Epreuve de Sciences Industrielles A

Durée 5 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Composition du sujet :

- 1 cahier de 24 pages de texte numérotées de **1** à **24** ;
- 1 cahier réponse de 24 pages **à rendre à la fin de l'épreuve**.

Matériel autorisé : tous instruments usuels du dessinateur à l'exception de tous les modèles de règles à calcul.

TOUTE AUTRE DOCUMENTATION EST INTERDITE

Avertissement :

L'ensemble des réponses sera rédigé exclusivement sur le cahier réponse dans les espaces libres proposés pour chaque question.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

GEMINI : cellule hybride pour la fabrication de pièces XXL

1 Contexte général

La **fabrication additive, également connue sous le nom d'impression 3D**, a révolutionné la manière de concevoir et de produire des pièces. Les avancées technologiques de ce procédé ouvrent de nouvelles perspectives, que ce soit pour obtenir des structures complexes et légères, réduire les délais de prototypage ou minimiser les déchets de fabrication. Ce procédé est dit additif car la fabrication repose sur la superposition de fines couches de matière les unes après les autres. La technologie peut permettre de produire des formes complexes impossibles à obtenir avec les méthodes traditionnelles de moulage et d'usinage.

Il est maintenant possible de s'offrir pour quelques centaines d'euros une petite imprimante 3D ludique, qui fabrique de petites pièces en plastique à la maison. Mais la diversité des matériaux utilisé en fabrication additive (plastiques, résines, métaux, céramiques...) permet d'adresser une multitude d'applications dans des secteurs aussi variés que l'industrie automobile, la santé ou l'aérospatiale. Au départ restreinte à des pièces de dimensions modestes (quelques centimètres ou dizaines de centimètres), des cellules de fabrication additive capables de produire des pièces de très grande envergure (plusieurs mètres) ont vu le jour récemment.

La **société VLM robotics**, implantée en Gironde, est un des leaders du développement de l'industrie 4.0 grâce à l'introduction de la robotique agile. Elle propose une gamme très étendue de solutions robotisées, parmi lesquelles **GEMINI, une cellule bi-robots capable de produire des pièces métalliques de dimensions XXL** (5 mètres de hauteur et 2 mètres de diamètre) et de fort tonnage (jusqu'à 20 tonnes), comme le montre la **Figure 1**.

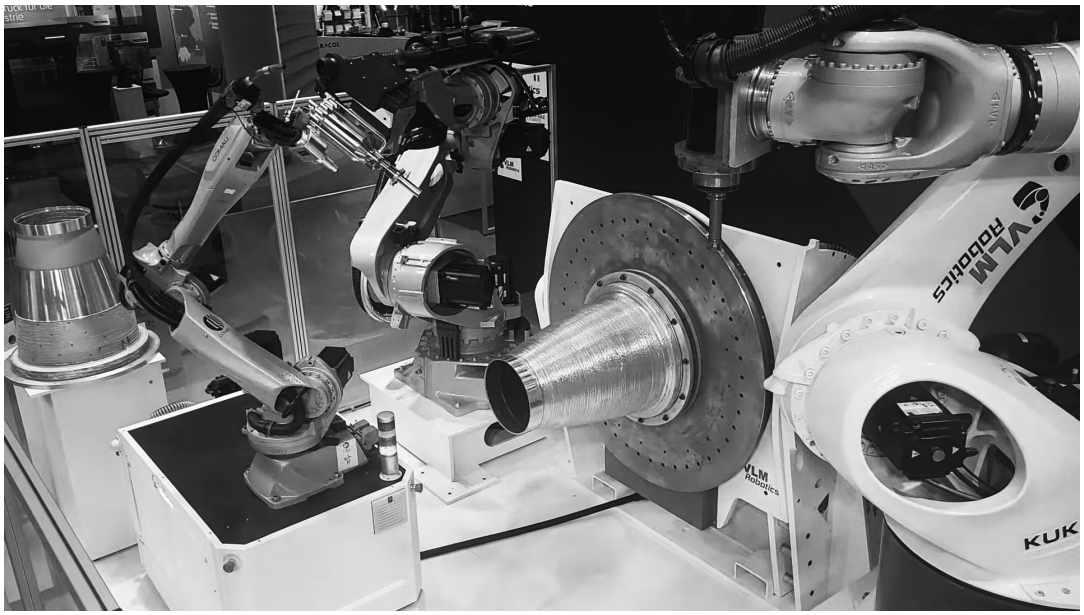


Figure 1 – Cellule bi-robots GEMINI pour la fabrication hybride additive-soustractive

