changement de phase, elle est aussi appelée chaleur latente de vaporisation. C'est souvent l'enthalpie massique que l'on retrouve dans les tables et sur les graphiques.

Le diagramme de Mollier de l'eau (voir document technique DT1) présente les propriétés de l'eau notamment lors du changement de phase.

Question 1.5. **Relever** les valeurs d'enthalpies sur le document technique DT1 et **calculer** les chaleurs latentes de vaporisation de l'eau à 20 °C et à 100 °C (en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ puis en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$).

On constate que la chaleur latente de vaporisation n'est pas constante mais dépend faiblement de la température. En première approximation on peut considérer une évolution linéaire : $\Delta_{\text{vap}}H = \alpha + \beta \cdot T$ où α et β sont des constantes.

Connaissant la température T_0 de changement de phase à la pression atmosphérique P_0 , l'intégration de la formule de Clapeyron permet alors de connaître la pression de changement de phase P_{sat} à une température quelconque T .

Question 1.6. **Exprimer** la pression de changement de phase P_{sat} en fonction de la température T . **Calculer** α et β à partir des valeurs de la chaleur latente de vaporisation de la question précédente. **En déduire** la pression de changement de phase pour de l'eau à 20 °C.

Une simplification supplémentaire consiste à considérer la chaleur latente constante sur la plage d'intégration de l'équation de Clapeyron : $\Delta_{\text{vap}}H = 44,0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Question 1.7. Montrer que la pression de changement de phase P_{sat} (en Pa) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\ln P_{\text{sat}} = A + \frac{B}{T}$$

Exprimer puis **calculer** les coefficients A et B. **Calculer** la pression de saturation de l'eau à 20 °C.

Pour la suite, on utilise l'expression de Rankine pour le calcul des pressions de vapeur saturantes :

Où :

$$\ln P_{\text{sat}} = 13,7 - \frac{5120}{T}$$

- T la température (en K),
- P_{sat} la pression de vapeur saturante (en atm).

Pour la suite, la température à l'interface isolant/béton est prise égale à -3,50 °C.

Question 1.8. Calculer la pression de vapeur saturante à l'interface isolant/béton.

Transfert de vapeur

L'air humide est constitué d'air sec et de vapeur d'eau. La pression P_{atm} [Pa] dans l'air est due :

- d'une part à la pression de l'air sec (la pression partielle de l'air sec est notée P_{AS}),
- d'autre part à la pression de la vapeur d'eau (la pression partielle de la vapeur d'eau est notée P_V).

On a : $P_{\text{atm}} = P_{\text{AS}} + P_V$.

Il y a condensation de la vapeur d'eau lorsque P_V atteint la valeur limite qui est pression de vapeur saturante P_{sat} .

$P_V < P_{\text{sat}}$: pas de condensation $P_V > P_{\text{sat}}$: condensation

La pression partielle de vapeur ambiante P_V se déduit de l'humidité relative HR mesurée par un hygromètre et de P_{sat} car HR peut être définie par : $HR = \frac{P_V}{P_{\text{sat}}}$.

La vapeur se meut à travers une paroi séparant deux ambiances selon la différence de pression de vapeur entre celles-ci et suivant la perméabilité des matériaux qui la composent (π). Plus π est important, plus le matériau est perméable à la vapeur. Le débit massique surfacique de vapeur q_{ms} à travers la paroi s'écrit :

$$q_{\text{ms}} = \frac{\Delta P_V}{R_{\text{vapeur}}} \quad \text{avec} \quad R_{\text{vapeur}} = \sum \frac{e}{\pi}$$

L'analogie avec la loi de Fourier ($\varphi = \frac{\Delta T_s}{R_{\text{thermique}}}$ avec $R_{\text{thermique}} = \sum \frac{e}{\lambda}$) est évidente.

Question 1.9. Indiquer et justifier l'unité de la résistance à la vapeur. Calculer la résistance à la vapeur R_V de cette paroi (figure 1-2).

On considère les conditions de température et d'humidité intérieures (int) et extérieures (ext) suivantes :

$$T_{\text{int}} = 19 \text{ °C} \quad \text{HR}_{\text{int}} = 50 \%$$

$$T_{\text{ext}} = -5 \text{ °C} \quad \text{HR}_{\text{ext}} = 65 \%$$

Question 1.10. Indiquer et justifier l'unité du débit massique surfacique de vapeur. Calculer les pressions de vapeur $P_{V\text{int}}$ et $P_{V\text{ext}}$, en déduire le débit massique surfacique de vapeur.

Question 1.11. Calculer la pression de vapeur à l'interface isolant / béton. Comparer cette pression à la pression de vapeur saturante à l'interface et conclure sur le risque de condensation.

La mise en place d'un film pare-vapeur est alors conseillé. Il s'agit généralement d'un film de polyéthylène dont les propriétés sont données figure 1-4.

Nature	Épaisseur e mm	Conductivité Thermique λ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	Perméabilité π $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$
Film polyéthylène	0,2	0,5	$1,6 \cdot 10^{-15}$

Figure 1-4 Propriétés du polyéthylène

Question 1.12. Vérifier que les profils de température et de pression de vapeur saturante ne sont pas affectés par la mise en place du film pare-vapeur. Indiquer entre quelles couches doit être installé le film pare-vapeur pour jouer son rôle. Calculer la pression de vapeur à l'interface isolant / béton avec le film pare-vapeur. Conclure sur le rôle du film pare-vapeur.

Partie 2 : les ponts thermiques

L'objectif de cette partie est d'évaluer l'efficacité des rupteurs de ponts thermiques afin d'améliorer de la performance énergétique du bâtiment.

Présentation

Un pont thermique est une zone de l'enveloppe du bâtiment où la résistance thermique diminue localement, en raison :

- de la présence de matériaux à forte conductivité (ex. attaches métalliques traversant l'isolant),
- d'une variation d'épaisseur des matériaux,
- de discontinuités géométriques (liaisons entre parois).

Ces ponts thermiques peuvent représenter jusqu'à 40 % des pertes de chaleur d'un bâtiment, d'où l'importance de les prendre en compte dans l'analyse thermique.

En régime permanent, les valeurs standardisées des ponts thermiques courants sont intégrées aux logiciels de simulation. Pour les cas spécifiques, des outils de modélisation permettent de calculer le coefficient linéaire Ψ .

Les déperditions se calculent par la relation suivante :

Où :

- ϕ_{PT} sont les déperditions du pont thermique (en W),
- Ψ est le coefficient de pont thermique linéaire (en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$),
- L est la longueur du pont thermique (en m),
- T_{int} et T_{ext} sont respectivement les températures de l'air intérieur et extérieur (en °C ou en K).

$$\phi_{PT} = \Psi \cdot L \cdot (T_{int} - T_{ext})$$

Deux ponts thermiques sont étudiés dans cette partie :

- le pont thermique vertical mur-mur-angle sortant,
- le pont-thermique vertical mur-refend.

Des déperditions supplémentaires, qui ne sont pas prises en compte dans le modèle du transfert thermique 1D d'un mur, s'ajoutent aux déperditions à travers les parois comme indiquées à la figure 2-1.

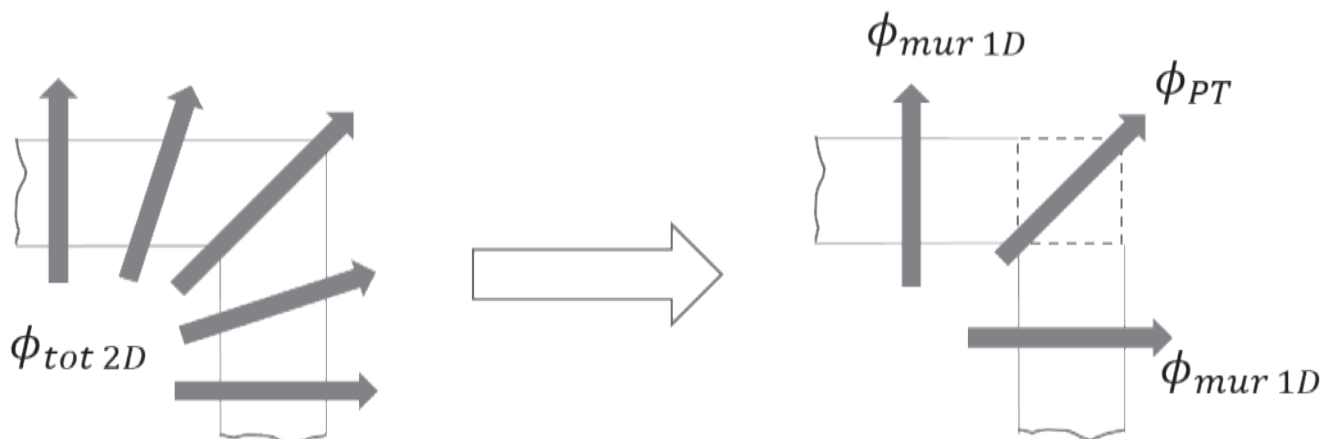


Figure 2-1 : Modèle du pont thermique

Question 2.1. Exprimer le coefficient de pont thermique linéaire.

Dans un premier temps l'étude du transfert de chaleur dans la paroi 1D permet de mettre en place la méthode de résolution par différences finies. Dans un second temps la méthode est appliquée au modèle 2D pour aboutir au calcul du coefficient du pont thermique.

Rappels concernant le transfert de chaleur :

Flux de chaleur par conduction :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}$$

Où :

- φ est la densité de flux de chaleur en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
- λ est la conductivité thermique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- T est la température $^{\circ}\text{C}$ ou en K

Équation de la chaleur :

$$\text{div}\vec{\varphi} + \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = q$$

Où :

- ρ est la masse volumique en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- c est la chaleur massique en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- q est la génération de chaleur interne volumique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$
- t est le temps en s

Hypothèses de l'étude :

- le régime est stationnaire,
- la conductivité thermique est constante (indépendante de la direction ou de la température).

Question 2.2. Montrer que dans le cas du transfert de chaleur à travers un matériau en 1D, l'équation de la chaleur peut se simplifier sous la forme : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$.

Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique numérique utilisée pour résoudre des équations différentielles partielles. La méthode repose sur une discrétisation du domaine.

Modélisation 1D à travers une paroi

Le domaine de la paroi est discrétisé en un réseau de points (ou nœuds) espacés de Δx dans la direction x . La température à chaque nœud est notée T_i , où i est l'indice des nœuds dans les directions x . La température du nœud est représentative de la température de l'élément de volume sur lequel il est centré.

