

SESSION 2026

AGRÉGATION CONCOURS EXTERNE

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE MÉCANIQUE**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1414A	102	2680

PRESENTATION DU ROBOT DE NETTOYAGE DE CARÈNE

Dans les ports de plaisance, les coques de bateau se salissent. Un biofilm se crée progressivement avant l'apparition des premières algues. En quelques mois d'immersion, selon les conditions climatiques et la qualité de l'eau, le coefficient de glissement de la coque d'un bateau dans l'eau diminue de 10 à 15%. Il en résulte, pour les bateaux à moteur, une augmentation importante de la consommation de carburant et une perte non négligeable de performance dans le cas des voiliers.

Pour nettoyer la coque des bateaux, une solution retenue est la mise en carène annuelle. Le bateau est sorti de l'eau, la coque et la quille sont nettoyées sous haute pression d'eau. Une couche d'antifouling est ensuite appliquée sur la coque propre afin de retarder son encrassement, juste avant la remise à l'eau. Cette opération est longue et coûteuse.

La société H est née de ce constat et a créé le premier robot sous-marin (Figure 1) permettant le nettoyage à flot des coques de bateaux à voile ou à moteur, quelles que soient leur dimension et leur configuration. Destiné aux professionnels de la plaisance, le robot de carène permet l'entretien régulier des coques à matrices dures ou semi-dures des bateaux de plaisance. Il permet de détacher les impuretés par une action mécanique de brossage assurée par des brosses rotatives.



Figure 1 : robot de nettoyage de carène

L'entretien à flot proposé par la société H est une solution innovante qui répond aux réglementations issues du Grenelle de la Mer et ayant abouti au dépôt de plusieurs brevets. Il ne détériore pas la coque ni son revêtement, et les impuretés détachées sont récupérées, afin de ne pas polluer le milieu, grâce à un filtre intégré au robot. Celui-ci fonctionne sans produit de nettoyage. Le robot de carène représente ainsi une solution facile, rapide et efficace qui répond aux attentes environnementales des capitaineries, aux organismes de gestion des ports et de l'environnement.

Fonctionnement du robot nettoyeur de carène

Pour que l'entretien de la coque du bateau puisse se faire à partir du quai ou du pont, le robot a été conçu pour être facile à transporter, à mettre en œuvre et à utiliser. Une interface Homme-Machine permet de le piloter et il est alimenté grâce à un cordon et un boîtier d'alimentation (Figure 2).



Figure 2 : robot de carène et accessoires

Le robot est plaqué sur la coque du bateau par un phénomène d'aspiration. Ce phénomène est créé par la rotation des brosses et d'une hélice centrale (utilisée également pour assurer une circulation d'eau permettant de recueillir les impuretés détachées de la coque).

La ligne d'eau est nettoyée grâce à une brosse frontale. Ainsi, dans les zones où le robot rencontre des changements d'orientation de la coque (notamment vers la quille et les virures), la brosse frontale est mise en contact avec le bateau (Figure 3). Cette fonction permet un nettoyage efficace de la ligne de flottaison et des zones concaves.

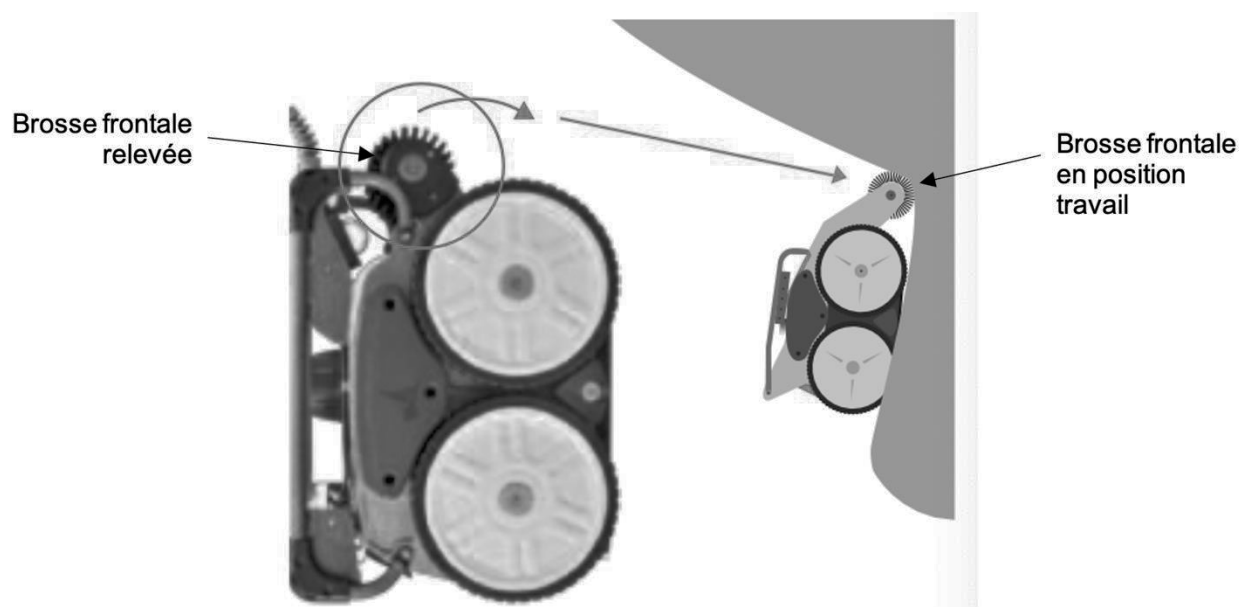


Figure 3 : fonctionnement de la brosse frontale

Le déplacement du robot est assuré par quatre roues entraînées par une courroie. Le brossage est réalisé par une brosse frontale et deux brosses ventrales souples qui doivent assurer un nettoyage efficace sans détériorer la coque ou le revêtement antifouling (Figure 4).

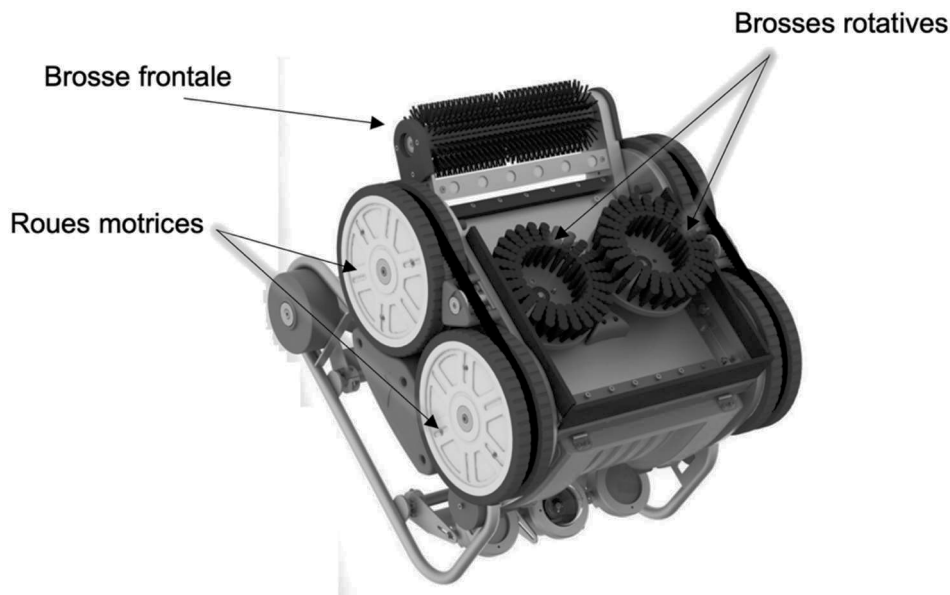


Figure 4 : vue de dessous du robot (brosses rotatives et brosse frontale)

Pilotage du robot

La console de pilotage ou Interface Homme-Machine (IHM) est dotée d'un écran de visualisation. Deux caméras montées sur le robot à l'avant et à l'arrière, assistées d'un éclairage (deux spots LED), permettent à l'utilisateur d'observer la position du robot et de vérifier son efficacité en action.

Les boutons permettent de diriger le robot pour se déplacer sur les formes des coques les plus complexes.

Les principales commandes à disposition du pilote permettent de :

- faire monter/descendre le robot le long de la coque du bateau ;
- déplacer le robot vers la gauche et la droite de la coque du bateau ;
- faire tourner le robot sur lui-même ;
- immobiliser le robot ;
- actionner la rotation de l'hélice centrale ;
- mettre en rotation la brosse frontale.

SUJET DE L'ETUDE

L'étude proposée se décompose en trois parties indépendantes :

- Partie 1 : Étude de la flottaison du robot et de son placage sur la coque.
- Partie 2 : Étude de l'asservissement en vitesse des mouvements du robot sur une coque immergée.
- Partie 3 : Étude du carter du robot.

PARTIE 1. ÉTUDE DE LA FLOTTAISON DU ROBOT ET DE SON PLACAGE SUR LA COQUE

Objectif : analyser la flottaison du robot et les actions qui le font se plaquer sur la coque à nettoyer.

Le robot doit se plaquer sur la coque du bateau et fonctionner dans toutes les orientations nécessaires pour la nettoyer, y compris « au plafond ».

La masse du robot de carène est de 19 kg, ce qui permet une manutention et une mise à l'eau possible pour un opérateur seul.

Lors de la mise à l'eau du robot, à distance du bateau à nettoyer, celui-ci doit entièrement s'immerger sans couler, avec un angle de 45° par rapport à la surface (Figure 5).

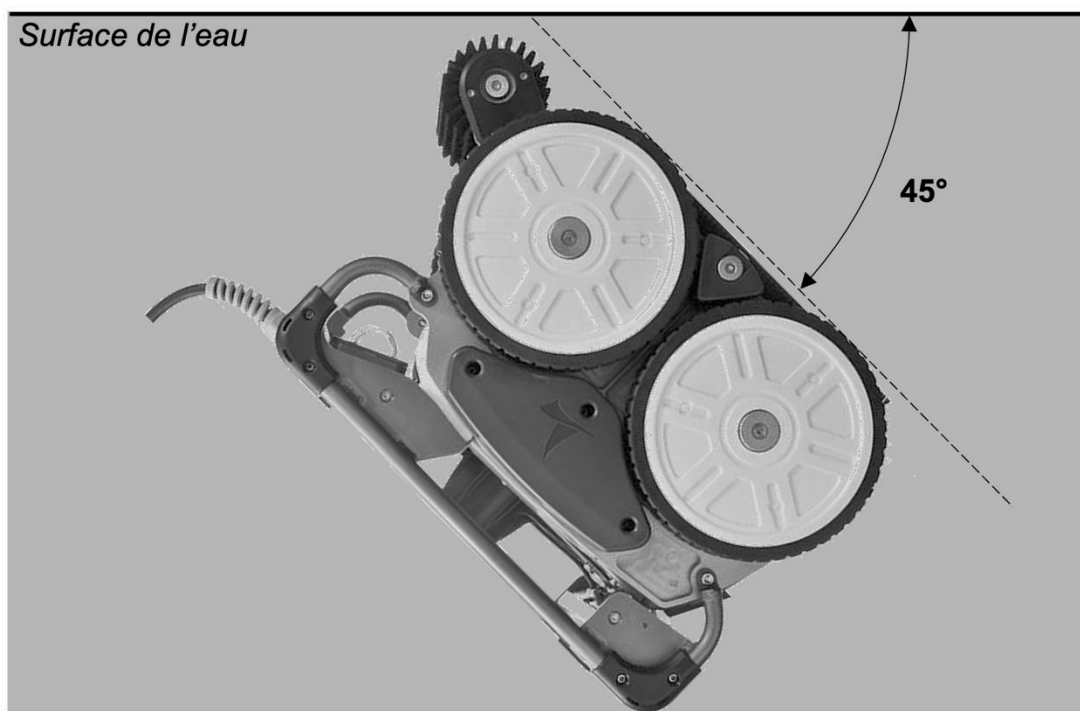


Figure 5: flottaison normale du robot lors de la mise à l'eau

Si nécessaire, des masselottes pourront être ajoutées pour atteindre cette flottaison quelle que soit la salinité du milieu d'immersion.