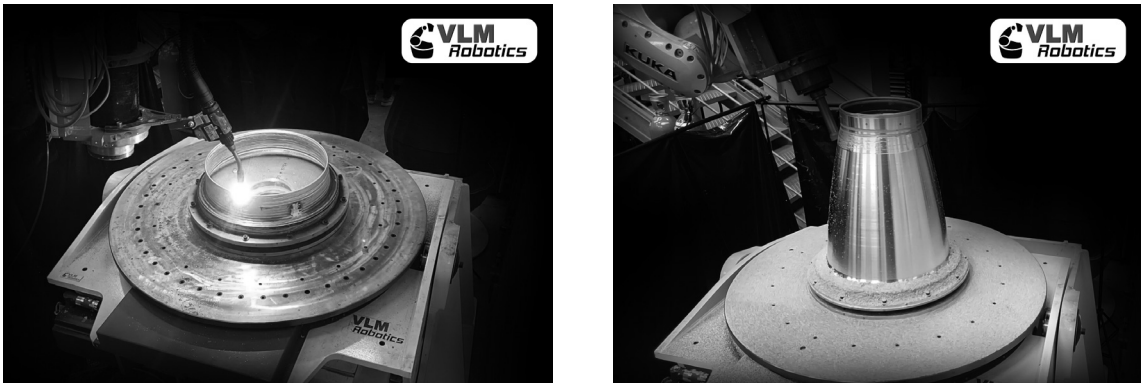


Figure 2 – Zoom sur deux phases de la fabrication de la pièce : à gauche, fabrication additive avec un des robots ; à droite, fabrication soustractive avec l'autre robot

Ce type de cellule révolutionne l'industrie car ce n'est plus la pièce qui est déplacée d'un procédé de fabrication à un autre, mais les unités opératives qui sont amenées au plus près de la pièce. En l'occurence, GEMINI est une cellule hybride puisque l'un des deux robots supporte une tête de fabrication additive et l'autre une machine d'usinage (fabrication soustractive pour finaliser les surfaces fonctionnelles par exemple), comme illustré sur la **Figure 2**. Durant son fonctionnement, le pilotage de l'ensemble est assuré en temps réel grâce à un jumeau numérique de la cellule et de la pièce qui est fabriquée, visible **Figure 3**.

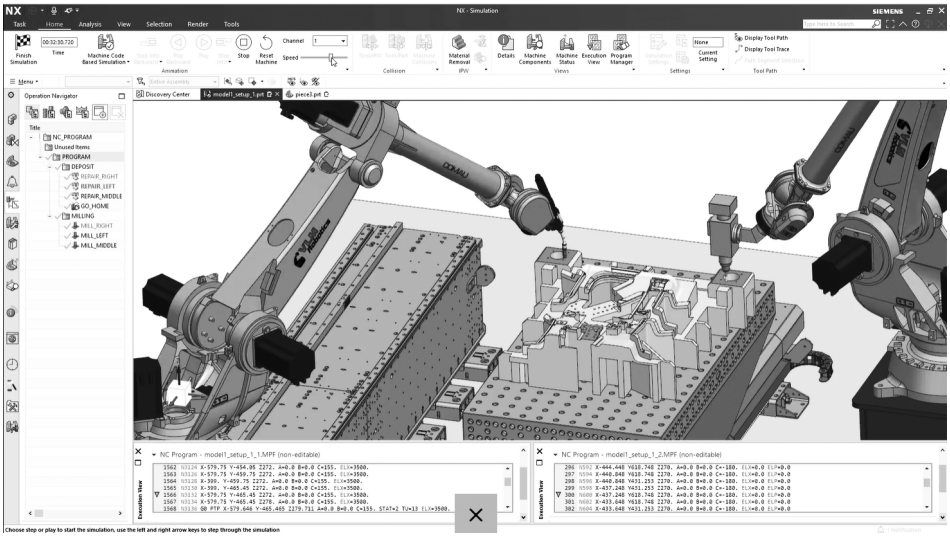


Figure 3 – Jumeau numérique de la cellule GEMINI durant la phase de fabrication d'une pièce (solution numérique NX de Siemens)

2 Des robots très forte charge

On ne s'intéressera ici ni à la **tête de fabrication additive**, qui permet d'amener le métal sous forme de fil ou de poudre et de le déposer en couches successives après l'avoir fait fondre par laser, ni au **système dit « vireur »** sur lequel repose les pièces en construction. Dans cette étude, on se concentrera sur **un des deux robots** de la **Figure 1** qui présentent déjà de nombreux challenges en termes de pilotage, de robustesse et de précision. Ce sont des robots très forte charge (**pouvant aller jusqu'à 400 kg**) à six axes développés pour les installations dites intelligentes nécessitant une très grande portée (**près de 3 mètres**). Ils font partie des robots dits « poids lourds » les plus puissants et les plus performants du marché, avec une répétabilité de positionnement en bout de bras **inférieure au dixième de millimètre**, ce qui est extrèmement précis vues les dimensions et actions mécaniques mises en jeu.

Tournez la page S.V.P.