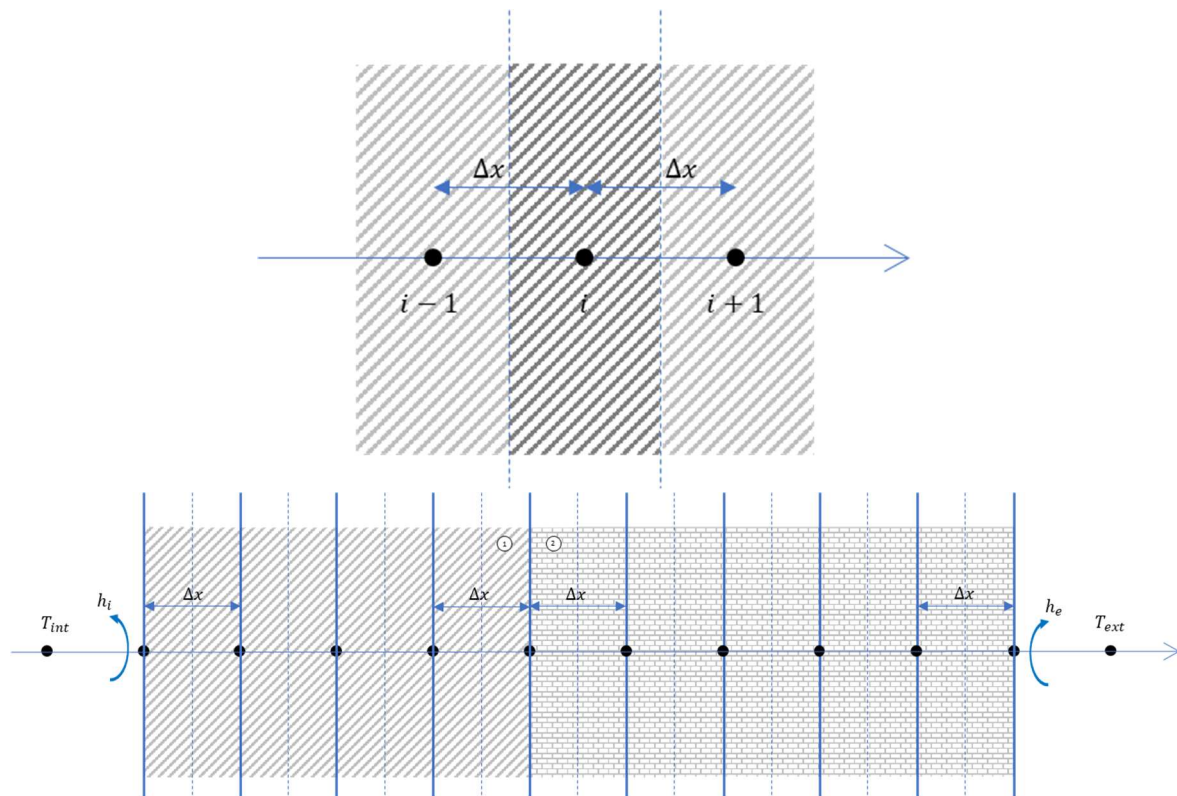


Figure 2-2 – Maillage 1D d'un nœud / du mur

La méthode consiste à écrire les différentielles de température sous forme de différence entre les températures des nœuds. Ainsi, entre les points $i - 1$ et i , on peut écrire:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{i-\frac{1}{2}} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}$$

Question 2.3. Montrer que, dans un matériau homogène et entre les nœuds

$$i-1 \text{ et } i+1 : \left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2 \cdot T_i}{\Delta x^2} \text{ et } T_i = \frac{T_{i-1} + T_{i+1}}{2}.$$

L'équation de la chaleur traduit la conservation de la chaleur dans l'élément de volume donné. La paroi étant de surface S , le volume du nœud i est $\Delta V_i = S \cdot \Delta x$ (voir figure 2-2).

On peut écrire la conservation de l'énergie sous la forme :

$$\sum_k \phi_k = 0 \quad \text{où } \phi_k = S_k \cdot \varphi_k \text{ sont les flux de chaleur échangés à la surface de l'élément } i.$$

Par convention les signes des flux de chaleur :

- $\phi_k > 0$ pour la chaleur reçue par le volume,
- $\phi_k < 0$ pour la chaleur cédée par le volume.

Dans le cas illustré figure 2-2 l'élément hachuré, à la température T_i , échange deux flux de chaleur :

- $\phi_1 = S_1 \cdot \varphi_1$ entre $i-1$ et i ;
- $\phi_2 = S_2 \cdot \varphi_2$ entre i et $i+1$.

Question 2.4. Montrer que la résolution de l'équation de la chaleur dans

$$\text{l'élément de volume } i \text{ permet d'obtenir : } T_i = \frac{T_{i-1} + T_{i+1}}{2}.$$

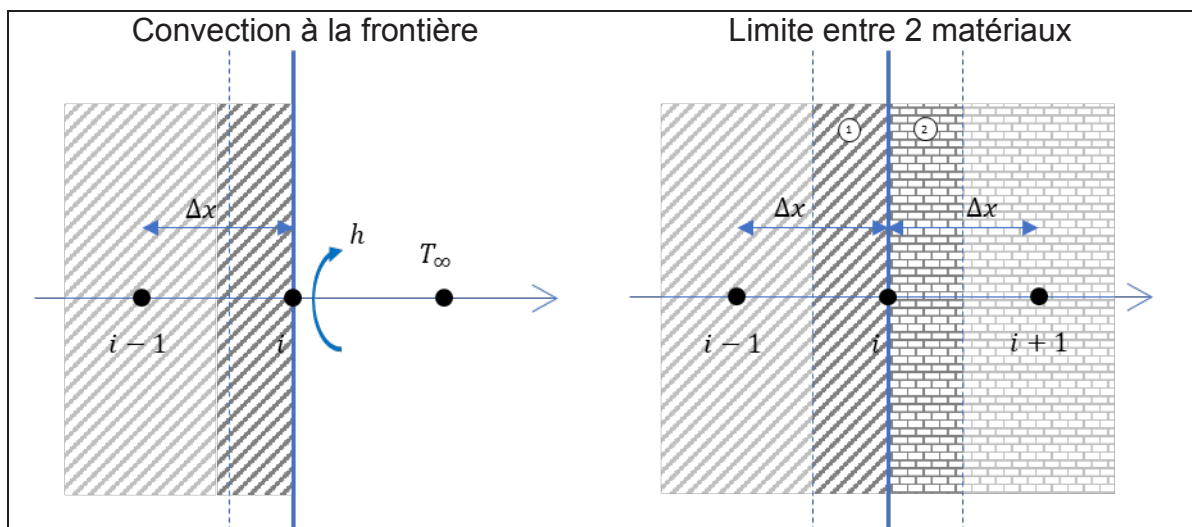


Figure 2-3 : Conditions aux limites 1D

Convection à la frontière (voir figure 2-3)

À la surface de la paroi il y a un échange de chaleur par convection dont on peut exprimer la densité de flux $\varphi_{\text{conv}} = h \cdot (T_{\infty} - T_i)$ où h est le coefficient global de transfert thermique.

On définit le nombre de Biot noté Bi : $Bi = \frac{h \cdot \Delta x}{\lambda}$ où λ est la conductivité thermique de du matériau.

Question 2.5. Préciser et justifier l'unité du nombre de Biot.

Montrer que $T_i = \frac{T_{i-1} + Bi \cdot T_{\infty}}{1 + Bi}$.

Limite entre deux matériaux (voir figure 2-3)

On cherche à calculer la température au niveau de l'interface entre deux matériaux 1 et 2 dont les conductivités thermiques sont respectivement λ_1 et λ_2 .

Question 2.6. Montrer que $T_i = \frac{\lambda_1 \cdot T_{i-1} + \lambda_2 \cdot T_{i+1}}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Les valeurs de températures peuvent être calculées (voir figure 2-4) à partir d'un tableau pour les caractéristiques suivantes :

- Géométrie : $\Delta x = 4 \text{ cm}$
- Échanges convectifs : $h_{\text{int}} = 7,7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ $h_{\text{ext}} = 25 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- Caractéristiques de la paroi simplifiée :

Nature	Épaisseur e (m)	Conductivité Thermique λ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
Isolant	0,16	0,036
Béton	0,2	0,8

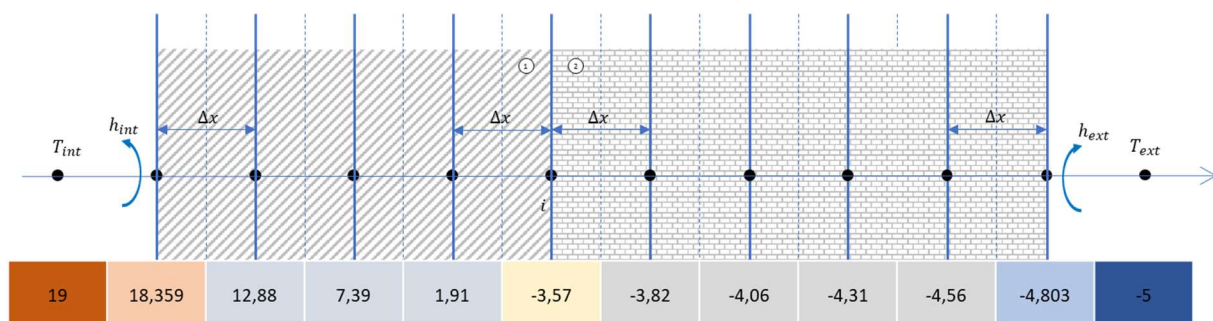


Figure 2-4 : Profil de température 1D

Question 2.7. Calculer la densité de flux $\varphi_{mur\ 1D}$ à partir du profil de température de la figure 2-4. **Calculer** la valeur du flux de chaleur à partir des résistances thermiques et **comparer** au résultat précédent.

Modélisation 2D à travers le pont thermique

Le domaine de la paroi de longueur L (dans la direction z) est discrétisé en un réseau de nœuds espacés de Δx et Δy dans les directions x et y , respectivement. La température à chaque nœud est notée $T_{i,j}$, où i et j sont les indices des nœuds dans les directions x et y .

On note que la température est indépendante de la direction z , le flux de chaleur dans cette direction est donc nul.

La paroi étant de surface S , le volume du nœud i est $\Delta V_i = L \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ (voir figure 2-5).