Nature du milieu	Salinité
Eau douce	< 1 g/L
Eau Atlantique	25 à 30 g/L
Eau Méditerranée	30 à 40 g/L

Tableau 1 : salinité de l'eau en fonction du milieu

Le volume étanche du robot est de $1,87 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$. On considère dans cette étude que le robot évolue dans de l'eau salée de masse volumique ρ égale à $1025 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et que l'accélération de la pesanteur a pour valeur $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Lors de cette phase d'immersion, le robot est simplement soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P}$;
- l'action exercée par l'eau sur le robot (la poussée d'Archimède).

La poussée d'Archimède peut être définie comme : « tout corps plongé dans un fluide au repos, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et égale (et opposée) au poids du volume de fluide déplacé. Elle s'applique au centre de masse du fluide déplacé, appelé *centre de poussée*. ».

Question 1. Calculer l'effort généré par la poussée d'Archimède sur le robot. Le comparer au poids du robot et conclure sur la nécessité d'utiliser des masselottes.

Question 2. Quelle est la condition à respecter pour que le robot, lors de son immersion, soit incliné de 45° par rapport à la surface de l'eau ? (Vous pourrez illustrer votre raisonnement à l'aide d'un schéma sur votre copie).

Quand le robot est immergé à proximité de la coque à nettoyer, l'opérateur met en marche l'hélice dorsale qui assure deux fonctions principales (Figure 6) :

- plaquer le robot sur la coque du bateau pour que les roues puissent adhérer de manière à permettre le déplacement du robot ;
- créer un flux d'eau qui entraîne les impuretés détachées de la coque à travers un filtre textile.

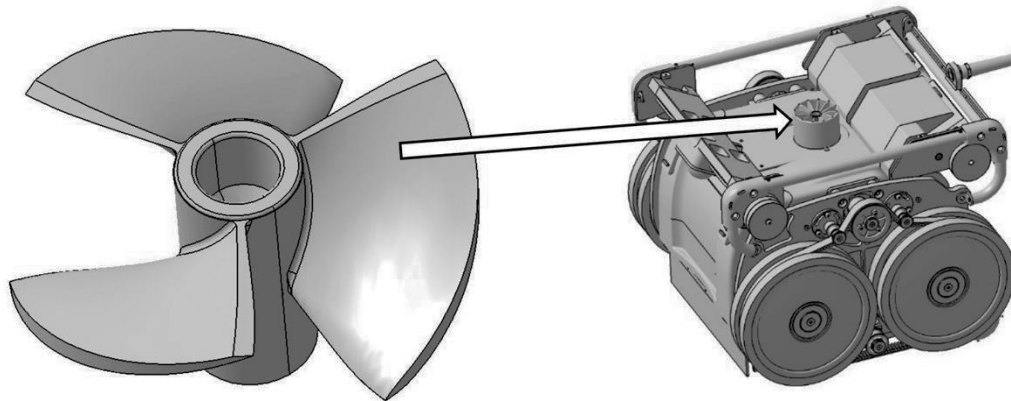


Figure 6 : hélice dorsale et emplacement sur le robot

On s'intéresse à l'effort axial de placage exercé par l'hélice dorsale sur le robot, en utilisant la théorie des hélices.

Les hypothèses faites sont les suivantes :

- L'hélice est une hélice fine à trois pales. Chaque pale a une épaisseur constante. On note p le pas de l'hélice.
- On néglige les effets hydrodynamiques (cavitation, pertes visqueuses, interactions avec l'environnement : carène, recirculation...).
- L'hélice fonctionne en mode pompe, c'est-à-dire que sa vitesse de déplacement est nulle suivant son axe.

On note :

- ρ : masse volumique de l'eau salée ($1025 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) ;
- Q_m : quantité de mouvement d'un fluide en translation : $Q_m = d_m \cdot v$, avec d_m : débit massique en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et v : vitesse du fluide en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;
- Le débit massique est le produit de la masse volumique ρ par la section de passage du fluide et sa vitesse : $d_m = \rho \cdot A \cdot v$;
- v_a : vitesse axiale du fluide avant l'hélice (ou vitesse d'aspiration) en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Figure 7) ;
- v_e : vitesse axiale du fluide après l'hélice (ou vitesse d'éjection) en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Figure 7) ;
- ω_h : vitesse de rotation de l'hélice ($440 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$) ;
- D : diamètre extérieur de l'hélice (58 mm) ;
- D_{moyeu} : diamètre du moyeu de l'hélice (16 mm) ;
- A : section de passage du fluide avant l'hélice, considérée égale à la surface projetée de l'hélice dans le plan normal à son axe (Figure 7) :

$$A = \frac{\pi \cdot (D^2 - D_{\text{moyeu}}^2)}{4} ;$$

- w : induction axiale. Ce terme permet de quantifier l'augmentation de vitesse axiale du fluide due à l'action de l'hélice en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ tel que $v_e = v_a + 2w$ (Figure 7).

Explication de l'induction axiale :

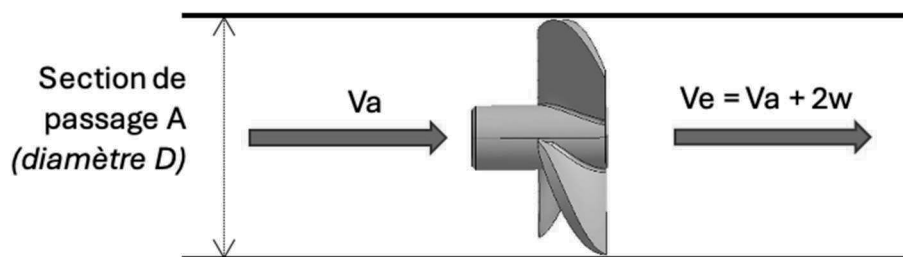


Figure 7 : évolution de la vitesse du fluide qui traverse une hélice

La théorie de Froude suppose que la variation de vitesse axiale du fluide à travers l'hélice suit le comportement suivant :

1. **Avant l'hélice** : le fluide arrive avec une vitesse axiale v_a .
2. **Au niveau de l'hélice** : Le fluide subit une accélération immédiate due aux pales de l'hélice, atteignant une vitesse axiale $(v_a + w)$.
3. **Après l'hélice** : La vitesse axiale du fluide continue d'augmenter atteignant une vitesse finale (appelée *vitesse d'éjection*) $v_e = v_a + 2w$.

1.1. Démarche de détermination de l'effort axial exercé par l'hélice sur le robot.

La démarche se décompose en trois phases :

- calcul de la variation de la quantité de mouvement du fluide générée par l'hélice ;
- application du théorème de la quantité de mouvement pour déterminer l'expression de l'effort axial en fonction de w ;
- utilisation de la théorie de Betz pour déterminer la valeur de l'induction axiale w .

- Question 3.** Exprimer la quantité de mouvement de l'eau avant l'hélice et après l'hélice en fonction du débit massique $\dot{m}$ et des vitesses v_a et v_e , en précisant les dimensions des différents termes.
- Question 4.** Quelle hypothèse peut-on faire concernant le débit massique avant et après l'hélice ?
- Question 5.** Exprimer le débit massique avant et après l'hélice en fonction de A , ρ et v_a .
- Question 6.** Appliquer le théorème de la quantité de mouvement pour déterminer l'effort axial F_a , effort que l'hélice exerce sur le fluide.

Pour calculer F_a , les valeurs de v_a et de w doivent être connues.

Pour un fonctionnement de l'hélice en mode pompe, v_a dépend essentiellement de la vitesse de rotation ω_h ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$), du diamètre D (m) de l'hélice et d'un paramètre de fonctionnement de l'hélice α égal à 0,098 (s.u.) :

$$v_a = 2 \cdot \alpha \cdot \omega_h \cdot D$$

- Question 7.** Calculer la valeur de v_a (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) en fonction des caractéristiques de l'hélice.

Pour déterminer analytiquement w , on peut utiliser la théorie de Betz qui définit C_T en fonction de k :

$$C_T = 4k \cdot (1-k) \quad \text{avec} \quad k = \frac{w}{v_a} > 0$$

Pour une hélice fine fonctionnant en mode pompe (sans déplacement de l'hélice suivant son axe), le coefficient de poussée C_T peut être estimé à 0,98.

- Question 8.** À partir des relations ci-dessus, calculer la valeur de k puis celle de w .
- Question 9.** Déterminer la valeur de l'effort axial.
- Question 10.** Cette valeur est-elle compatible avec le diagramme des exigences (annexe 1) ? Préciser.
- Question 11.** En isolant le robot, immobile, brosses rotatives et hélice actives, sous une portion de coque horizontale (Figure 8), faire le bilan des actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur le robot en mentionnant toutes les hypothèses réalisées en plus des hypothèses suivantes.

Hypothèses :

- dans cette configuration, la brosse frontale n'est pas en action, elle ne touche pas la coque ;
- le plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$ est plan de symétrie pour la géométrie et pour les efforts (annexe 2) ;
- on néglige l'action du câble de liaison entre le robot et la surface ;
- on représente la résultante des efforts exercés par la coque sur les deux brosses rotatives ventrales par une force axiale suivant $\vec{z}$ (en considérant que les composantes radiales s'annulent car les deux brosses tournent en sens inverse).

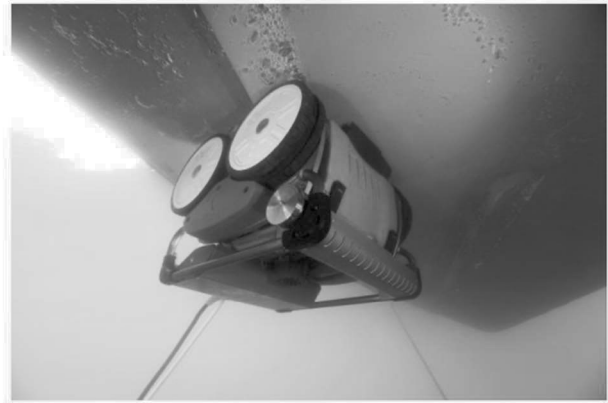
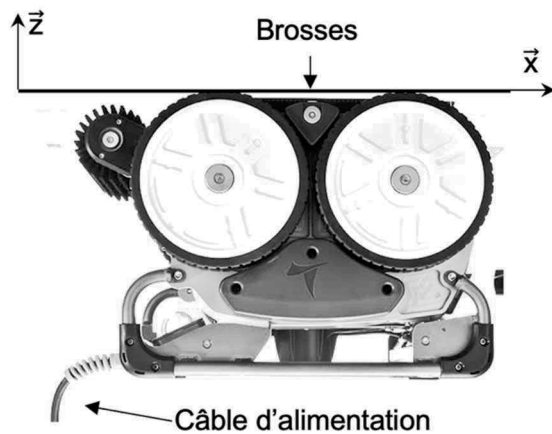


Figure 8 : robot sous une coque horizontale

On considère que le centre de gravité G et le centre de poussée C_p sont suffisamment proches pour pouvoir être confondus.

Question 12. Déterminer l'expression littérale des efforts exercés par les roues avant et arrière sur la coque dans le cas où l'effort de placage $\vec{F}_p$ s'exerce au point P et la résultante des efforts de brossage au point C (On se référera à l'annexe 2 pour les caractéristiques géométriques nécessaires).

Pour finaliser l'étude, l'effort de brossage doit maintenant être déterminé.

1.2. Dispositif expérimental pour évaluer la dépression sous les brosses.

On veut s'assurer que le robot reste en contact avec la coque du bateau, c'est-à-dire que l'action exercée par la coque sur les brosses ventrales n'est pas trop intense vis-à-vis de l'effort de placage exercé par l'hélice.

La suite de l'étude va donc consister à quantifier l'effort axial exercé par la coque sur les brosses rotatives.

La force axiale engendrée par une brosse rotative qui tourne dans l'eau résulte principalement de la dépression qui se crée entre la brosse et la paroi.

On notera que le centre de la brosse est creux (absence de poils au centre de la brosse) et la distance entre la brosse et la coque est nulle (la brosse frotte sur la coque).

On cherche donc à déterminer expérimentalement la dépression créée par une brosse rotative réelle grâce à un dispositif expérimental (Figure 9). Ce dispositif consiste en une enceinte remplie d'eau salée (masse volumique $\rho = 1025 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$), un moteur étanche qui entraîne en rotation une brosse rotative de diamètre 160 mm qui frotte sur une paroi orthogonale à son axe (la fréquence de rotation du moteur est de $400 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$).

La mesure de la dépression se fait en mesurant la différence de niveau entre la surface de l'eau dans l'enceinte et la hauteur d'eau dans un tube transparent.

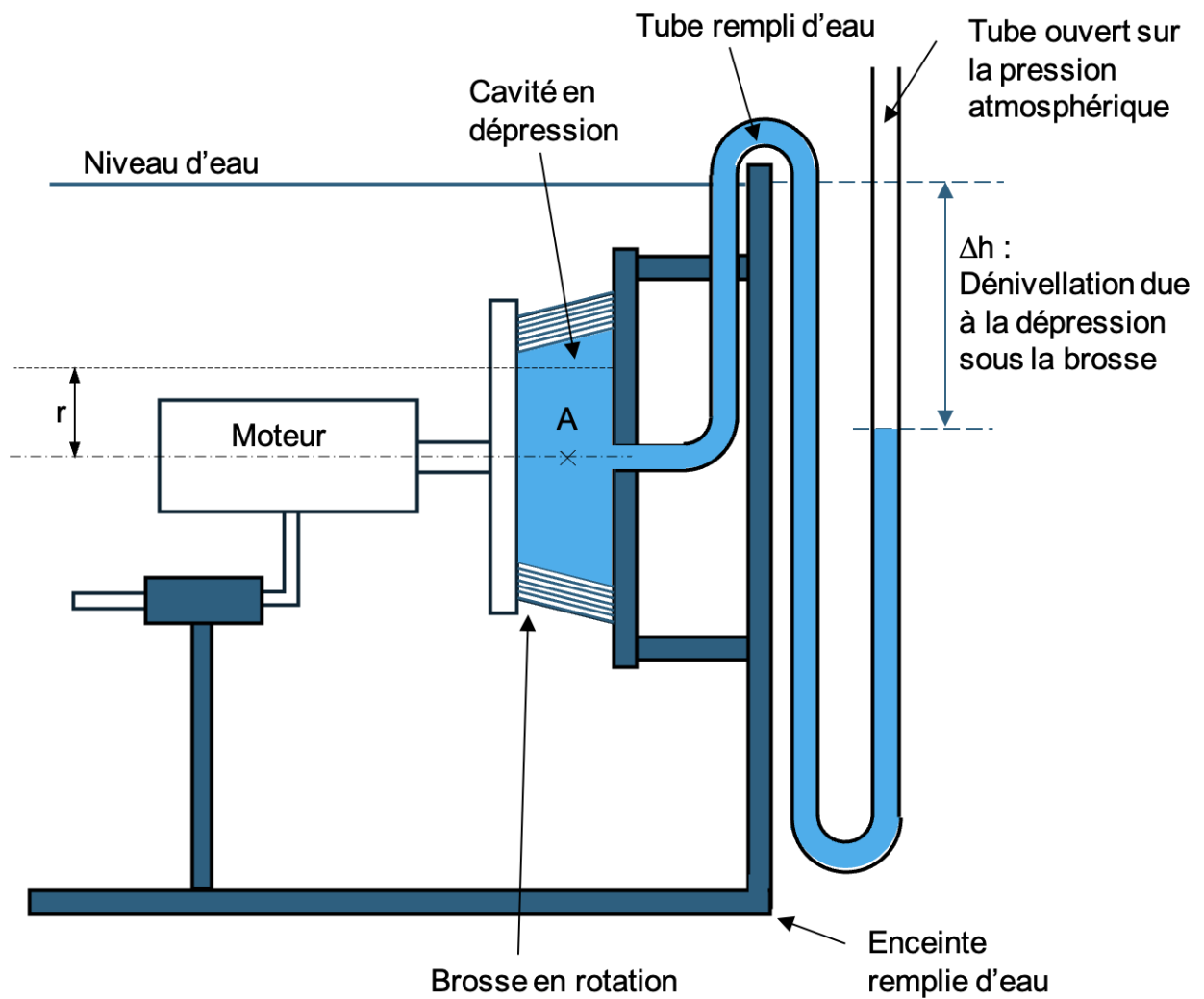


Figure 9 : dispositif expérimental de mesure de la dépression sous une brosse tournante

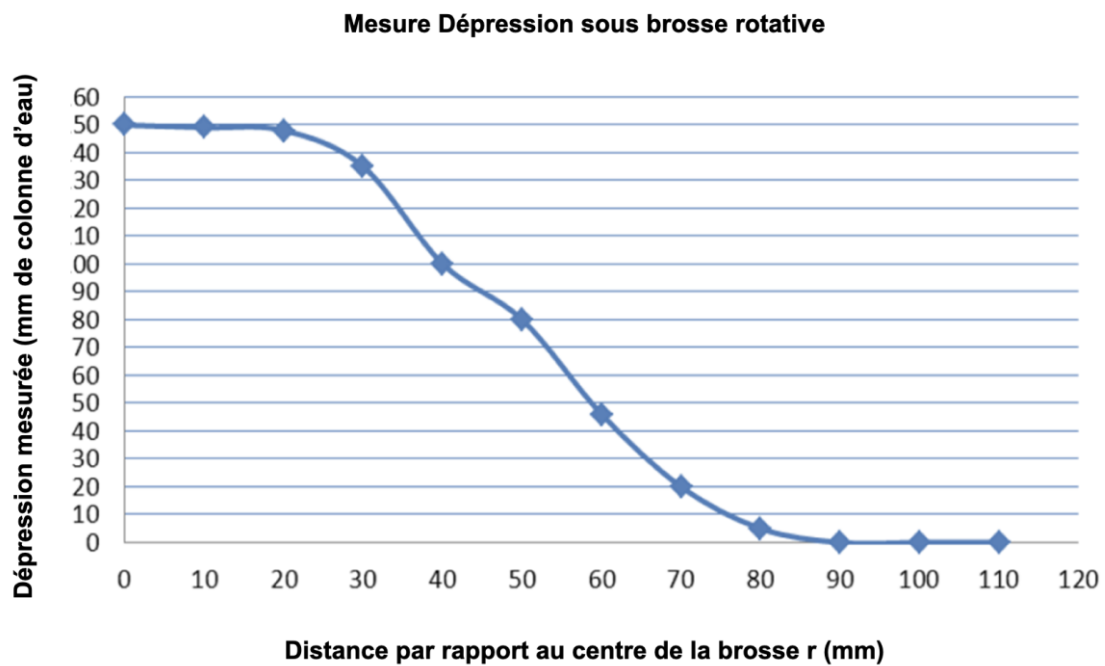


Figure 10 : mesures de dénivellation en fonction de la distance à l'axe de la brosse

Initialement, l'axe de la brosse est aligné avec la sortie du tube. On note P_{A0} la pression en un point A de l'axe de la brosse, dans la cavité, quand la brosse est immobile et P_{A1} la pression en ce même point lorsque la brosse tourne. On cherche l'expression de $\Delta P = P_{A1} - P_{A0}$ en fonction de la dénivellation Δh .

Question 13. Déterminer l'expression de la dépression ΔP en fonction de la dénivellation Δh .

Exploitation des données expérimentales :

Le dispositif expérimental décrit sur la Figure 9 est mis en œuvre. La position radiale de la brosse par rapport à la sortie du tube évolue. La dépression ΔP est relevée en fonction de r , distance entre l'axe de la brosse et le point de mesure de pression (Figure 10).

Question 14. Cet effort axial est-il compatible avec le diagramme des exigences ? Préciser.

1.3. Étude de la solution technique retenue.

L'effort de brossage doit être constant et ne pas dépasser 20 N pour ne pas endommager la coque ou son revêtement antifouling. Le schéma de principe ci-dessous représente les positions extrêmes que peuvent prendre les brosses (Figure 11).

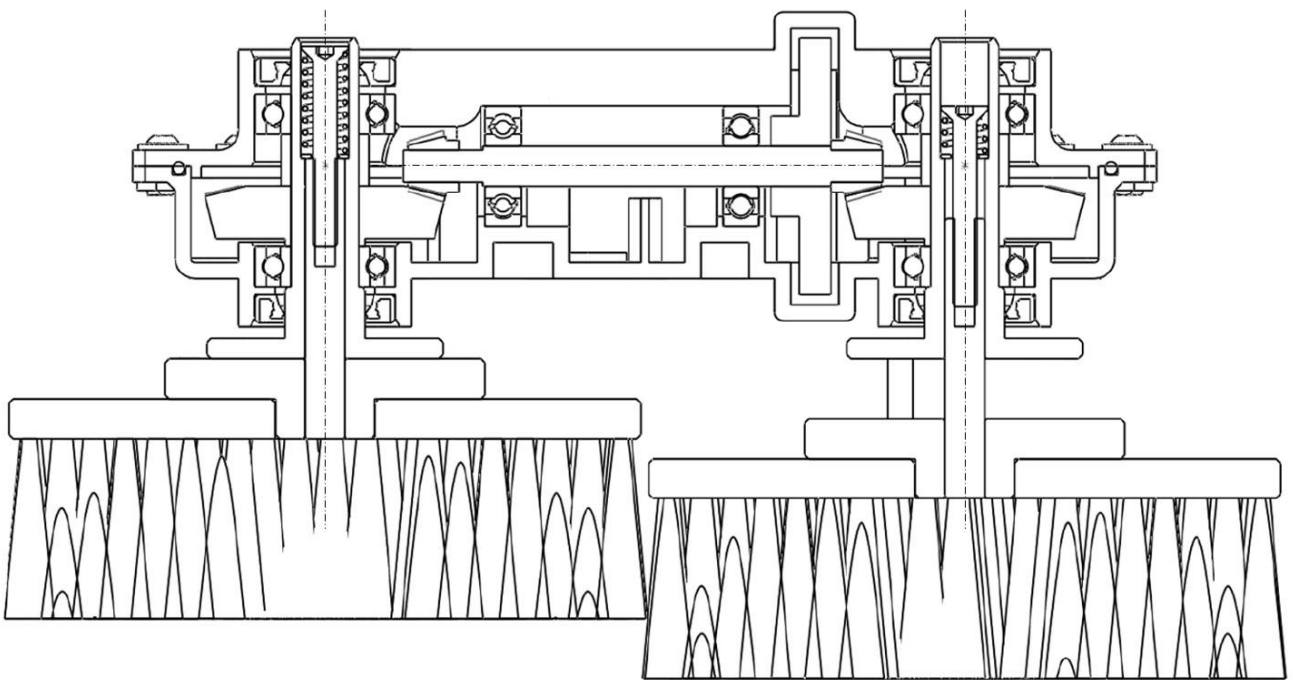


Figure 11 : schéma de principe des brosses contrarotatives en positions haute et basse

Note : les ressorts sont représentés de façon non réaliste. Le ressort à droite est comprimé au maximum alors que le ressort gauche est non comprimé.