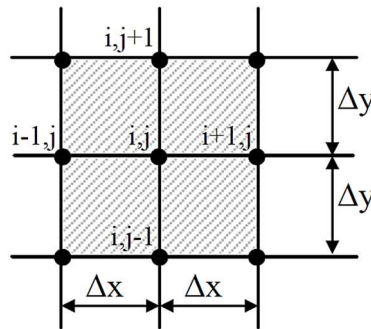


Figure 2-5 : Maillage de la surface

Question 2.8. Exprimer l'équation de la chaleur en régime permanent et sans source. **En déduire** la relation donnant la température d'un nœud $T_{i,j}$ en fonction des températures des 4 nœuds adjacents dans le cas d'un matériau isotrope homogène. **Simplifier** l'expression pour $\Delta x = \Delta y$.

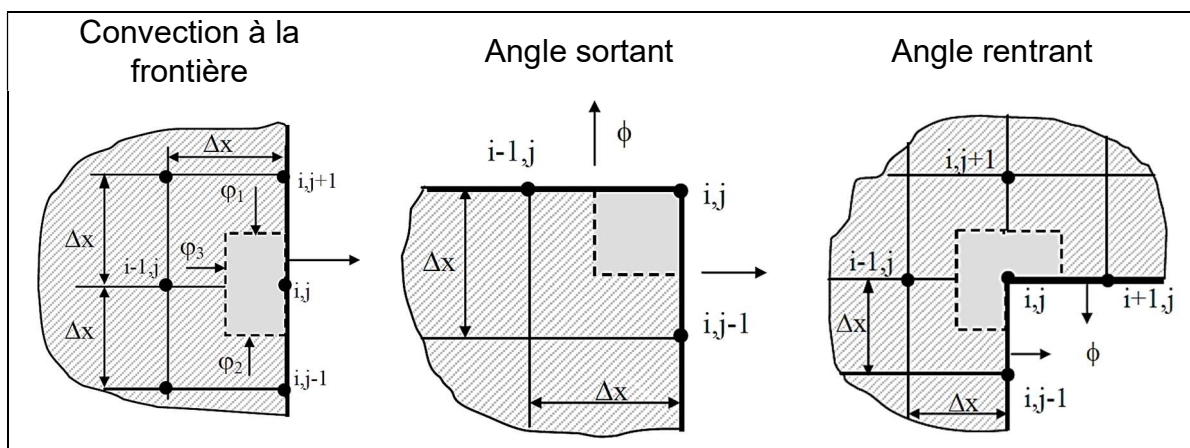


Figure 2-6 : Conditions aux limites 2D

Question 2.9. Montrer que, pour la convection à la frontière (voir figure 2-6), la température $T_{i,j}$ peut s'exprimer sous cette forme :

$$T_{i,j} = \frac{(T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j}) + Bi \cdot T_{\infty}}{3 + Bi}$$

Établir la relation donnant la température $T_{i,j}$ pour le cas de l'angle sortant.

Pour l'angle rentrant, la température se calcule par l'expression :

$$T_{i,j} = \frac{(T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j}) + 2 \cdot Bi}{4 + 2 \cdot Bi}$$

Application au pont thermique angle sortant

Comme pour la modélisation 1D, l'utilisation d'un tableau permet d'obtenir le profil de température dans le domaine étudié (voir figure 2-8)

La réglementation thermique impose des conditions aux limites adiabatiques pour la modélisation des ponts thermiques (voir figure 2-7).

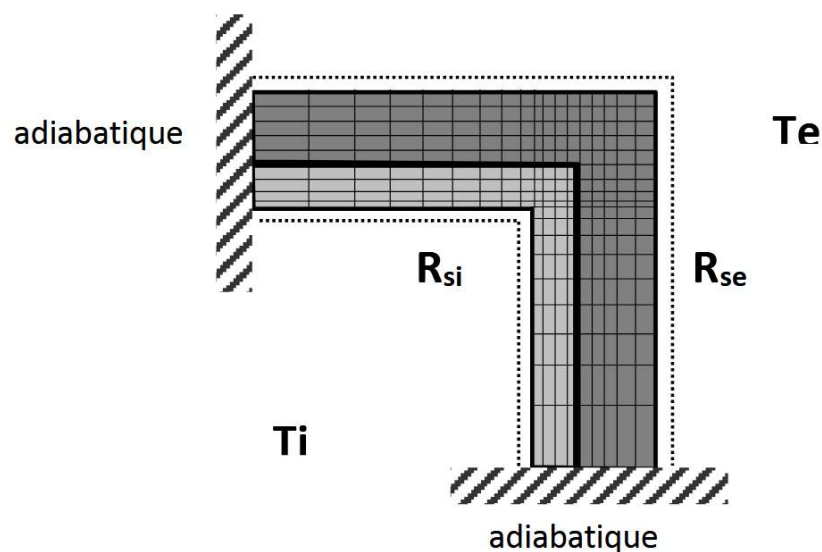


Figure 2-7 : Conditions aux limites adiabatiques

-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
-4,82	-4,82	-4,8	-4,8	-4,8	-4,8	-4,8	-4,8	-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-4,9	-5,0	-5,0	-5,0	-5,0
-4,58	-4,59	-4,6	-4,6	-4,6	-4,6	-4,6	-4,6	-4,7	-4,7	-4,7	-4,8	-4,8	-4,8	-4,9	-4,9	-4,9	-5,0	-5,0	-5
-4,35	-4,35	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,5	-4,5	-4,6	-4,6	-4,7	-4,7	-4,8	-4,8	-4,8	-4,9	-4,9	-5,0
-4,11	-4,12	-4,1	-4,1	-4,1	-4,2	-4,2	-4,2	-4,3	-4,3	-4,4	-4,5	-4,6	-4,6	-4,7	-4,7	-4,8	-4,8	-4,9	-5,0
-3,87	-3,88	-3,9	-3,9	-3,9	-3,9	-4,0	-4,0	-4,1	-4,2	-4,2	-4,3	-4,4	-4,5	-4,6	-4,7	-4,7	-4,8	-4,9	-4,9
-3,63	-3,63	-3,6	-3,7	-3,7	-3,7	-3,7	-3,8	-3,9	-3,9	-4,1	-4,2	-4,3	-4,5	-4,6	-4,6	-4,7	-4,8	-4,8	-4,9
1,86	1,86	1,85	1,83	1,80	1,76	1,68	1,53	1,28	0,85	0,14	-0,88	-2,05	-3,26	-4,5	-4,5	-4,6	-4,7	-4,8	-4,9
7,35	7,35	7,34	7,33	7,30	7,25	7,15	6,96	6,61	5,92	4,65	2,58	0,26	-2,05	-4,3	-4,4	-4,6	-4,7	-4,8	-4,9
12,85	12,85	12,8	12,8	12,8	12,8	12,7	12,6	12,3	11,6	10,0	6,27	2,58	-0,9	-4,2	-4,3	-4,5	-4,6	-4,8	-4,9
18,36	18,36	18,4	18,4	18,4	18,3	18,3	18,3	18,3	18,2	17,4	9,97	4,65	0,1	-4,1	-4,2	-4,4	-4,6	-4,7	-4,9
19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	18,2	11,59	5,92	0,9	-3,9	-4,2	-4,3	-4,5	-4,7	-4,9
										19	18,3	12,26	6,61	1,3	-3,9	-4,1	-4,3	-4,5	-4,7
										19	18,3	12,56	6,96	1,5	-3,8	-4,0	-4,2	-4,4	-4,6
										19	18,3	12,71	7,15	1,7	-3,7	-4,0	-4,2	-4,4	-4,6
										19	18,3	12,78	7,25	1,8	-3,7	-3,9	-4,2	-4,4	-4,6
										19	18,4	12,82	7,30	1,8	-3,7	-3,9	-4,1	-4,4	-4,6
										19	18,4	12,84	7,33	1,8	-3,7	-3,9	-4,1	-4,4	-4,6
										19	18,4	12,85	7,34	1,8	-3,6	-3,9	-4,1	-4,4	-4,6
										19	18,36	12,85	7,35	1,86	-3,63	-3,88	-4,12	-4,35	-4,59
										19	18,36	12,85	7,35	1,86	-3,63	-3,87	-4,12	-4,35	-4,58

Figure 2-8 : Résultats de la modélisation

Question 2.10. À partir des figures 2-7 et 2-8, montrer que la condition adiabatique à l'extrémité des parois est vérifiée.

Pour cette configuration (angle sortant / isolation intérieur) les logiciels de modélisation thermique du bâtiment proposent une valeur de $\Psi = 0,02 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Un mur de longueur unitaire $L=1\text{m}$ est pris en compte pour le calcul des flux.

Question 2.11. Calculer le flux de chaleur total 2D ($\phi_{\text{tot } 2D}$) entre l'intérieur et l'extérieur. Calculer le flux de chaleur unidimensionnel à travers les 2 portions de paroi ($\phi_{\text{mur } 1D}$). En déduire la valeur du coefficient de pont thermique linéaire Ψ et commenter.

Application au pont thermique mur-refend

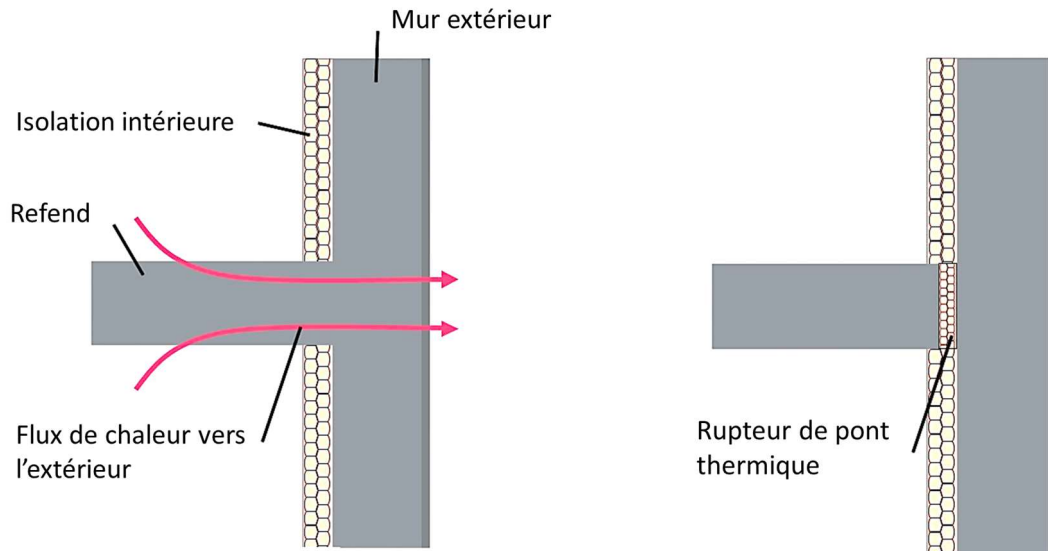


Figure 2-9 : Structure du mur-refend

Question 2.12. À l'aide du document technique DT2, calculer la valeur du coefficient de pont thermique linéaire Ψ avec et sans pont thermique (voir figure 2-9). Conclure sur l'efficacité du rupteur de ponts thermiques dans l'amélioration de la performance du bâtiment.