Question 15. Établir le schéma cinématique de ce système.

Définition des ressorts

La dépression créée par les brosses tournantes plaque les brosses vers la coque, ce qui permet d'assurer l'effort de brossage désiré. Cet effort ne pourrait pas être constant si les brosses étaient fixes par rapport au robot en raison de la courbure de la coque (Figure 12).

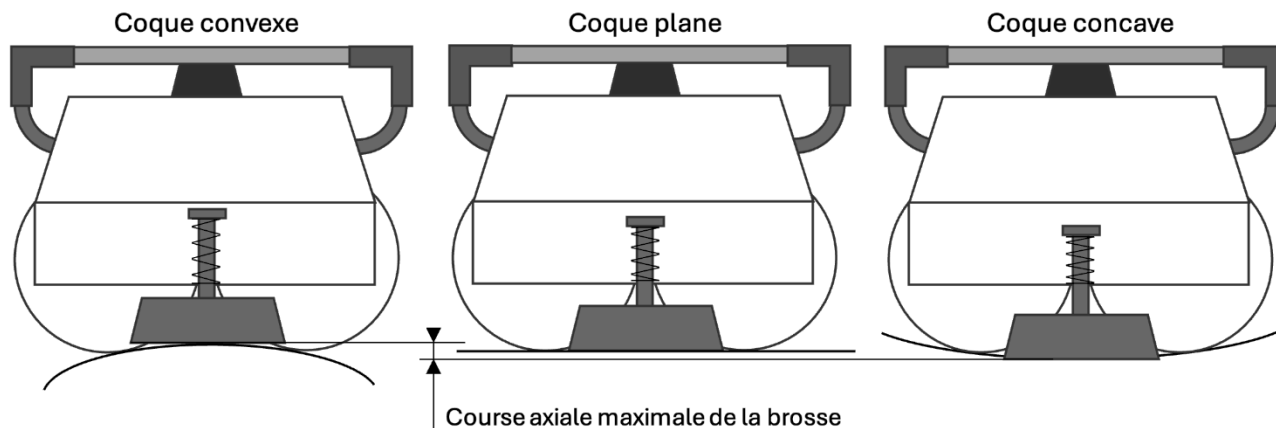


Figure 12 : compression du ressort en fonction du type de coque

On s'intéresse au dimensionnement des ressorts de rappel schématisés sur la Figure 12. Dans le cas de la coque de convexité maximale, le ressort est considéré totalement détendu (on néglige la légère précharge qu'il subit), c'est-à-dire que sa longueur est égale à sa longueur à vide.

En revanche, quand la coque atteint une concavité maximale, la brosse doit se translater et le ressort subit alors une compression de 16 mm.

Si on isole la brosse en rotation sur une portion de coque de courbure constante et si on néglige son poids, elle est soumise à trois forces :

- l'action exercée par la coque sur la brosse (droite support passant par point D de la Figure 13) ;
- l'action due à la dépression entre la brosse et la coque (droite support passant par D) ;
- l'action exercée par le ressort sur la brosse (droite support passant par E).

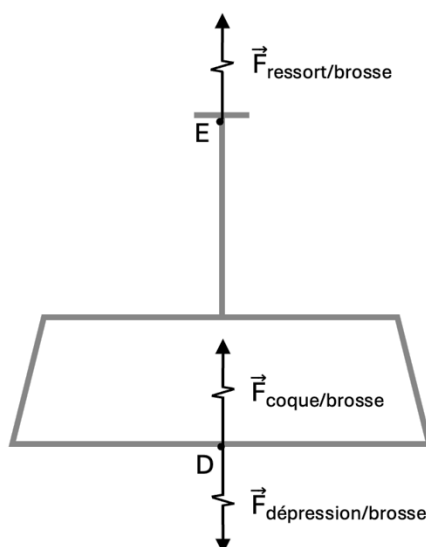


Figure 13 : modélisation des actions qui s'exercent sur la brosse

On considère que l'effort axial créé par la dépression entre la brosse et la coque a pour norme 14 N, indépendamment des résultats trouvés précédemment.

Question 16. Déterminer la raideur maximale du ressort pour garantir l'effort axial de brossage minimum (Id 1.1.3 en annexe 1).

Les contraintes dimensionnelles imposent les caractéristiques suivantes pour ce ressort :

- diamètre du fil d (mm) ;
- diamètre d'enroulement D : 10 mm ;
- longueur à vide l_0 : 50 mm ;
- nombre de spires n : 17.

Le matériau du ressort sera un acier à ressort classique (suivant la norme EN 10 270-1, voir annexe 3).

Question 17. Déterminer le diamètre d du fil du ressort qui permet de remplir cette fonction de rappel tout en respectant les spécifications du diagramme des exigences de l'annexe 1 au niveau de l'effort de contact des brosses avec la coque. Choisir le diamètre normalisé de fil le plus adapté à l'aide de l'annexe 3.

PARTIE 2. ÉTUDE DE L'ASSERVISSEMENT EN VITESSE DU ROBOT

Objectif : valider le choix des moteurs pour le déplacement du robot sous l'eau en contact avec la coque du bateau.

Le robot est équipé de quatre roues identiques et deux moteurs qui pilotent pour l'un, la vitesse des deux roues gauches et pour l'autre, la vitesse des deux roues droites (Figure 14).

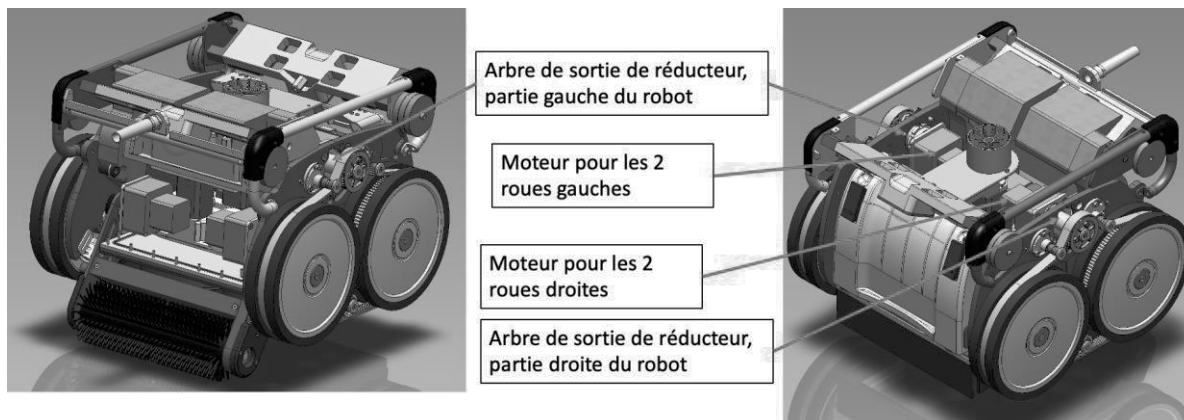


Figure 14 : détail moteurs roues gauches et droites

Chaque couple de roues (gauches et droites) est actionné par un moteur brushless accouplé à un réducteur entraînant un système poulies-courroie.

Les caractéristiques des moteurs sont les suivantes :

- $J_{eq} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, le moment d'inertie équivalent ramené sur l'arbre moteur ;
- $L = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ H}$, l'inductance du moteur ;
- $k_t = 0,13 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$, la constante de couple ;
- $k_e = 0,13 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$, la constante électrique ;
- $R_m = 1,5 \Omega$, la résistance interne du moteur ;
- $\omega_m(t)$, la vitesse de sortie de l'arbre moteur en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $\omega_{red}(t)$, la vitesse de sortie de l'arbre réducteur en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- k_{red} , le rapport du réducteur : $k_{red} = \frac{\omega_{red}(t)}{\omega_m(t)} = \frac{1}{25}$;
- $N_{max} = 3000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, la fréquence maximale de rotation du moteur ;
- $f = 10^{-1} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$, le facteur de frottement visqueux.

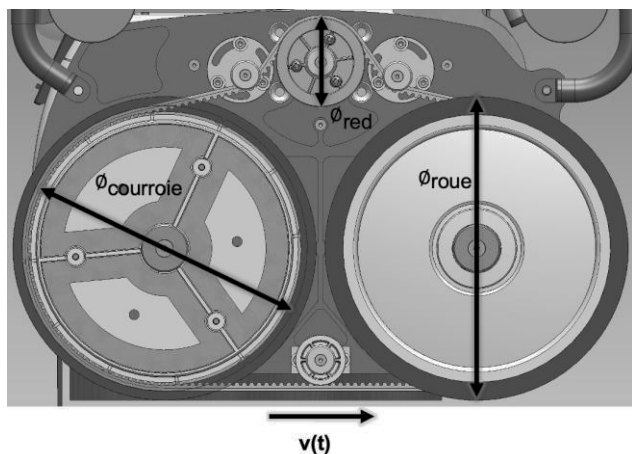


Figure 15 : détail système poulie-courroie côté droit

On note (Figure 15) :

- $\varnothing_{red} = 59 \text{ mm}$, le diamètre des deux poulies en sortie des deux réducteurs ;
- $\varnothing_{courroie} = 184 \text{ mm}$, le diamètre primitif du contact roue avec la courroie ;
- $\varnothing_{roue} = 204 \text{ mm}$, le diamètre des roues du robot ;
- $v(t)$, la vitesse linéaire du robot par rapport à la coque du bateau, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $\omega_R(t)$, la vitesse de rotation d'une roue, en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Question 18. En notant $\omega_{RG}(t)$ la vitesse de rotation des roues gauches et $\omega_{RD}(t)$ la vitesse de rotation des roues droites, écrire les relations entre ces deux vitesses avec les mentions « égale à » ou « inférieure à » ou « supérieure à » ou « inverse à » pour les trois cas décrits de la Figure 16.

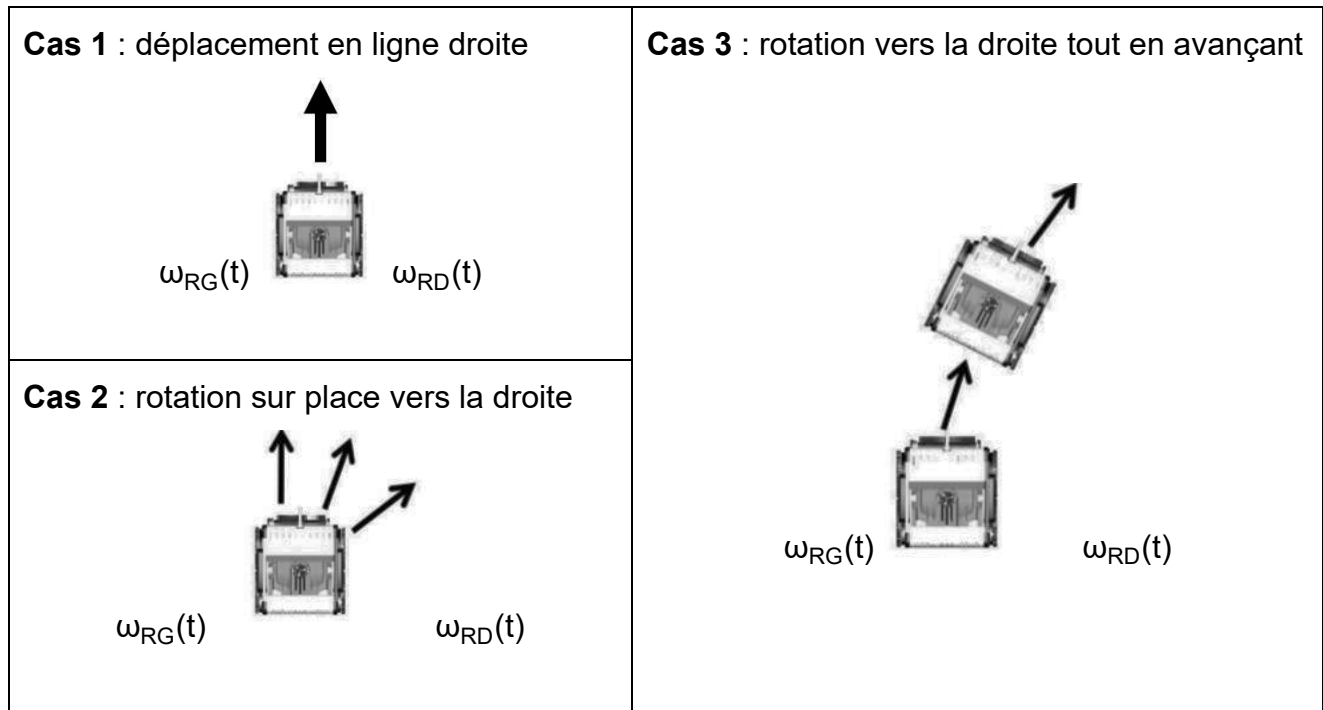


Figure 16: 3 cas de déplacement à étudier

2.1. Déplacement en ligne droite

Si le robot se déplace en ligne droite, alors $\omega_{RG}(t) = \omega_{RD}(t) = \omega_R(t)$; on note $v(t) = k \cdot \omega_m(t)$.

Question 19. Exprimer k en fonction de ϕ_{red} , k_{red} , ϕ_{roue} et $\phi_{courroie}$.

Question 20. Exprimer la vitesse maximale v_{max} que le robot peut atteindre lorsque le moteur tourne à sa fréquence maximale de rotation. Vérifier que le critère de vitesse maximale défini dans le diagramme des exigences de l'annexe 1 est validé.

Lors d'une phase de nettoyage (en ligne droite), le robot se déplace en descente suivant une loi trapézoïdale en vitesse, définie sur la Figure 17. Sa vitesse maximale est alors $V_{max} = 0,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

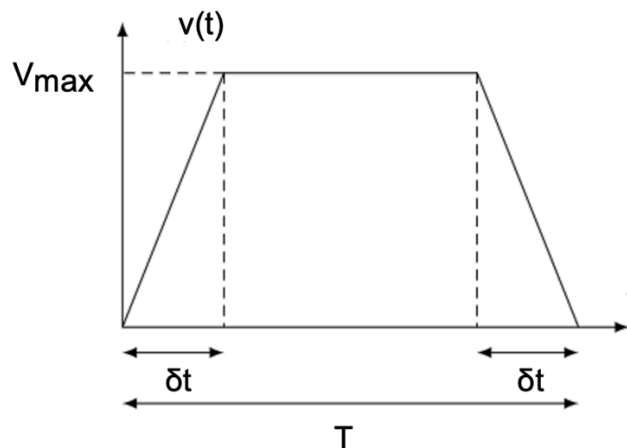


Figure 17 : loi de commande de vitesse linéaire du robot

Question 21. Exprimer D (distance parcourue par le robot lors d'un trajet de descente) en fonction de δt , T et $V_{\max}$.

On considère que la durée de la phase d'accélération et de décélération vaut $\delta t = 1\text{s}$. La largeur de coque que le robot nettoie à chaque instant est $L_n = 360\text{ mm}$.

Question 22. Déterminer l'expression littérale de Q , surface théorique moyenne nettoyée par le robot en une seconde en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ en fonction de D , L_n , δt et $V_{\max}$. Faire l'application numérique si on parcourt une distance de coque $D = 2\text{ m}$.

On constate que cette valeur théorique est très supérieure à celle annoncée dans le cahier des charges.

Question 23. Donner 2 arguments expliquant la différence entre Q théorique calculé question 22 et la surface nettoyée annoncée dans le diagramme des exigences (id 1.1.2).

2.2. Asservissement en vitesse des moteurs.

Objectif : valider les exigences en précision de la vitesse du robot.

Hypothèses : le robot se déplace en ligne droite, donc par symétrie, la vitesse des roues gauches est la même que celle des roues droites. Par conséquent, on étudiera l'asservissement en vitesse d'un seul des deux moteurs.

Lorsque l'utilisateur appuie sur la touche de déplacement en ligne droite, cela revient à donner une vitesse de consigne $v_c(t)$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ au robot. Un bloc d'adaptation de gain K_a convertit cette consigne en une valeur numérique $e_c(t)$, image de la consigne en vitesse. Un codeur incrémental de gain K_{cod} permet d'obtenir une image de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$. Ce codeur a une résolution de 500 incréments par tour.

L'écart $\varepsilon(t)$ entre $e_c(t)$ et l'image de $\omega_m(t)$ est en entrée d'un correcteur, suivi d'un ensemble (moduleur + CNA) de gain K_{CNA} pour élaborer une tension d'alimentation du moteur $u_m(t)$. La vitesse de rotation en sortie de moteur $\omega_m(t)$ est adaptée par un réducteur et un système poulie-courroie pour obtenir la vitesse du robot $v(t) = k \cdot \omega_m(t)$.

On note $C_r(t)$ le couple résistant exercé sur un moteur, dû aux actions mécaniques extérieures exercées sur le robot dans l'eau (le robot se déplace sur une coque qui est sale et non lisse, ce qui peut engendrer également des perturbations quant au respect de la vitesse de consigne donnée par l'utilisateur).

On adopte le modèle de connaissance suivant pour chaque moteur :

$$\bullet \quad u(t) = R_m \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (1)$$

$$\bullet \quad e(t) = k_e \cdot \omega_m(t) \quad (2)$$

$$\bullet \quad C_m(t) = k_t \cdot i(t) \quad (3)$$

$$\bullet \quad J_{\text{eq}} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f \cdot \omega_m(t) \quad (4)$$

Avec :

- $u(t)$ la tension consigne aux bornes d'un moteur, en V ;
- $i(t)$ le courant qui traverse chaque moteur, en A ;
- $\omega_m(t)$ la vitesse de l'arbre moteur, en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $C_m(t)$ le couple exercé par un moteur, en $N \cdot m$;
- $C_r(t)$ le couple résistant, en $N \cdot m$.

Notations : on note $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$.

Question 24. Écrire les équations (1) à (4) dans le domaine de Laplace, en énonçant la (ou les) hypothèse(s) et le (ou les) théorème(s) utilisé(s).

Question 25. Déterminer la relation suivante $\Omega_m(p) = H_m(p) \cdot U(p) - H_r(p) \cdot C_r(p)$ en explicitant littéralement $H_m(p)$ et $H_r(p)$ sous forme canonique.

Question 26. Déterminer les valeurs caractéristiques littérales de $H_m(p)$ (gain K_m , pulsation propre ω_{0m} et coefficient d'amortissement ξ_m). Faire les applications numériques.

$H_m(p)$ peut se mettre sous la forme $\frac{K_m}{(1+\tau_1 \cdot p)(1+\tau_2 \cdot p)}$.

Question 27. Exprimer sous forme littérale τ_1 et τ_2 . Faire les applications numériques.

Question 28. Déterminer l'expression de la réponse temporelle $\omega_m(t)$ à un échelon de tension d'amplitude U_0 en fonction de K_m , τ_1 , et τ_2 .

Un relevé expérimental permet d'obtenir l'évolution de la vitesse de rotation du moteur (modèle présent sur le robot) en réponse à un échelon de tension de 1V, Figure 18.

Question 29. Montrer qu'il est alors possible d'assimiler le comportement du moteur à celui d'un système d'ordre 1. Identifier à partir de la courbe de la Figure 18, les valeurs des paramètres de sa nouvelle fonction de transfert $H_{\text{mot}}(p) = \frac{G_m}{1 + \tau_m \cdot p}$.

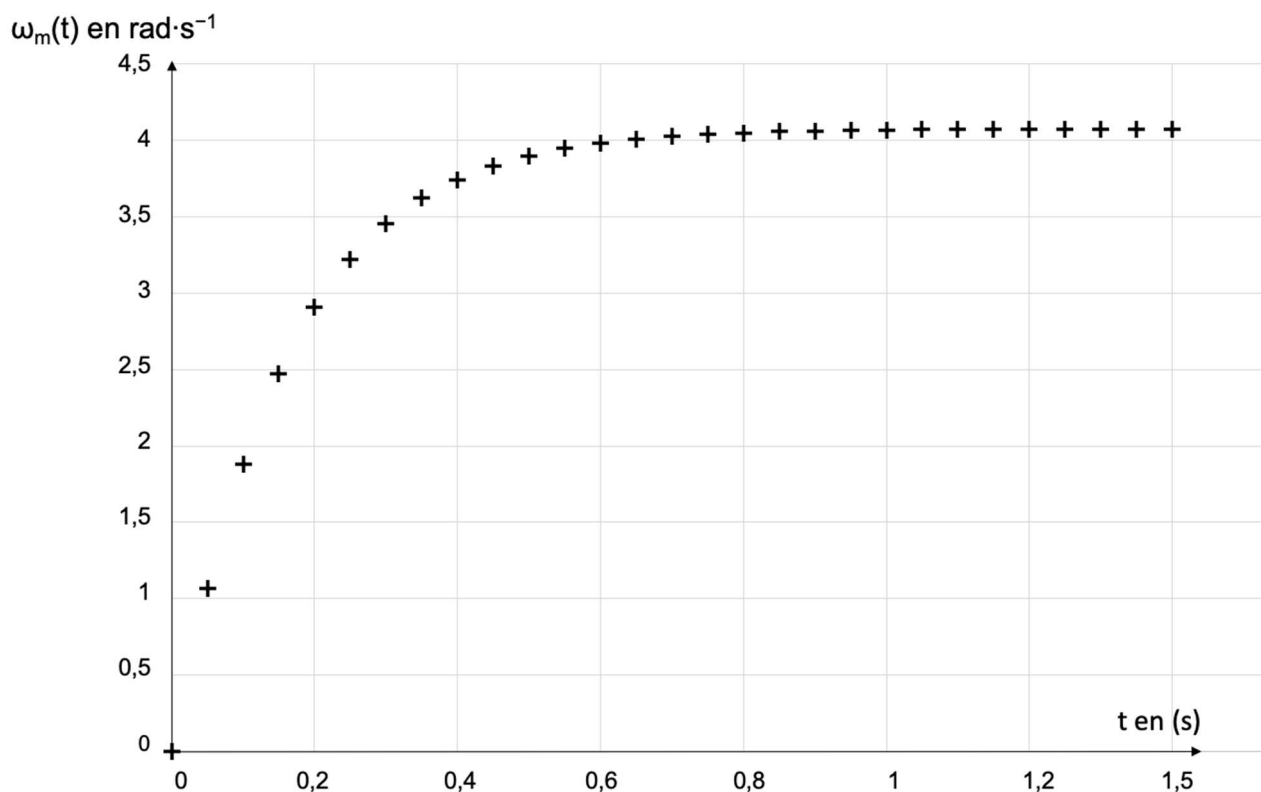


Figure 18 : évolution de la vitesse de rotation du moteur à un échelon de tension $u(t) = 1V$

Asservissement en vitesse du robot.

La fonction de transfert du correcteur et du CNA est notée $C(p) \cdot K_{CNA}$.

Question 30. Sur feuille de copie, reproduire et compléter le schéma bloc de l'asservissement de vitesse linéaire du robot fourni Figure 19.