Partie 3 : étude du réseau de distribution de chaleur

L'objectif de cette partie est d'analyser l'influence du dimensionnement des canalisations sur les pertes de charge du réseau hydraulique du bâtiment.

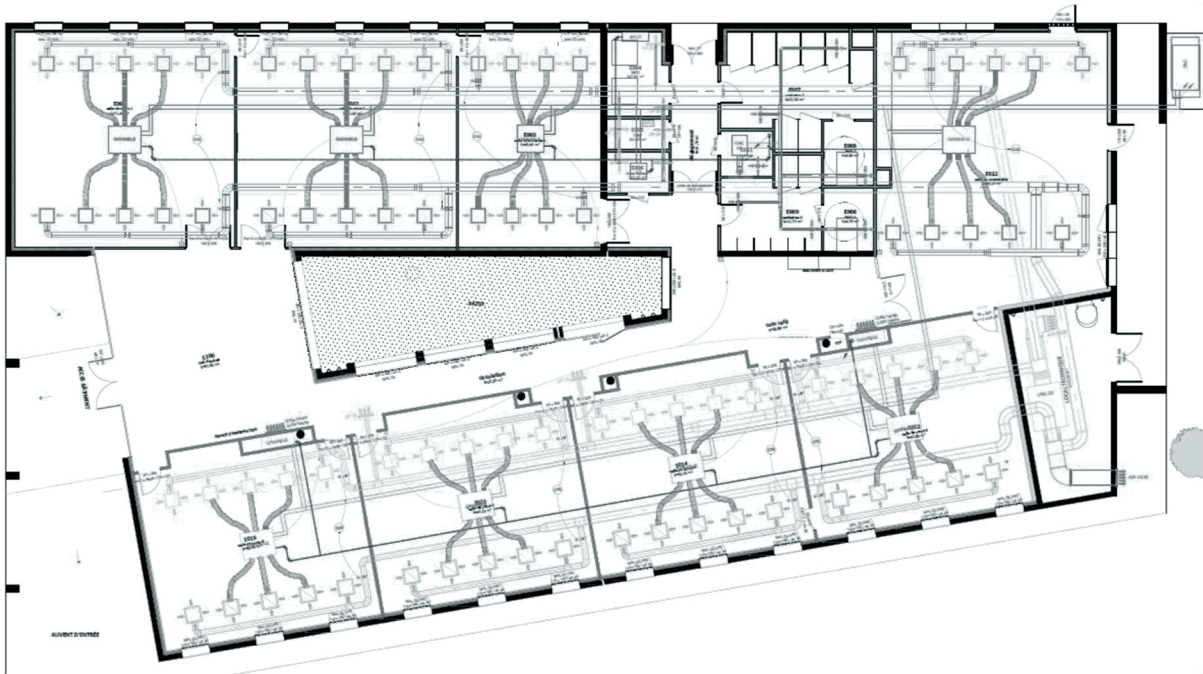


Figure 3-1 : Plan du réseau de distribution de chaleur

Pertes de charge totales du réseau

Le chauffage des salles de cours est assuré par des gainables. Ceux-ci sont alimentés par de l'eau chaude produite par une pompe à chaleur. La sélection du circulateur et sa consommation annuelle dépendent des pertes de charge du circuit le plus résistif en terme de pertes de charge.

L'objectif de l'étude est de mettre en évidence la relation entre le diamètre intérieur de la canalisation, le débit qui y circule et la perte de charge linéique associée.

Les pertes de charge linéaires peuvent être déterminées par la relation :

Où :

- λ est le coefficient de perte de charge linéaire
- L est la longueur de la canalisation (en m)
- ρ est la masse volumique ($\rho = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
- U_{moy} est la vitesse moyenne du fluide dans la canalisation (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
- D est le diamètre intérieur de la canalisation (en m)

$$\Delta P_{\text{lin}} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot U_{\text{moy}}^2}{2}$$

Question 3.1. En plus des pertes de charge linéaires, **lister** les différentes pertes de charge du circuit.

Le coefficient de perte de charge linéaire λ dépend du régime d'écoulement du fluide dans la canalisation. C'est le nombre de Reynolds (Re) qui permet de connaître le régime d'écoulement.

Pour simplifier l'étude, le régime transitoire situé entre les régimes laminaire et turbulent, n'est pas étudié. L'écoulement est considéré passer de laminaire (pour $Re < 2\,000$) à turbulent ($Re > 2\,000$). Le nombre de Reynolds est déterminé par la relation :

$$Re = \frac{\rho \cdot U_{\text{moy}} \cdot D}{\mu} \quad \text{où } \mu \text{ est la viscosité dynamique du fluide } (\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}).$$

Le coefficient de pertes de charge linéique, noté j , correspond à la perte de charge linéaire par unité de longueur.

Question 3.2. Déterminer les unités du nombre de Reynolds Re et des coefficients de perte de charge linéaire λ et linéique j .

Écoulement laminaire

La forme du champ de vitesse du fluide permet de connaître les frottements sur la canalisation et d'en déduire les pertes de charge.

Pour des raisons de symétrie axiale, le champ de vitesse dans un tube est généralement exprimé dans le repère cylindrique (voir figure 3-2).

L'origine du repère est située au centre du tube, les points dont on cherche à exprimer la vitesse et la pression sont des fonctions des 3 coordonnées (r, θ, x) .

Le champ de vitesse a alors 3 composantes : $\vec{U} = u_r \cdot \vec{e}_r + u_\theta \cdot \vec{e}_\theta + u_x \cdot \vec{e}_x$, avec :

- u_r la composante radiale,
- u_θ la composante ortho-radiale,
- u_x la composante axiale.

L'étude concerne le fluide contenu dans le tube horizontal de rayon R et de longueur L , le domaine de l'étude est alors (voir figure 3-3) :

- $0 \leq r \leq R$,
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$,
- $0 \leq x \leq L$.

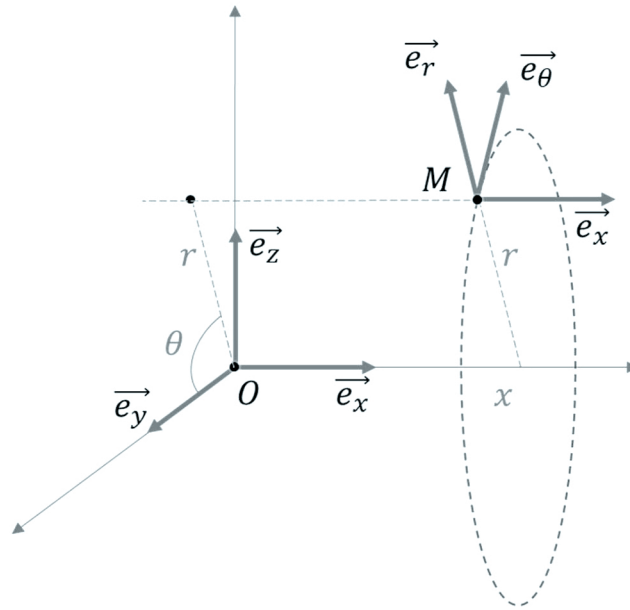


Figure 3-2 : Coordonnées cylindriques

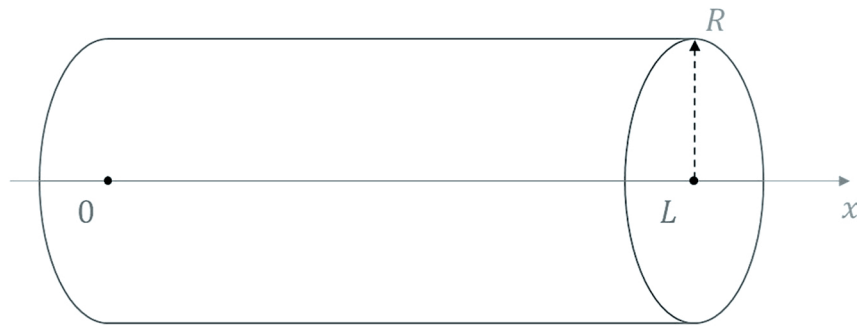


Figure 3-3 : Domaine d'étude

Les premières hypothèses suivantes permettent de simplifier opportunément l'expression du champ de vitesse :

- la vitesse des particules est supposée horizontale : $u_r = 0$ et $u_\theta = 0$,
- la vitesse est axisymétrique : u_x ne dépend pas de θ ,
- la conservation de la masse impose que u_x ne dépend pas de x .

On a donc : $\vec{U} = u_x(r) \cdot \vec{e}_x$. La pression notée $P(x)$ est constante dans la section droite et ne dépend que de x .

L'équation de conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cylindriques dans la direction axiale s'écrit :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)$$

Question 3.3. À partir des hypothèses de l'étude, **simplifier** l'équation de quantité de mouvement dans la direction axiale pour un écoulement stationnaire. **Montrer** que :

$$\frac{dP}{dx} = \mu \cdot \left(\frac{d^2 u_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_x}{dr} \right) = K \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

Cette équation met en évidence la relation entre le profil de vitesse dans une section droite de la canalisation et la variation de pression horizontale.

La détermination de la constante K par le profil de vitesse permet ensuite d'obtenir la perte de charge dans la conduite.

Question 3.4. **Montrer** qu'un profil de vitesse parabolique de la forme $u_x(r) = A \cdot r^2 + B$ (avec A et B constantes), est solution de l'équation différentielle. **Exprimer** K en fonction de A.

Les constantes A et B peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites spatiales du problème :

- la vitesse du fluide au contact de la paroi est nulle,
- la vitesse du fluide est maximale au centre de la canalisation $u_x(0) = U_{\max}$.

Question 3.5. **Justifier** les conditions aux limites et **déterminer** les constantes A et B.

On admet pour la suite que le profil de vitesse dans la canalisation s'exprime sous la forme : $u(x, r) = u_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$.