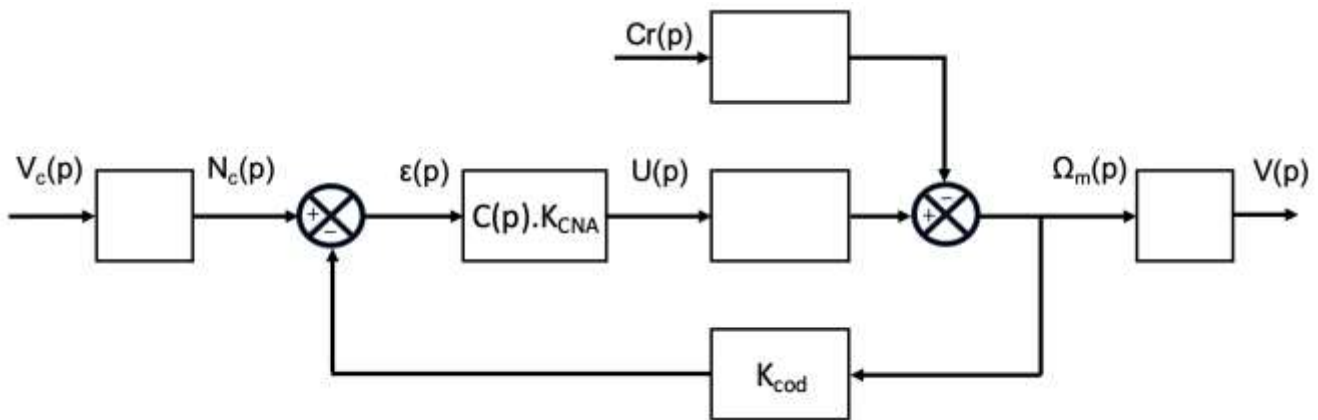


Figure 19 : schéma bloc de l'asservissement de vitesse linéaire du robot

Question 31. Déterminer la valeur numérique du gain du codeur incrémental K_{cod} en $\text{inc} \cdot \text{rad}^{-1}$.

Question 32. Déterminer l'expression littérale K_a de l'adaptateur pour que $\varepsilon_R(t)$ soit l'image de l'écart $(V_c(t) - V(t))$.

On peut alors mettre le schéma bloc sous la forme d'un schéma à retour unitaire (Figure 20).

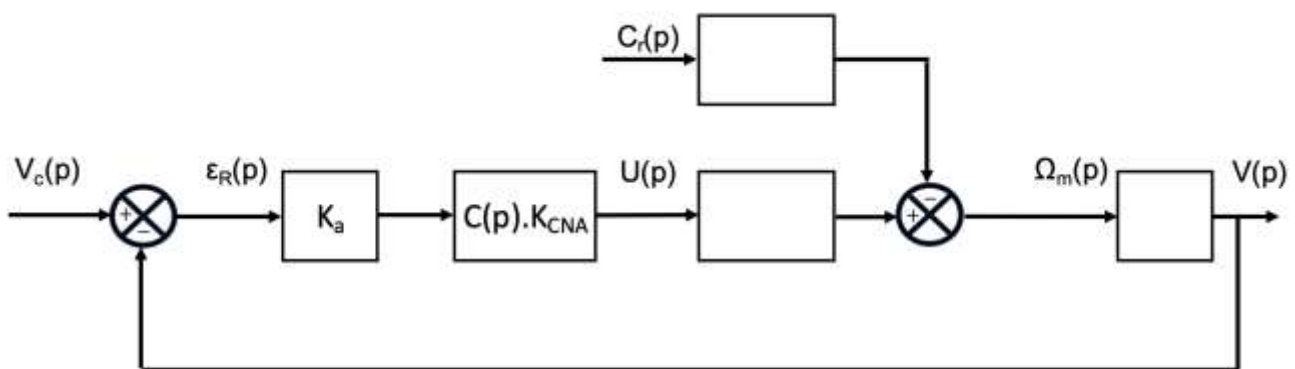


Figure 20 : schéma bloc à retour unitaire de l'asservissement de vitesse linéaire du robot

Question 33. Donner la définition de la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p)$ et l'exprimer en fonction de $C(p)$, K_{CNA} , G_m , T_m , K_a et k (on rappelle que $v(t) = k \cdot \omega_m(t)$ avec $k = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{m.}$).

2.3. Système non corrigé et non perturbé

On étudie le système avec $C(p) = 1$ et $C_r(p) = 0$;

Question 34. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p) = \left[\frac{V(p)}{V_c(p)} \right]_{C_r(p)=0}$ en fonction de K_a , K_{CNA} , k , G_m et T_m .

Question 35. Déterminer l'erreur statique pour une entrée en échelon de vitesse $V_0 = 0,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette valeur est-elle strictement compatible avec le diagramme des exigences de l'annexe 1 ?

Question 36. Déterminer si le système répond au critère de stabilité donné dans le diagramme des exigences de l'annexe 1.

2.4. Système avec correcteur

On fait le choix d'un correcteur de la forme $C(p) = K_p \frac{1+\tau_i \cdot p}{\tau_i \cdot p}$

Question 37. Pourquoi avoir choisi ce correcteur ?

Question 38. Est-ce que le couple résistant (perturbation) a une influence sur la précision en vitesse du robot ?

Pour ce correcteur, on choisit de prendre $\tau_i = \tau_m = 0,17 \text{ s}$.

Quelles que soient les valeurs trouvées précédemment, on prendra :

$$K_a \cdot G_m \cdot K_{CNA} = 1247 \text{ m}^{-1}$$

Question 39. Écrire la nouvelle FTBO(p) avec le correcteur choisi.

Question 40. Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle fermée

$$\text{FTBF}(p) = \left[\frac{V(p)}{V_c(p)} \right]_{C_r(p)=0}.$$

Question 41. Déterminer K_p pour respecter l'exigence de rapidité 1.4.1.

Question 42. Avec ce correcteur, déterminer si le système répond au critère de stabilité donné dans le diagramme des exigences de l'annexe 1.

Question 43. Rédiger une synthèse sur le respect des exigences 1.4.1.

PARTIE 3. ÉTUDE DU CARTER DU ROBOT

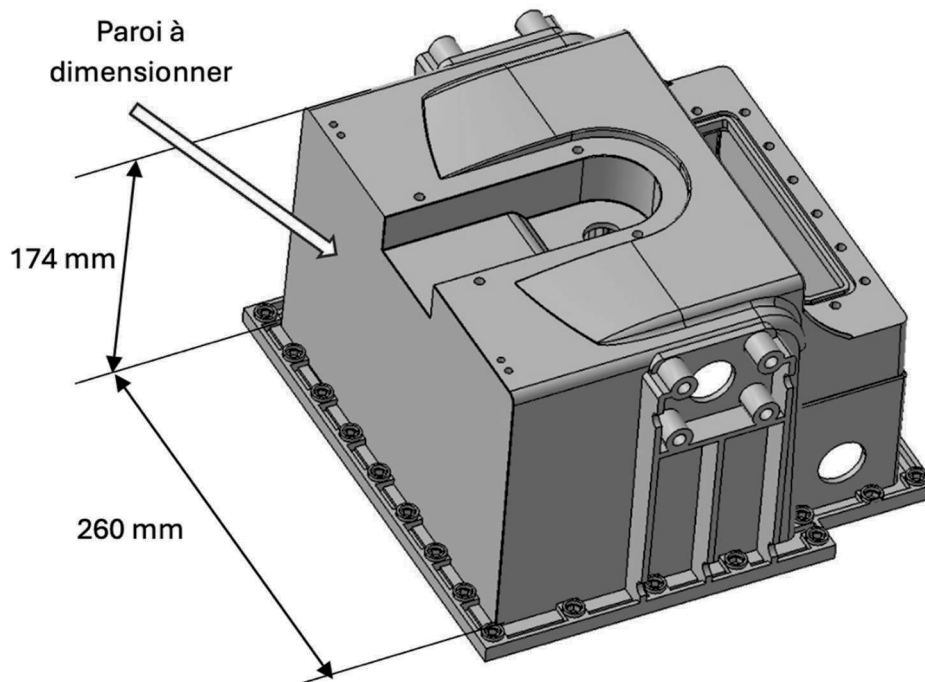


Figure 21 : carter du robot seul

Le carter du robot de carène est un boîtier parallélépipédique creux en ABS dont la plus grande paroi, visible sur la Figure 21, peut être assimilée à une plaque rectangulaire de dimensions 260 mm par 174 mm, d'épaisseur h à déterminer. Ce boîtier est soumis à l'extérieur à une pression uniforme exercée par l'eau de mer, et à l'intérieur à la pression atmosphérique. L'humidité ne doit pas pénétrer à l'intérieur du boîtier, ce qui impose une étanchéité rigoureuse.

Le dimensionnement d'un tel élément se fait couramment à l'aide d'une modélisation par éléments finis (MEF). Préalablement, on veut identifier une première valeur d'épaisseur lors d'une phase de prédimensionnement.

L'objectif de l'étude consistera donc à vérifier si le matériau choisi permet bien de satisfaire les contraintes fonctionnelles suivantes :

- Déformation maximale acceptable (flèche maximale < 3 mm).
- Contrainte maximale compatible avec le matériau ($\sigma_{\max} = 40$ MPa).
- Masse du carter ne dépassant pas la masse limite ($M_{\max} = 1,4$ kg).

3.1. Préambule : pression à laquelle sera soumis le robot.

Le robot devra descendre le long de la quille des bateaux à nettoyer. Pour un voilier de 60 pieds, par exemple, la profondeur maxi que devra atteindre le robot est de 4,5 m. Afin de conserver une marge de sécurité, l'épaisseur de la paroi du carter principal sera dimensionnée pour atteindre une profondeur maximale de 7 m.

On donne la pression maximale d'eau à laquelle sera soumis le robot à une profondeur de 7 m : $P_{\max} = 0,172$ MPa.

3.2. Modélisation de la paroi étudiée.

La paroi étudiée est celle qui est le plus fortement sollicitée. On l'assimile à une plaque mince rectangulaire de côtés a et b encastrée sur sa périphérie, et on s'intéresse à la déformation de cette paroi sous l'effet d'une pression p uniformément répartie.

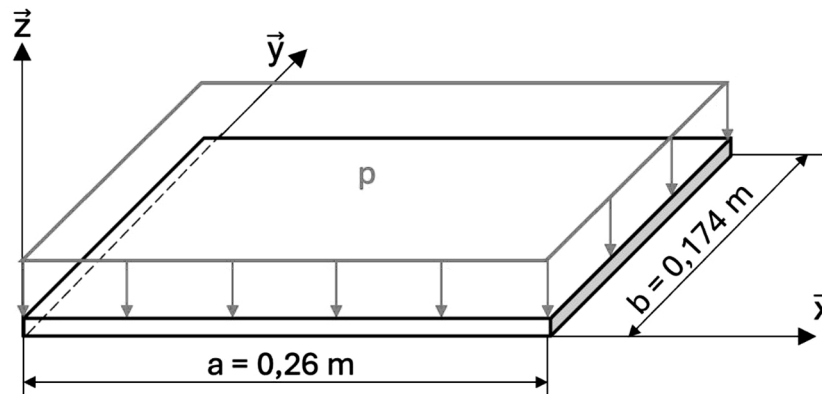


Figure 22 : plaque soumise à une pression p uniformément répartie.

Question 44. Expliquer pourquoi il peut être pertinent d'utiliser le principe des travaux virtuels pour étudier la déformation d'une plaque.

Dans le cas de la plaque étudiée, ce principe conduit à l'équation :

$$\frac{d(U - W_{\text{ext}})}{d\alpha} = 0$$

Avec

- U : énergie de déformation élastique.
- W_{ext} : travail des forces extérieures (ici, la pression p).
- α : déplacement en mètre suivant l'axe $\vec{z}$.

Le déplacement vertical en chaque point est approximé par une fonction de forme :

$$w(x,y) \approx \alpha \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{a}\right)\right) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi \cdot y}{b}\right)\right)$$

Question 45. Vérifier que cette fonction $w(x,y)$ respecte bien les conditions aux limites.

Question 46. Déterminer les coordonnées x et y du point où le déplacement est maximal et donner l'expression de cette flèche maximale f_{max} .

Le calcul de l'énergie de déformation élastique, en remplaçant $w(x,y)$ par l'approximation précédente dans l'expression de l'énergie potentielle de déformation, donne :

$$U = 32 \cdot D \cdot \pi^4 \cdot \left(\frac{a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4}{a^3 b^3}\right) \cdot \alpha^2 \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

(Il n'est pas demandé de démontrer cette relation et E et ν sont donnés en annexe 5).

Question 47. Déterminer l'expression du travail dW_{ext} de la charge répartie p s'appliquant sur un petit élément de la plaque de dimensions dx et dy .

Question 48. Calculer le travail total des forces extérieures W_{ext} en fonction des dimensions de la plaque a et b , de α et du chargement p .

Question 49. Appliquer le principe des travaux virtuels et déterminer une équation permettant de déterminer α .

Question 50. Résoudre cette équation pour déterminer l'expression de α .

On considère que le terme α , quel que soit le résultat trouvé à la question précédente, s'écrit :

$$\alpha = \frac{p \cdot (a^4 b^4)}{64 \cdot D \cdot \pi^4 (a^4 + 2 \cdot a^2 b^2 + b^4)}$$

Rappel : la paroi est soumise à la pression de l'eau $P_{\max}$ à l'extérieur et à la pression atmosphérique à l'intérieur du carter. L'expression de $f_{\max}$ a été obtenue à la question 45.

Question 51. Déterminer la valeur de $h_{\min}$ telle que la déformation maximale de la plaque $f_{\max}$ soit égale à 3 mm (valeur maximale admissible).

3.3. Modélisation par Éléments Finis : plaque mince.

Une Modélisation par Éléments Finis a donné le résultat suivant pour une plaque en ABS, encastree sur sa périphérie, soumise à une pression uniformément répartie $p = 0,072$ MPa et d'épaisseur 3,5 mm :

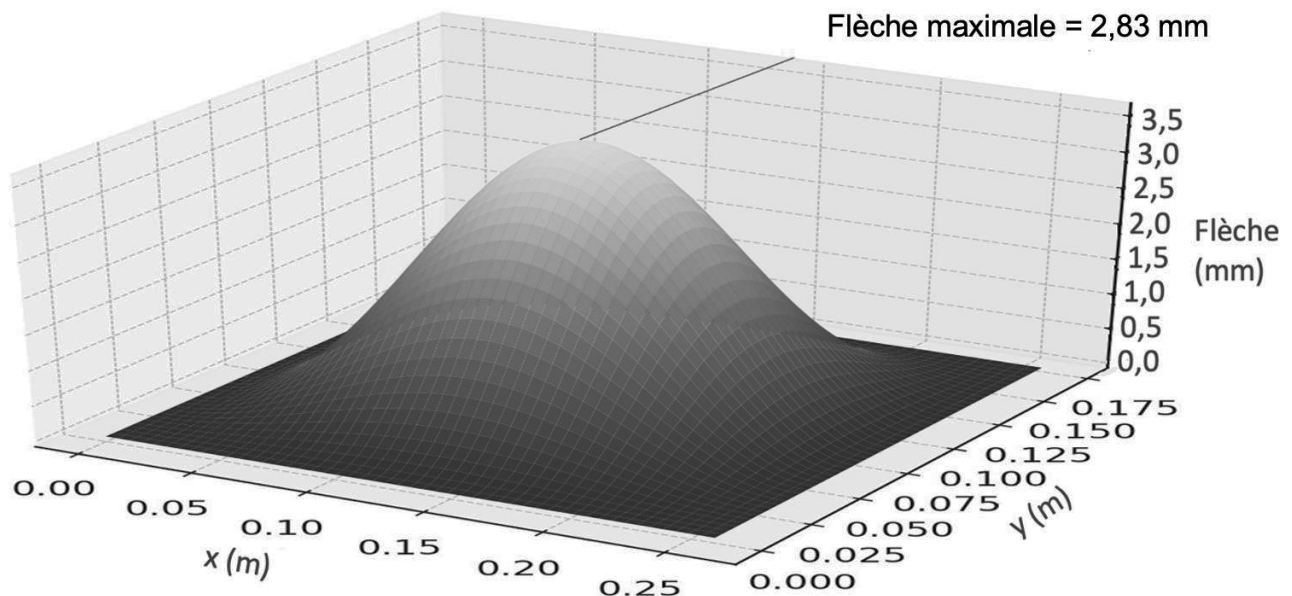


Figure 23 : modélisation éléments finis de la plaque étudiée

Question 52. Le résultat de cette simulation est-il cohérent par rapport au résultat trouvé à la question 50 ?

La contrainte maximale en flexion d'une plaque encastree est donnée annexe 4.

- Matériau : ABS ;
- Dimensions de la plaque : 260 mm × 174 mm ;
- Pression répartie extérieure : $p = 0,072$ MPa ;
- Les caractéristiques mécaniques de l'ABS sont données en annexe 5.

Question 53. Calculer la contrainte maximale $\sigma_{\max}$ pour une épaisseur de la plaque de 3,5 mm. Ce résultat est-il acceptable ?

Le modèle 3D du carter complet donne une surface totale de parois extérieures de 0,317 m². La masse volumique du matériau employé, l'ABS, est fournie en annexe 5. Le respect de la condition de masse maxi du robot impose une masse de carter inférieure à 1,4 kg.

Question 54. Calculer une valeur approchée du volume de matière du carter pour une épaisseur de la plaque de 3,5 mm. En déduire la masse du carter. Ce résultat est-il acceptable ?

3.4. Modélisation par Éléments Finis : carter complet.

La phase de prédimensionnement a permis de proposer une première valeur d'épaisseur du carter.

La modélisation Éléments Finis du carter permet la visualisation des contraintes (Figure 24 et Figure 25).

Question 55. Justifier la position des zones les plus fortement sollicitées.

Question 56. Conclure sur les choix effectués par le bureau d'études (matériaux, formes, dimensions...) en fonction du contexte d'exploitation du carter. Quelle adaptation peut être réalisée au niveau des zones fortement sollicitées.