La forme du champ de vitesse informe sur la variation de pression dans la canalisation, c'est-à-dire sur la perte de charge linéaire ΔP_{lin} .

Question 3.6. **Exprimer** la constante K, **discuter** le signe de cette constante. **En déduire** la chute de pression (ΔP_{lin}) dans la conduite de longueur L en fonction de la viscosité, de la vitesse maximale $U_{\max}$ et du rayon R.

Le débit volumique dans une canalisation circulaire se calcule à partir du profil de vitesse suivant cette relation : $Q_V = \int_S u_x(r) \cdot dS$ avec $dS = 2\pi \cdot r \cdot dr$

Question 3.7. **Exprimer** le débit volumique du fluide en fonction de la vitesse maximale et de la géométrie. **Montrer** que $U_{\text{moy}} = \frac{U_{\max}}{2}$.

Question 3.8. À partir des résultats précédents, **montrer** que le coefficient de perte de charge linéaire peut s'exprimer à partir du nombre de Reynolds : $\lambda = \frac{64}{Re}$.

Question 3.9. Pour le régime laminaire **montrer** que le coefficient de perte de charge linéaire peut s'exprimer sous la forme : $j = C \cdot \frac{Q_v^m}{D^n}$.
Déterminer C, m et n.

Écoulement turbulent

En écoulement turbulent le coefficient de perte de charge linéaire λ est classiquement déterminé par la formule de Colebrook qui fait notamment intervenir la rugosité du tube.

La formule de Blasius est une relation simplifiée qui s'applique pour les tubes lisses en régime turbulent : $\lambda = 0,3164 \cdot Re^{-0,25}$.

Question 3.10. **Exprimer** la perte de charge linéaire j en fonction du débit et du diamètre. **Comparer** à la relation donnée par le DTU 60.11 pour le calcul des pertes de charge d'un réseau de chauffage à savoir :

$$j = 5,65 \cdot \frac{U_{\text{moy}}^{1,896}}{D^{1,276}}$$

Question 3.11. **Conclure** quant à l'influence du diamètre de dimensionnement sur les coûts d'investissement et de fonctionnement.

Partie 4 : étude d'une poutre du plancher haut

L'objectif de cette étude est d'évaluer les sollicitations et les déplacements pour une poutre isostatique soumise à différentes charges reprises de la dalle haute (voir figure 4-1).

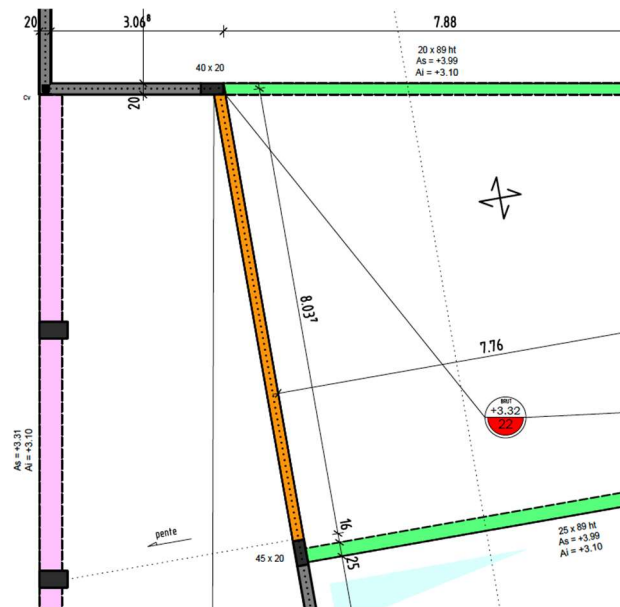


Figure 4-1 : (Extrait document technique DT3) Poutre isostatique (en orange), plancher haut

Les hypothèses de l'étude sont :

- une poutre à plan moyen, chargée dans son plan, réalisée en béton armé ;
- une section homogène, constante et de forme rectangulaire de largeur 20 cm et de hauteur 75 cm ;
- une portée de calcul 8,03 m.

Premier cas de charge : au droit de la poutre considérée

On s'intéresse tout d'abord au cas de l'action permanente correspondant au poids propre de la poutre (voir figure 4-2).

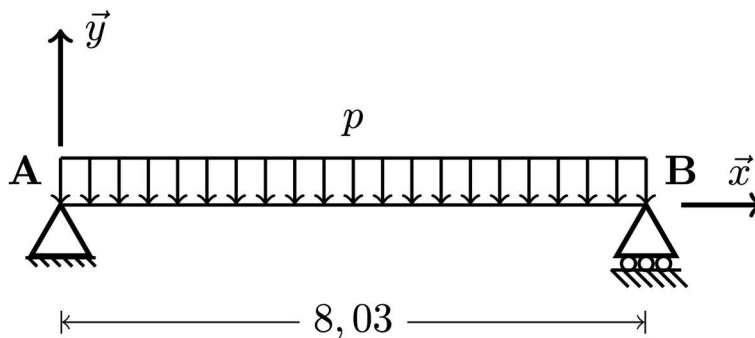


Figure 4-2 : Poutre isostatique, plancher haut, sous poids propre

Question 4.1. En retenant un poids volumique de $25 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$, **calculer** la valeur p de l'action uniformément répartie.

Question 4.2. **Calculer** les valeurs des réactions aux appuis.

Question 4.3. **Déterminer** l'abscisse et la valeur de l'effort tranchant V_y maximal.

Question 4.4. **Déterminer** l'abscisse et la valeur du moment fléchissant M_{fz} maximal.

Question 4.5. **Calculer** la valeur du déplacement maximal de la fibre moyenne de cette poutre.

Second cas de charge : reprise du poids propre du panneau de dalle adjacent

On s'intéresse à présent au cas de l'action permanente correspondant au poids propre du panneau de dalle adjacent à la poutre et situé à droite sur le plan (voir figure 4-3).

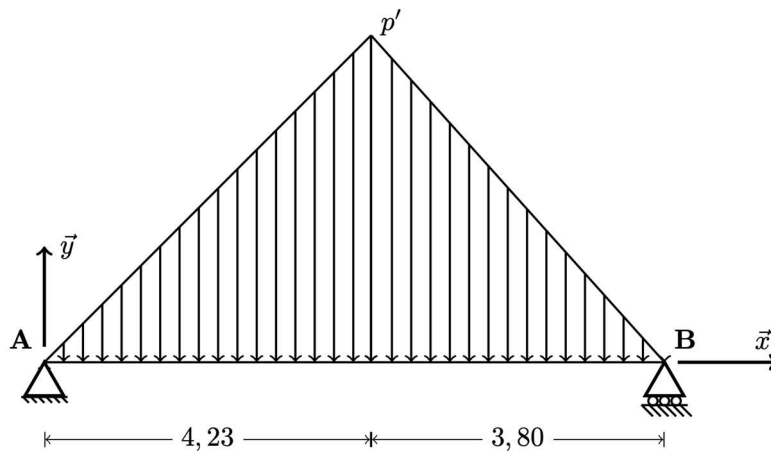


Figure 4-3 : Poutre isostatique, plancher haut, reprise du poids propre du panneau de dalle adjacent

Question 4.6. **Justifier**, sur le plan qualitatif, la répartition de l'action sur la poutre.

Question 4.7. En retenant un poids volumique de $25 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ pour la dalle, **calculer** la valeur p' de l'action répartie.

Par la suite on considère $p' = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$.

Question 4.8. **Calculer** les valeurs des réactions aux appuis.

Question 4.9. Déterminer l'expression complète de l'effort tranchant $V_y(x)$ en fonction de x .

Question 4.10. Déterminer l'abscisse et la valeur du moment fléchissant M_{fz} maximal.

Partie 5 : étude d'une poutre continue

L'objectif de cette étude est d'évaluer les sollicitations pour une poutre continue de la dalle haute (voir figure 5-1).

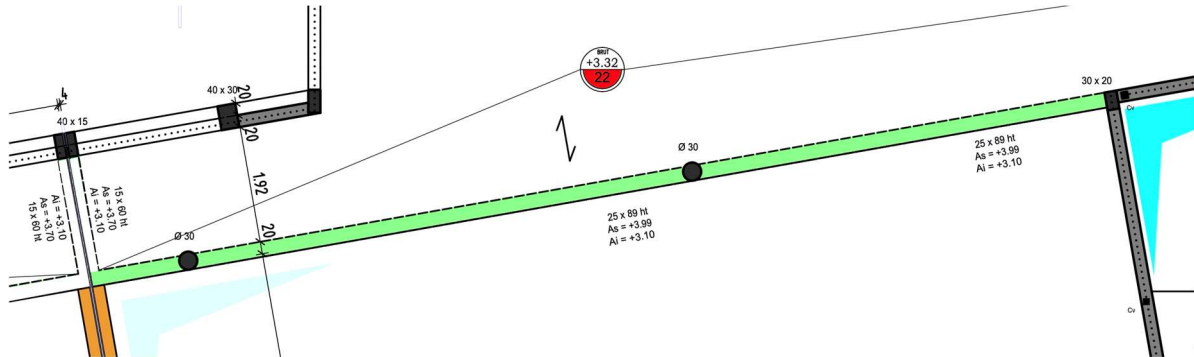


Figure 5-1 : (Extrait document technique DT3) Poutre continue (en vert), plancher haut

Cette poutre repose sur trois appuis (voir figure 5-2). On suppose que l'appui de rive (2) est encastré. La section est constante et de forme rectangulaire (largeur 25 cm, hauteur 89 cm). On suppose que l'action p'' est uniformément répartie et égale à $p'' = 5,5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$.

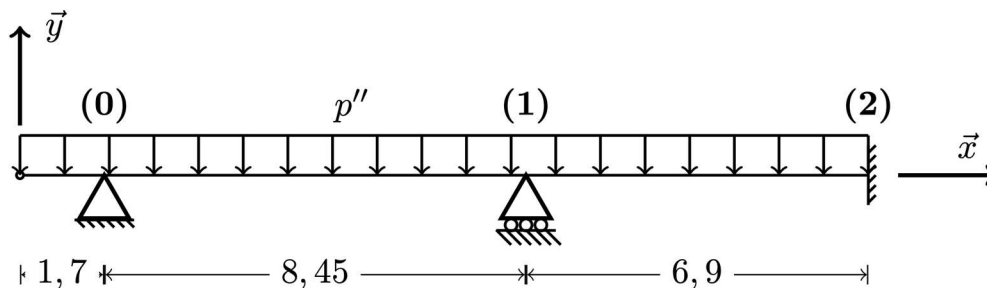


Figure 5-2 : Modélisation retenue pour la poutre continue, plancher haut

Question 5.1. Calculer le degré d'hyperstaticité de cette structure.

Question 5.2. Calculer la valeur numérique du moment fléchissant à l'appui (0), noté M_0 .

On rappelle que, pour une poutre continue constituée de $n+1$ appuis notés (i) et de section constante sur toute sa longueur, la relation des « trois moments » exprimée à l'appui (i) est :

$$M_{i-1} \ell_i + 2M_i (\ell_i + \ell_{i+1}) + M_{i+1} \ell_{i+1} = 6EI (\omega'_{i+1} - \omega''_i)$$

Où :

- M_i est le moment fléchissant au point i ,
- ℓ_i est la longueur est la portée de la travée i ,
- E est le module d'Young du matériau constitutif de la poutre,
- I est le moment quadratique de la poutre suivant l'axe de flexion concerné.

Par ailleurs, les valeurs des rotations isostatiques, pour une travée soumise à une charge uniformément répartie, sont égales à :

$$\omega'_{i+1} = -\frac{p'' \ell_{i+1}^3}{24EI} \quad \omega'_i = \frac{p'' \ell_i^3}{24EI}$$

Question 5.3. **Calculer** les valeurs numériques des moments fléchissants M_1 et M_2 , respectivement aux appuis (1) et (2).

Question 5.4. **Calculer** les valeurs numériques des réactions Y_0 , Y_1 et Y_2 , respectivement aux appuis (0), (1) et (2).

L'objectif de cette étude est de dimensionner les tirants parasismiques mis en place dans le cadre de la réponse de la structure aux séismes (voir figure 6-1).



- une zone III (sismicité « modérée »), avec une accélération de référence au sol égale à $1,32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- une catégorie d'importance III (bâtiments dont l'évacuation rapide est nécessaire).

Question 6.1. Calculer l'intensité de la force horizontale correspondant au séisme de référence.

Question 6.2. Sur le plan qualitatif, la mise en place de tirants permet la réalisation d'un plan horizontal « rigide » en cisaillement (effet « diaphragme »), **expliquer** l'importance de cet effet dans la modélisation du comportement parasismique d'un ouvrage.

– 28 –

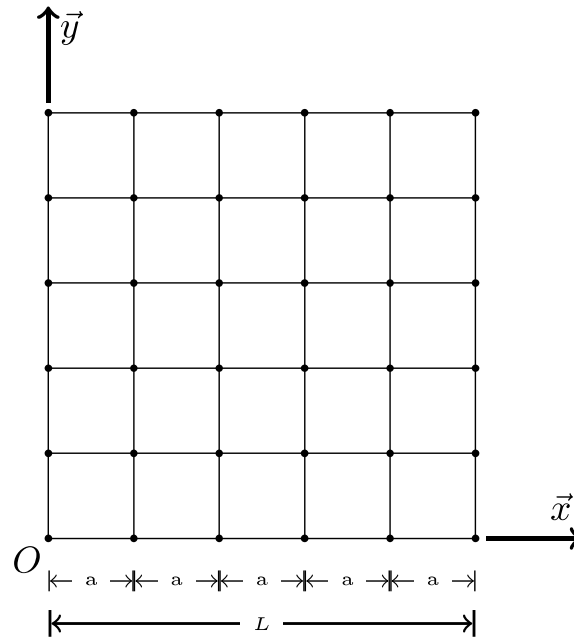


Figure 6-2 : Exemple d'un réseau de poutres croisées formé de 25 mailles élémentaires carrées de côté a (vue de dessus)

Matrice élémentaire de rigidité d'une poutre

On considère tout d'abord une seule poutre de longueur L dont la section droite est d'aire A et de moment quadratique I .

Dans le plan, chaque nœud présente trois degrés de liberté (les deux translations u et v dans le plan, et la rotation ω – voir figure 6-3), ce qui conduit à former une matrice de rigidité élémentaire k_e de taille 6×6 .

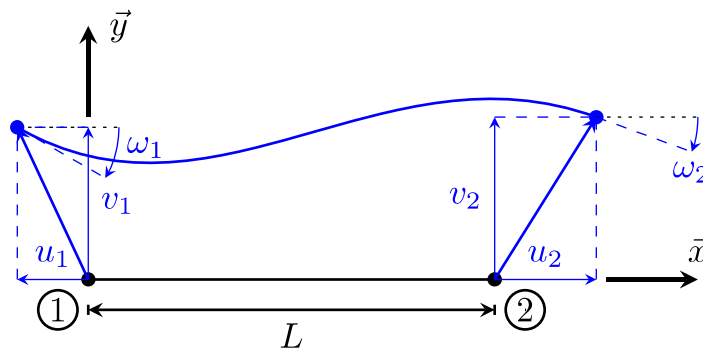


Figure 6-3 : Poutre droite de longueur L avec trois degrés de liberté par nœud (configuration déformée en bleu)

Question 6.3. Par une méthode à choisir et en justifiant clairement la réponse, **compléter** la matrice élémentaire de rigidité de la figure 6-4 en déterminant les termes non spécifiés.

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & ? & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & ? & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

Figure 6-4 : Matrice élémentaire de rigidité comportant quatre termes manquants à compléter à la question 6.3

Raideur en cisaillement d'une maille élémentaire

On considère à présent une maille élémentaire carrée de côté a , constituée par l'assemblage de quatre poutres (voir figure 6-5). On suppose que les assemblages sont parfaitement rigides.

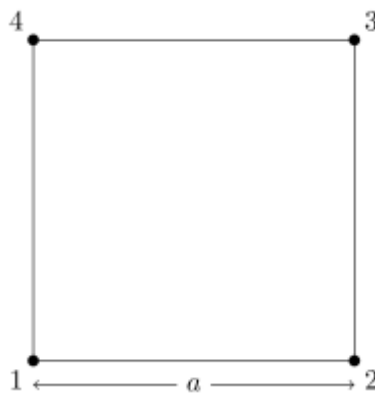


Figure 6-5 : Maille élémentaire constituée de 4 poutres identiques et de 4 nœuds (vue de dessus)

Question 6.4. Donner, en justifiant la réponse, la taille de la matrice de raideur de cette maille élémentaire.

Question 6.5. Compléter le document réponse DR1 donnant l'expression complète de cette matrice de raideur pour cette maille élémentaire.

Afin d'évaluer la raideur en cisaillement de cette maille élémentaire, le document technique DT4 présente la matrice de raideur $\mathbf{K}_{\text{cond}}$ de la maille après condensation des rotations. Les degrés de liberté restant après cette opération de condensation sont les translations, ce qui conduit à une matrice de taille 8×8 .

On impose alors un déplacement de translation horizontale aux nœuds 3 et 4 tout en maintenant tous les autres degrés de liberté bloqués (figure 6-6).

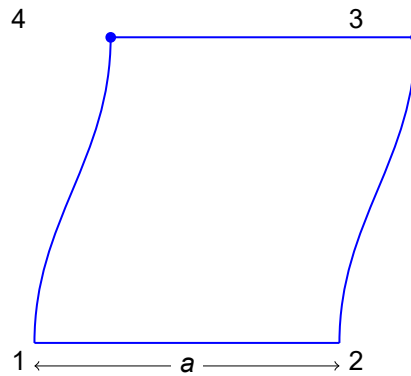


Figure 6-6 : Maille élémentaire en configuration déformée (bleu)

Question 6.6. Montrer que la raideur en cisaillement d'une maille élémentaire de dimension a est égale à :

$$\frac{6EI}{a^3}$$

Calcul de la raideur d'un réseau de poutres en cisaillement

On considère à présent un réseau de poutres constitué par l'assemblage de quatre mailles élémentaires (dimension totale L , dimension d'une maille $a = L/2$, voir figure 6-7).

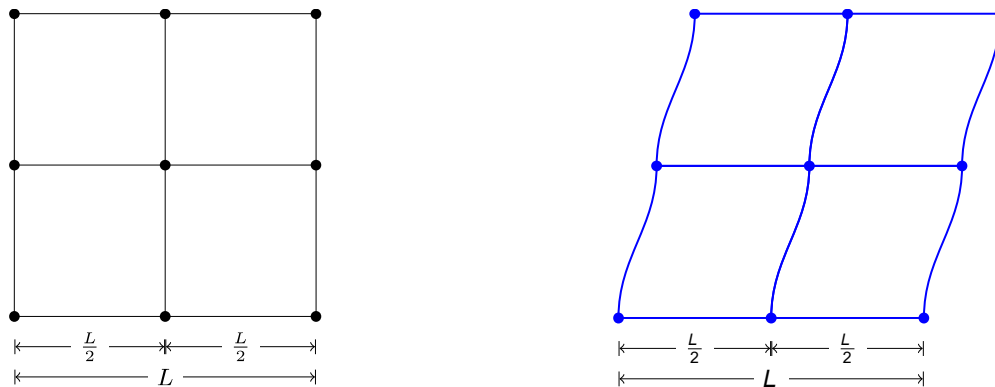


Figure 6-7 : (Gauche) Réseau de poutres constitué de 4 mailles élémentaires, configuration initiale (noir).
(Droite) Configuration déformée (bleu)

Question 6.7. En considérant un déplacement élémentaire correspondant à un cisaillement simple (figure 6-7), **montrer** que la raideur en cisaillement de ce réseau de poutres est égale à :

$$\frac{96EI}{L^3}$$

On considère à présent un réseau de poutres de n mailles élémentaires, de dimension totale L (figure 6-8 pour $n=5$).