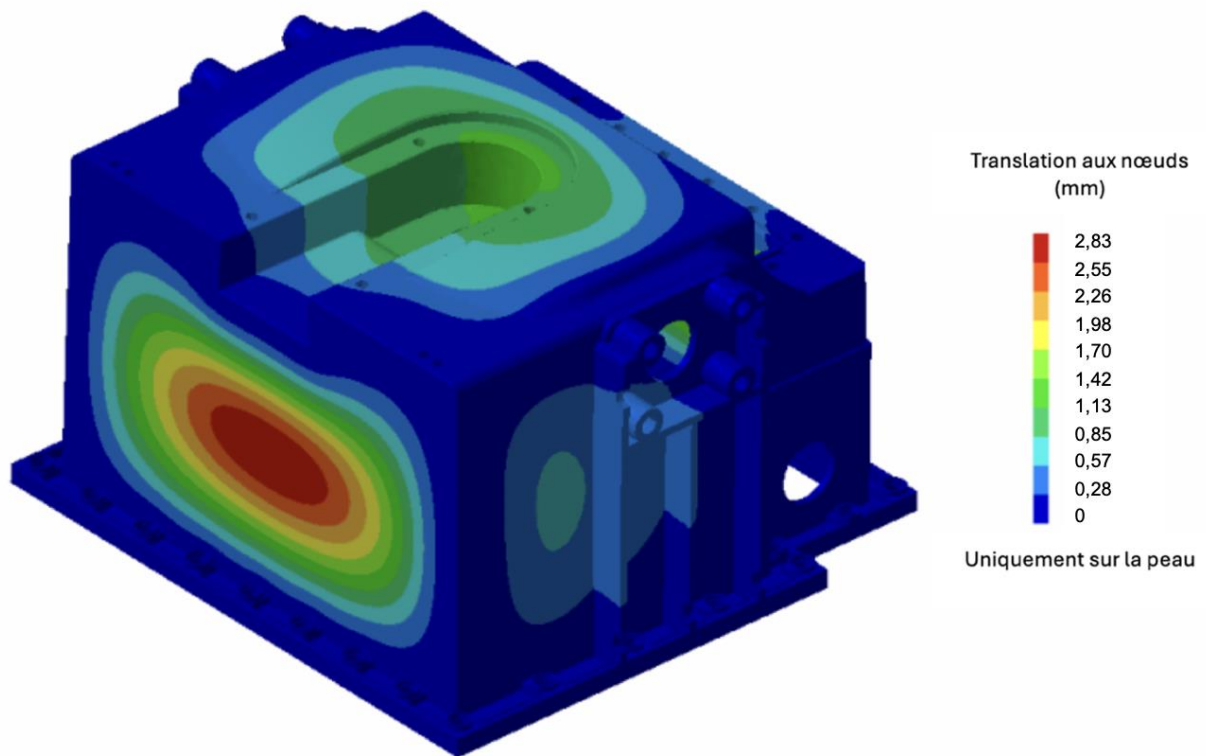


Figure 24 : modélisation Éléments Finis des déplacements aux nœuds du carter

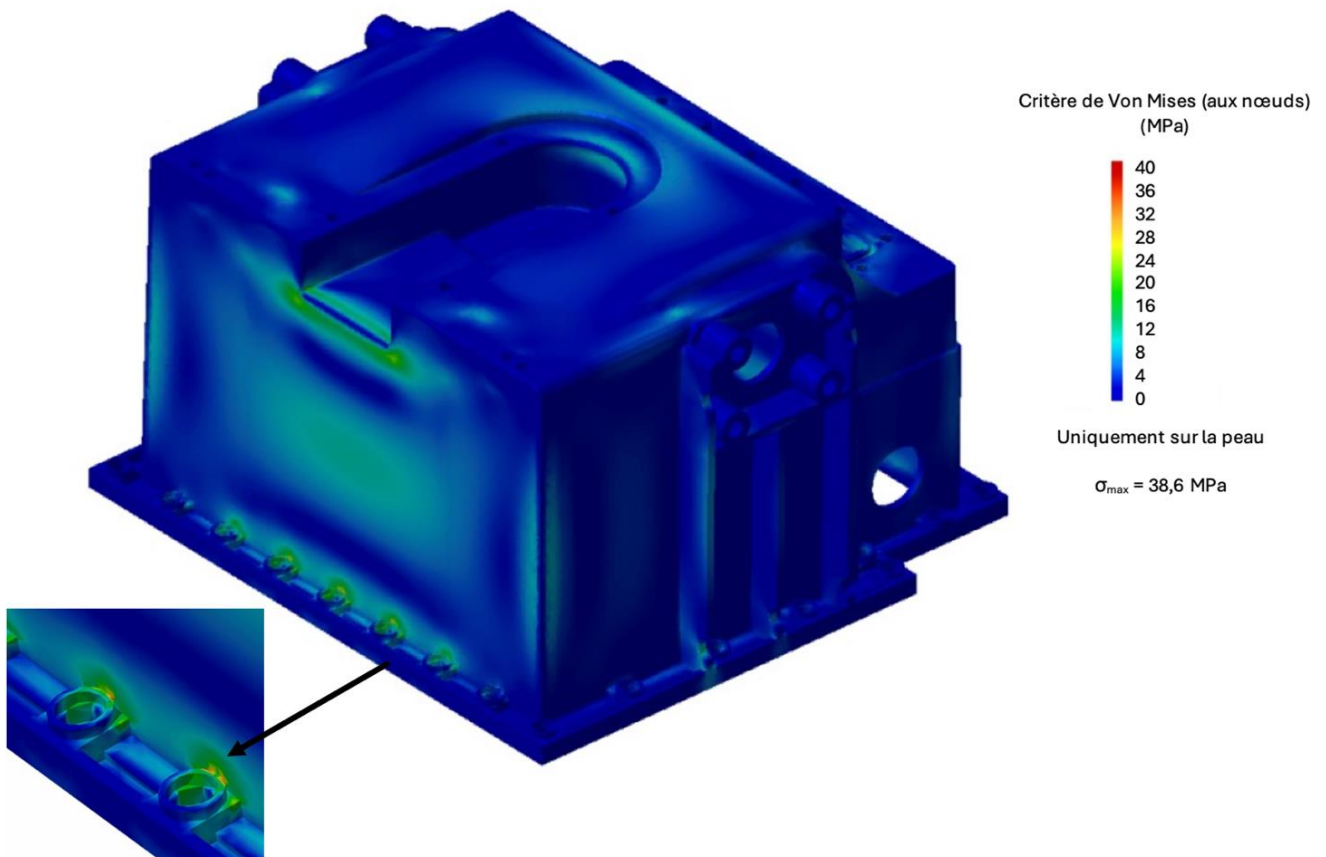
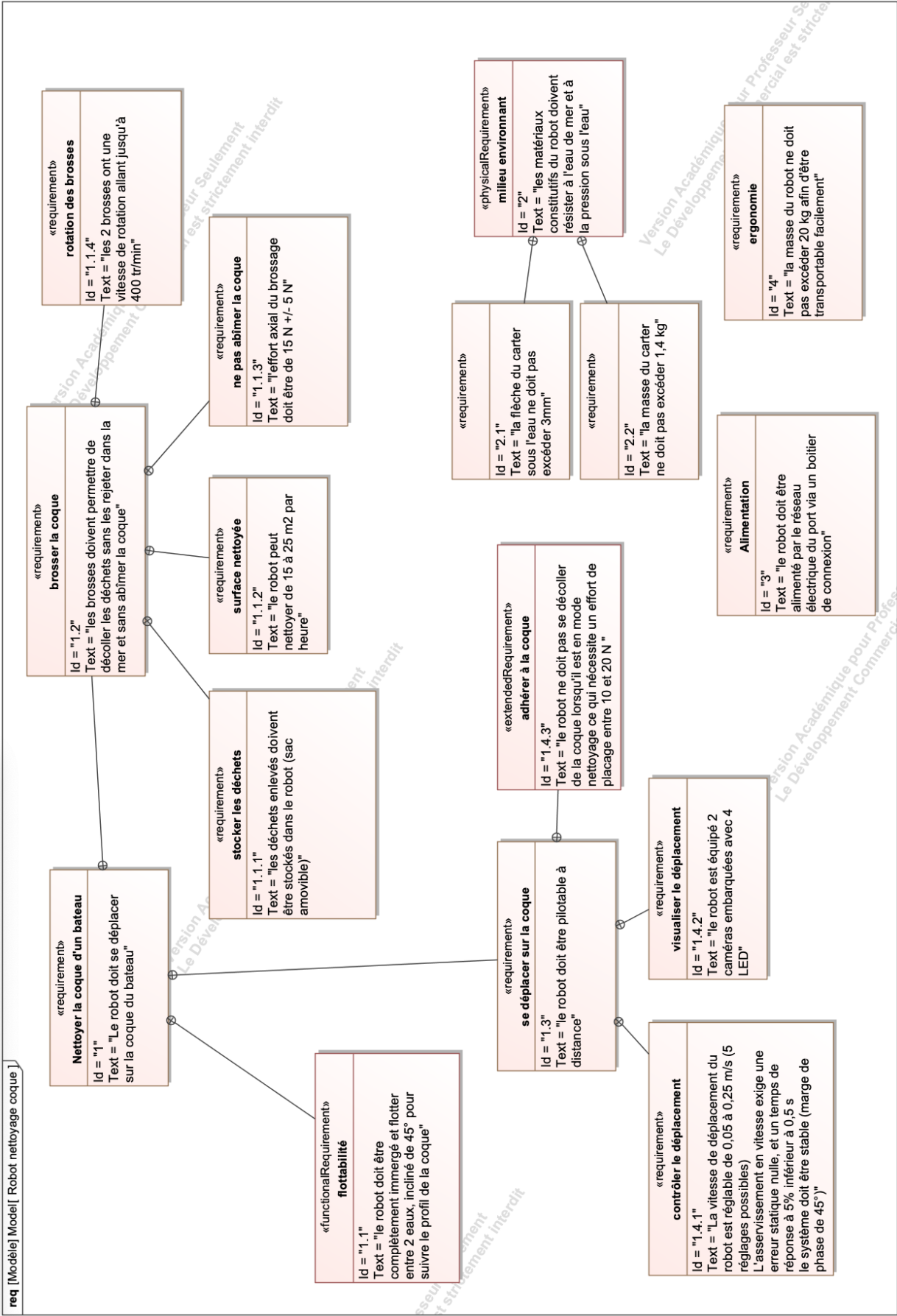
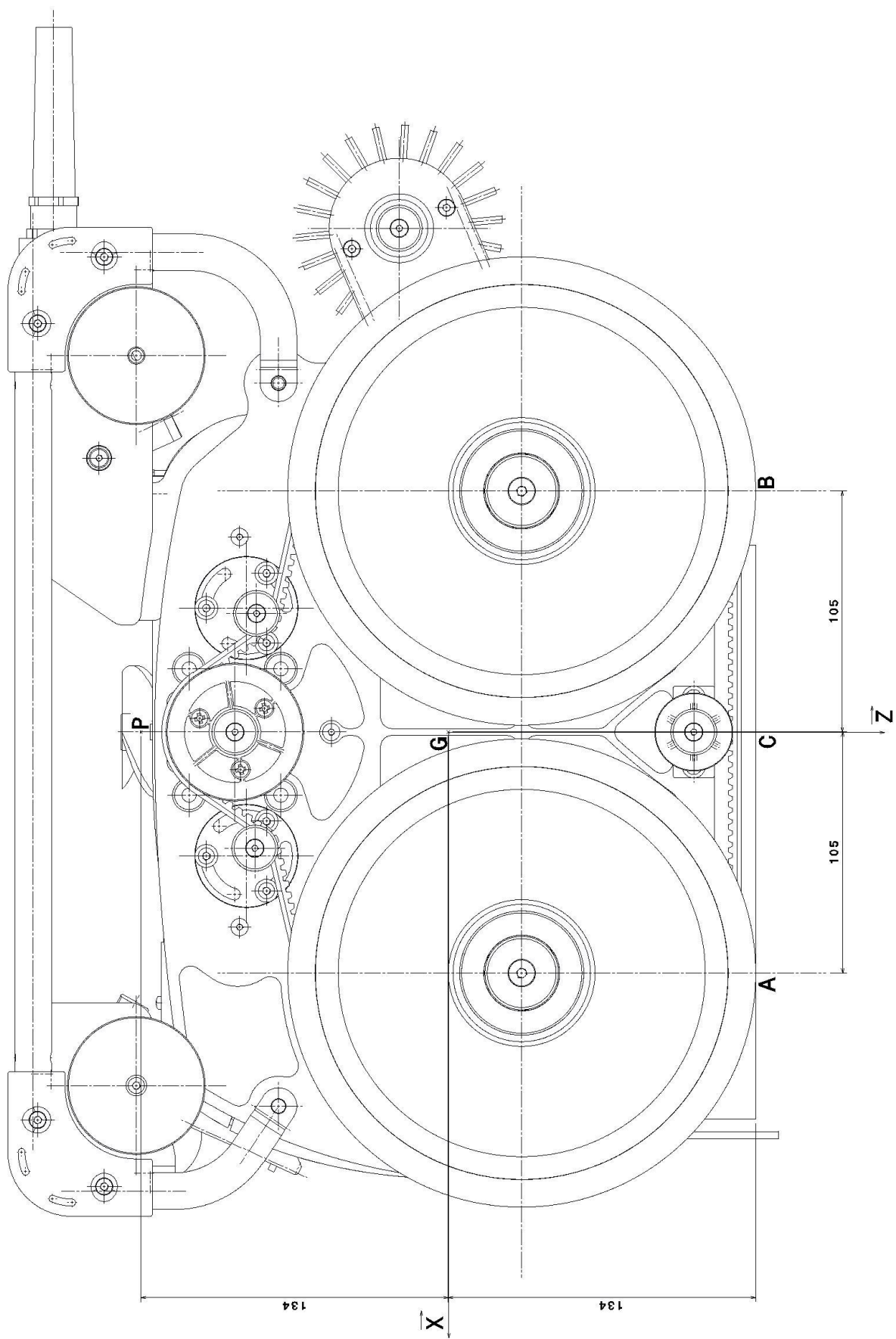


Figure 25 : modélisation Éléments Finis des contraintes aux nœuds du carter

Annexe 1 : diagramme partiel des exigences



Annexe 2 : caractéristiques géométriques du robot dans le plan ($G, \vec{x}, \vec{z}$)



Annexe 3 : caractéristiques normalisées des ressorts de compression

- Diamètres normalisés de fil à ressort de compression

Diamètres de fil en acier à ressort suivant norme EN 10 270-1											
0,20	0,25	0,28	0,32	0,40	0,45	0,50	0,56	0,63	0,70	0,80	0,90

Diamètres de fil en acier à ressort suivant norme EN 10 270-1												
1,00	1,10	1,25	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,50	2,80	3,20	4,00	5,00

- Module de torsion de l'acier à ressort suivant la norme EN 10 270-1 :

$$G = 81500 \text{ MPa}$$

- Calcul de la raideur R du ressort (en N/m) :

$$K = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n}$$

Avec G : module de torsion (MPa)
d : diamètre du fil (m)
D : diamètre d'enroulement (m)
n : nombre de spires

Annexe 4 : formule standard issue de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love

La contrainte maximale en flexion d'une plaque rectangulaire, encastree sur les quatre cotes et soumise à une pression p uniformément répartie, est donnée par :

$$\sigma_{\max} = \frac{k \cdot p \cdot a^4}{h^2}$$

k est un coefficient (en m^{-2}) dépendant du rapport a/b

a est la plus grande dimension de la plaque (en m)

h est l'épaisseur de la plaque (en m)

Table des valeurs de k en fonction du rapport a/b :

a/b	k
1.0	0.308
1.1	0.314
1.2	0.317
1.3	0.319
1.4	0.320
1.5	0.310
1.6	0.307
1.7	0.304
1.8	0.300
1.9	0.296
2.0	0.292

Annexe 5 : caractéristiques du matériau ABS

L'Acrylonitrile Butadiène Styrène, plus communément connu sous l'acronyme ABS, est l'un des polymères les plus populaires et largement utilisé dans l'industrie de la plasturgie. Ce copolymère thermoplastique est reconnu pour ses bonnes propriétés mécaniques, sa facilité de traitement et sa durabilité.

Caractéristiques mécaniques

Propriété	Valeur	Unité
Module d'Young (E)	2,2	GPa
Coefficient de Poisson (ν)	0,35	-
Densité (ρ)	1040	kg/m ³
Résistance à la traction	40	MPa
Résistance à la flexion	70	MPa
Résistance à la compression	60	MPa
Résilience (Charpy, entaillé)	10 à 15	kJ/m ²
Température de transition vitreuse (Tg)	105	°C