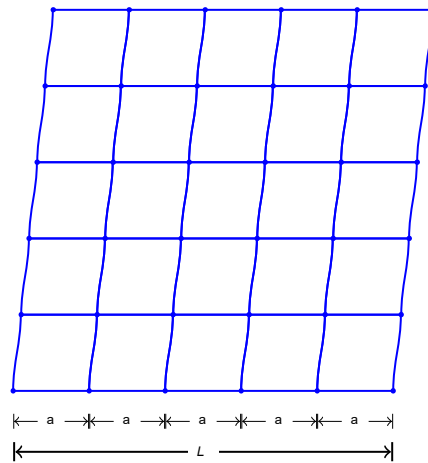
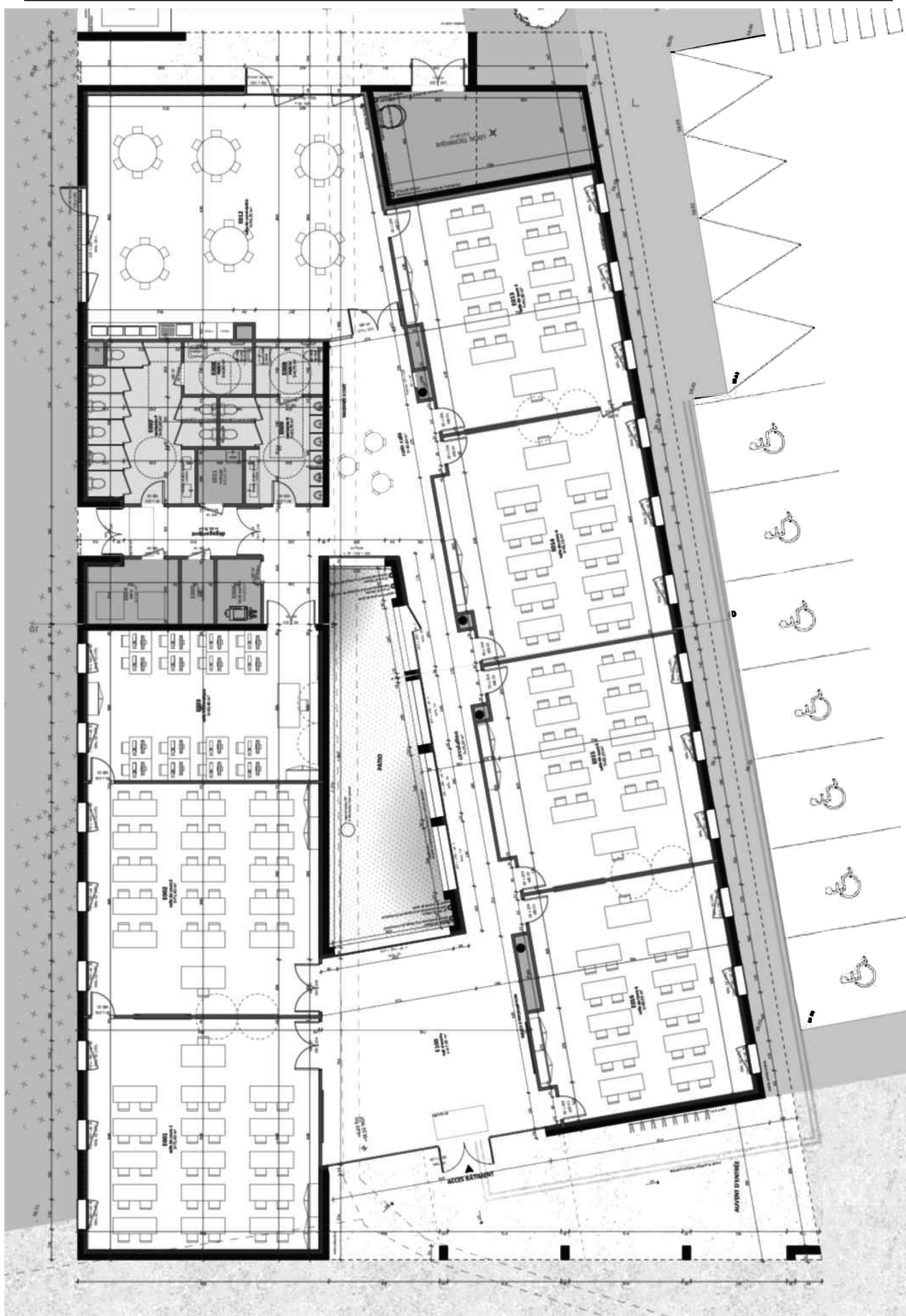


Figure 6-8 : Exemple d'un réseau de poutres constitué de 5 mailles élémentaires, configuration déformée (bleu)

Question 6.8. En considérant un déplacement élémentaire correspondant à un cisaillement simple (figure 6-8), **montrer** que la raideur en cisaillement de ce réseau de poutres est égale à :

$$\frac{6n^4 EI}{L^3}$$

Question 6.9. En reprenant l'effort horizontal exercé sur l'ouvrage, **estimer** le nombre minimal de mailles nécessaires pour limiter le glissement à 0,01 radian. **Conclure.**

Document technique DT0 – Plan du bâtiment

Document technique DT1 - Diagramme de Mollier de l'eau

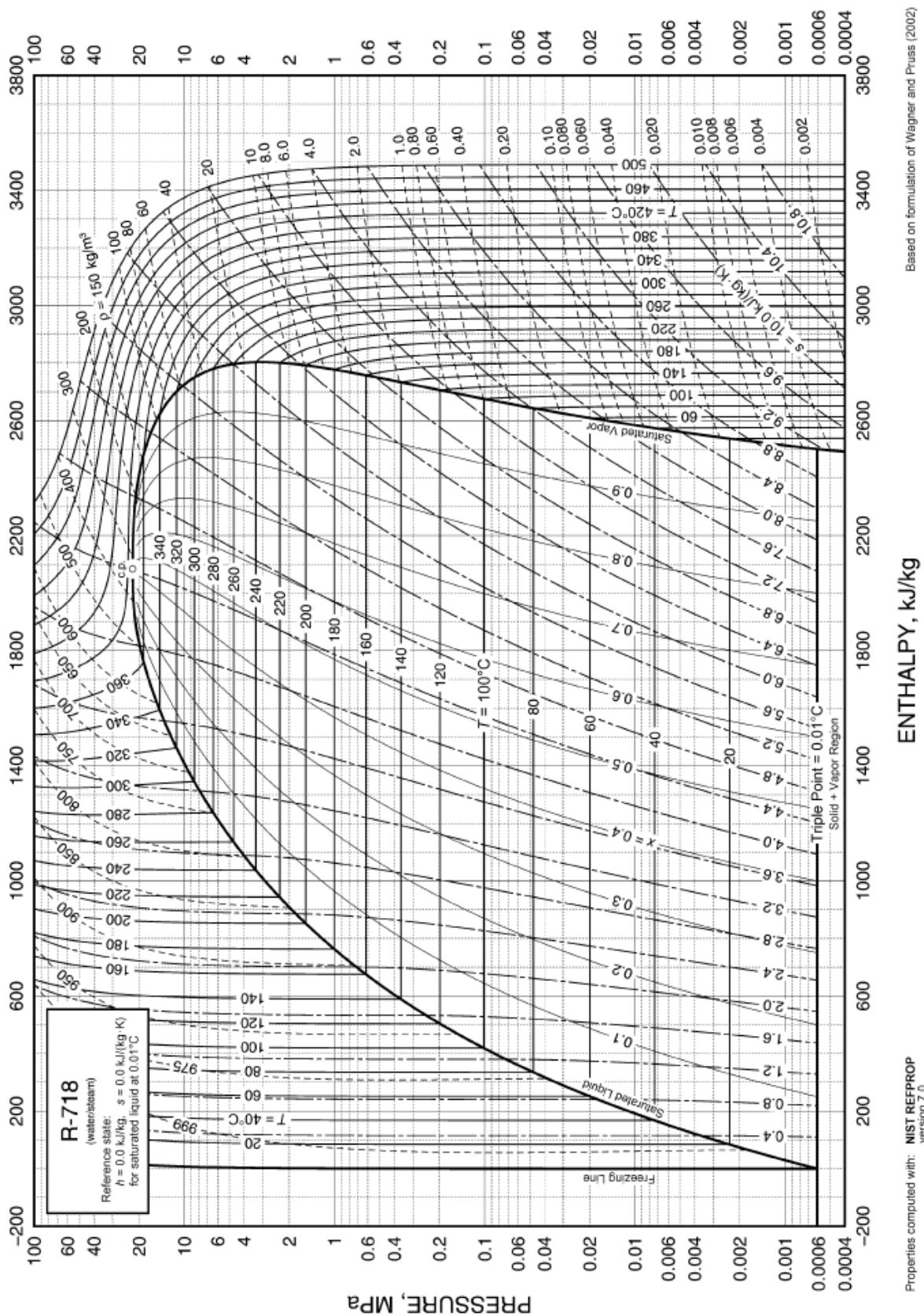


Fig. 17 Pressure-Enthalpy Diagram for Refrigerant 718 (Water/Steam)

Document technique DT2 - Profils de température dans un pont thermique mur/refend, sans et avec rupteur de pont thermique

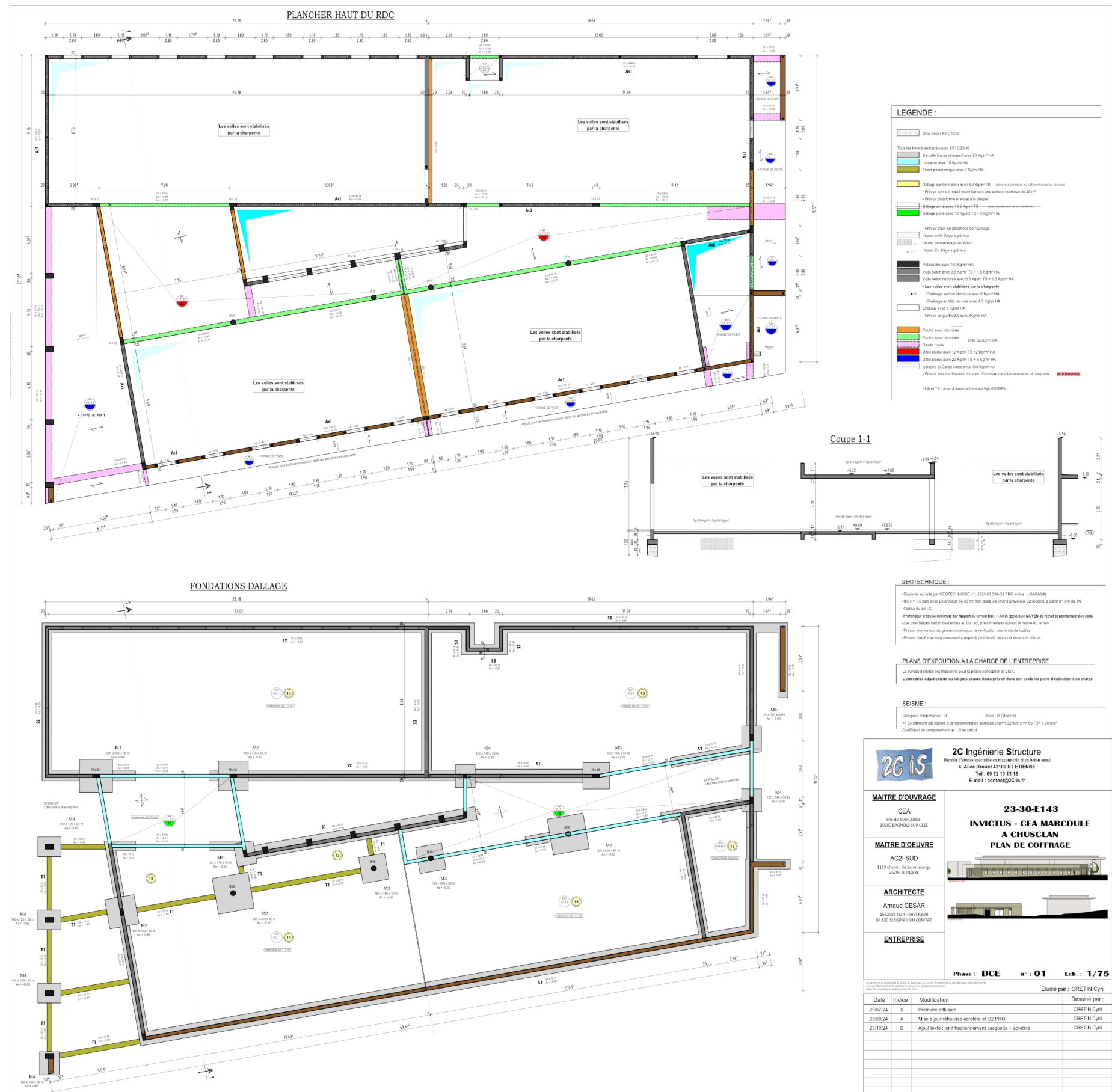
																		19	18,38	13,08	7,77	2,43	-2,96	-3,22	-3,53	-3,89	-4,27	-4,67	-5
																		19	18,4	13,1	7,8	2,4	-2,9	-3,2	-3,5	-3,9	-4,3	-4,7	-5
																		19	18,4	13,1	7,8	2,5	-2,9	-3,1	-3,5	-3,8	-4,2	-4,7	-5
																		19	18,4	13,2	7,9	2,6	-2,7	-3,0	-3,3	-3,7	-4,2	-4,6	-5
																		19	18,4	13,2	8,0	2,8	-2,5	-2,8	-3,2	-3,6	-4,1	-4,6	-5
																		19	18,4	13,3	8,2	3,0	-2,3	-2,6	-3,0	-3,4	-4,0	-4,5	-5
																		19	18,4	13,4	8,4	3,3	-1,9	-2,2	-2,7	-3,2	-3,8	-4,5	-5
																		19	18,4	13,6	8,7	3,8	-1,4	-1,7	-2,2	-2,9	-3,6	-4,4	-5
																		19	18,4	13,7	9,1	4,4	-0,6	-1,0	-1,7	-2,5	-3,4	-4,3	-5
19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	18,4	13,8	9,5	5,3	0,7	-0,1	-1,1	-2,1	-3,2	-4,2	-5	
19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,8	18,8	18,7	18,5	18,4	18,1	17,8	17,6	18,1	13,5	9,9	6,6	2,9	1,1	-0,4	-1,7	-2,9	-4,1	-5
19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,8	18,8	18,7	18,6	18,4	18,1	17,8	17,3	16,7	15,6	12,8	9,9	6,9	4,0	1,8	0,1	-1,4	-2,7	-4,0	-5
19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,5	18,3	18,0	17,6	17,0	16,1	14,7	12,4	9,8	7,0	4,4	2,2	0,4	-1,2	-2,6	-4,0	-5
19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,5	18,3	18,0	17,6	17,0	16,1	14,7	12,4	9,8	7,0	4,4	2,2	0,4	-1,2	-2,6	-4,0	-5
19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,8	18,8	18,7	18,6	18,4	18,1	17,8	17,3	16,7	15,6	12,8	9,9	6,9	4,0	1,8	0,1	-1,4	-2,7	-4,0	-5
19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,8	18,8	18,7	18,5	18,4	18,1	17,8	17,6	18,1	13,5	9,9	6,6	2,9	1,1	-0,4	-1,7	-2,9	-4,1	-5
19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	18,4	13,8	9,5	5,3	0,7	-0,1	-1,1	-2,1	-3,2	-4,2	-5
																		19	18,4	13,7	9,1	4,4	-0,6	-1,0	-1,7	-2,5	-3,4	-4,3	-5
																		19	18,4	13,6	8,7	3,8	-1,4	-1,7	-2,2	-2,9	-3,6	-4,4	-5
																		19	18,4	13,4	8,4	3,3	-1,9	-2,2	-2,7	-3,2	-3,8	-4,5	-5
																		19	18,4	13,3	8,2	3,0	-2,3	-2,6	-3,0	-3,4	-4,0	-4,5	-5
																		19	18,4	13,2	8,0	2,8	-2,5	-2,8	-3,2	-3,6	-4,1	-4,6	-5
																		19	18,4	13,2	7,9	2,6	-2,7	-3,0	-3,3	-3,7	-4,2	-4,6	-5
																		19	18,4	13,1	7,8	2,5	-2,9	-3,1	-3,5	-3,8	-4,2	-4,7	-5
																		19	18,4	13,1	7,8	2,4	-2,9	-3,2	-3,5	-3,9	-4,3	-4,7	-5
																		19	18,38	13,08	7,77	2,43	-2,96	-3,22	-3,53	-3,89	-4,27	-4,67	-5

Sans rupteur de pont thermique

																		19	18,36	12,84	7,34	1,84	-3,64	-3,89	-4,13	-4,36	-4,59	-4,82	-5
																		19	18,4	12,8	7,3	1,8	-3,6	-3,9	-4,1	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,4	12,8	7,3	1,8	-3,7	-3,9	-4,1	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,4	12,8	7,3	1,8	-3,7	-3,9	-4,1	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,3	12,8	7,2	1,8	-3,7	-3,9	-4,2	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,3	12,7	7,1	1,7	-3,7	-4,0	-4,2	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,3	12,6	6,9	1,5	-3,8	-4,0	-4,2	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,3	12,3	6,6	1,2	-3,8	-4,1	-4,3	-4,5	-4,7	-4,8	-5
																		19	18,2	11,6	5,8	0,7	-3,9	-4,1	-4,3	-4,5	-4,7	-4,9	-5
19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	18,0	10,3	4,2	-0,2	-4,0	-4,2	-4,4	-4,5	-4,7	-4,9	-5	
19,0	19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,5	18,3	18,0	17,6	17,0	16,4	15,9	17,1	7,3	0,8	-1,5	-4,1	-4,3	-4,4	-4,5	-4,7	-4,9	-5	
19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,5	18,3	18,0	17,6	17,1	16,3	15,2	13,8	11,4	5,3	-1,5	-2,6	-4,2	-4,3	-4,4	-4,6	-4,7	-4,9	-5	
19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,4	18,2	17,9	17,4	16,8	15,9	14,6	12,6	9,4	4,1	-2,3	-3,1	-4,3	-4,3	-4,5	-4,6	-4,7	-4,9	-5	
19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,4	18,2	17,9	17,4	16,8	15,9	14,6	12,6	9,4	4,1	-2,3	-3,1	-4,3	-4,3	-4,5	-4,6	-4,7	-4,9	-5	
19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,5	18,3	18,0	17,6	17,1	16,3	15,2	13,8	11,4	5,3	-1,5	-2,6	-4,2	-4,3	-4,4	-4,6	-4,7	-4,9	-5	
19,0	19,0	19,0	19,0	18,9	18,9	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,5	18,3	18,0	17,6	17,0	16,4	15,9	17,1	7,3	0,8	-1,5	-4,1	-4,3	-4,4	-4,5	-4,7	-4,9	-5	
19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	18,0	10,3	4,2	-0,2	-4,0	-4,2	-4,4	-4,5	-4,7	-4,9	-5
																		19	18,2	11,6	5,8	0,7	-3,9	-4,1	-4,3	-4,5	-4,7	-4,9	-5
																		19	18,3	12,3	6,6	1,2	-3,8	-4,1	-4,3	-4,5	-4,7	-4,8	-5
																		19	18,3	12,6	6,9	1,5	-3,8	-4,0	-4,2	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,3	12,7	7,1	1,7	-3,7	-4,0	-4,2	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,3	12,8	7,2	1,8	-3,7	-3,9	-4,2	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,4	12,8	7,3	1,8	-3,7	-3,9	-4,1	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,4	12,8	7,3	1,8	-3,7	-3,9	-4,1	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,4	12,8	7,3	1,8	-3,6	-3,9	-4,1	-4,4	-4,6	-4,8	-5
																		19	18,36	12,85	7,34	1,84	-3,64	-3,89	-4,13	-4,36	-4,59	-4,82	-5

Avec rupteur de pont thermique

Document technique DT3 - Plan de coffrage et de fondation de l'ouvrage



Document technique DT4 - Matrice de raideur condensée d'une maille élémentaire.

Les degrés de liberté sont ordonnés de la façon suivante :

$$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4$$

$$\mathbf{K}_{\text{cond}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{a} + \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & -\left(\frac{EA}{a} + \frac{3EI}{2a^3}\right) & \frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & -\left(\frac{EA}{a} + \frac{3EI}{2a^3}\right) & \frac{3EI}{a^3} \\ -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & \frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & \frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} \\ -\left(\frac{EA}{a} + \frac{3EI}{2a^3}\right) & \frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} \\ \frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} \\ \frac{9EI}{2a^3} & \frac{3EI}{a^3} & \frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & -\left(\frac{EA}{a} + \frac{3EI}{2a^3}\right) & \frac{3EI}{a^3} \\ -\left(\frac{EA}{a} + \frac{3EI}{2a^3}\right) & \frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} \\ \frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} \\ -\left(\frac{EA}{a} + \frac{3EI}{2a^3}\right) & \frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{3EI}{a^3} & -\frac{3EI}{a^3} & \frac{9EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{a^3} \end{bmatrix}$$

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Document Réponse DR 1 Matrice de raideur d'une maille élémentaire

$$\begin{bmatrix}
 \frac{E(AL^2 + 12I)}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\
 0 & \frac{E(AL^2 + 12I)}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\
 \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \boxed{} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{E(AL^2 + 12I)}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{E(AL^2 + 12I)}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \boxed{} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{E(AL^2 + 12I)}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{E(AL^2 + 12I)}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \boxed{} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
 -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{E(AL^2 + 12I)}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\
 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{E(AL^2 + 12I)}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
 \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \boxed{}
 \end{bmatrix}$$