3 Travail à réaliser dans le sujet

Les concepteurs du sujet remercient vivement la société VLM robotics pour sa disponibilité et les informations fournies, ainsi que la société REDEX. L'objectif de ce sujet est d'appréhender, de manière extrêmement simplifiée, quelques-unes des technologies utilisées dans ce type de robot. Les valeurs numériques seront introduites au fur et à mesure des besoins. Les figures, modélisations et valeurs numériques utilisées dans ce sujet ne sont que des illustrations du système réel et n'engagent en aucune façon VLM robotics et REDEX. Elles sont uniquement proposées par les concepteurs du sujet afin d'appréhender de manière plausible les grandes lignes du fonctionnement et d'étudier un certain nombre de problématiques.

Après une lecture préalable du sujet complet (durée indicative 15 min), vous serez amené à vous intéresser à trois parties indépendantes, elles-mêmes constituées de nombreuses questions qui peuvent être traitées séparément :

— la **Partie I** (durée conseillée 1h45) aborde l'étude des actions mécaniques dans les axes et le dimensionnement des moteurs ;

— la **Partie II** (durée conseillée 45 min) s'intéresse au réducteur d'un des axes et aux déformations éventuelles de celui-ci, ainsi qu'à l'influence sur le positionnement du bras ;

— la **Partie III** (durée conseillée 2h15 min) se concentre sur l'étude du contrôle du mouvement du poignet.

Applications numériques et notations

Applications numériques. — Dans le domaine des sciences industrielles, le fait de savoir calculer et analyser les valeurs des grandeurs utiles au dimensionnement est aussi important que celui de savoir déterminer leurs expressions littérales. C'est pourquoi, **une attention toute particulière sera accordée à la réalisation des applications numériques**.

Pour réaliser celles-ci sans l'usage d'une calculatrice, vous pourrez faire des approximations de bon sens, qui conduiront éventuellement à une erreur relative de quelques pourcents sur le résultat final. Par exemple, dans le calcul suivant, qui fait intervenir l'accélération de la pesanteur $g = 9,81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, on pourra prendre :

$$\frac{\pi^2}{2}\frac{100}{24}(5+3\ 10^{-2})g \approx \frac{10}{2}\times 4\times 5\times 10 = 1000\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Notations. — Pour simplifier les notations dans ce sujet, le référentiel correspondant à un repère $\mathcal{R}_i$ est lui aussi désigné par $\mathcal{R}_i$. Les torseurs cinématique, cinétique et dynamique du mouvement du solide **j** par rapport au solide **i** (ou par rapport au référentiel $\mathcal{R}_i$ lié à celui-ci), exprimés en A, sont notés respectivement :

$$\mathcal{V}(j/i) = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(j/i)\\ \vec{V}(A,j/i)\end{matrix}\right\}_A, \quad \mathcal{C}(j/i) = \left\{\begin{matrix}\vec{R}_c(j/i)\\ \vec{\sigma}(A,j/i)\end{matrix}\right\}_A \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(j/i) = \left\{\begin{matrix}\vec{R}_d(j/i)\\ \vec{\delta}(A,j/i)\end{matrix}\right\}_A$$

Le torseur des actions mécaniques exercées par le solide **i** sur le solide **j**, exprimé en A, est noté :

$$\mathcal{T}(i\to j) = \left\{\begin{matrix}\vec{F}(i\to j)\\ \vec{M}(A,i\to j)\end{matrix}\right\}_A$$

Les dérivées première et seconde d'une quantité $x(t)$ par rapport au temps pourront être notées indifféremment :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Enfin, on notera, lorsque cela est possible, une fonction dans le domaine temporel par une lettre minuscule (e.g. $i(t)$) et sa transformée de Laplace par une lettre majuscule (soit $I(p)$).

PARTIE

I Étude de la cinématique et des actions mécaniques dans le robot

Objectif. — Dans cette première partie, on étudie la cinématique d'un des robots, ainsi que les actions mécaniques induites dans les actionneurs. On s'intéresse notamment aux inerties qui, du fait des grandes dimensions du robot, peuvent engendrer des couples considérables. Le tableau suivant précise quelques-uns des critères et niveaux associés aux exigences.

Exigence	Critères d'appréciation	Niveau
Fournir la puissance nécessaire	• Masse maximale de l'unité opérative • Vitesse angulaire maximale des axes • Accélération angulaire maximale des axes	• 300 kg • 100 degré s^{-1} • 180 degré s^{-2}
Maintenir le robot bloqué en position fixe	• Masse maximale de l'unité opérative • Déploiement maximal du bras du robot	• 300 kg • 3 000 mm

I.1 — Modélisation simplifiée du robot

Le robot complet dispose d'une cinématique complexe dotée de 6 axes. Cependant, on propose ici une modélisation plane très simplifiée représentée par la **Figure 4**. Elle est constituée de l'embase, liée au sol, notée **0**, de l'épaule **1**, du bras **2** et d'un poignet **3**. C'est celui-ci qui est équipé d'une unité opérative **4** (une tête de fabrication additive dans notre cas, symbolisée par la boule noire sur la figure).

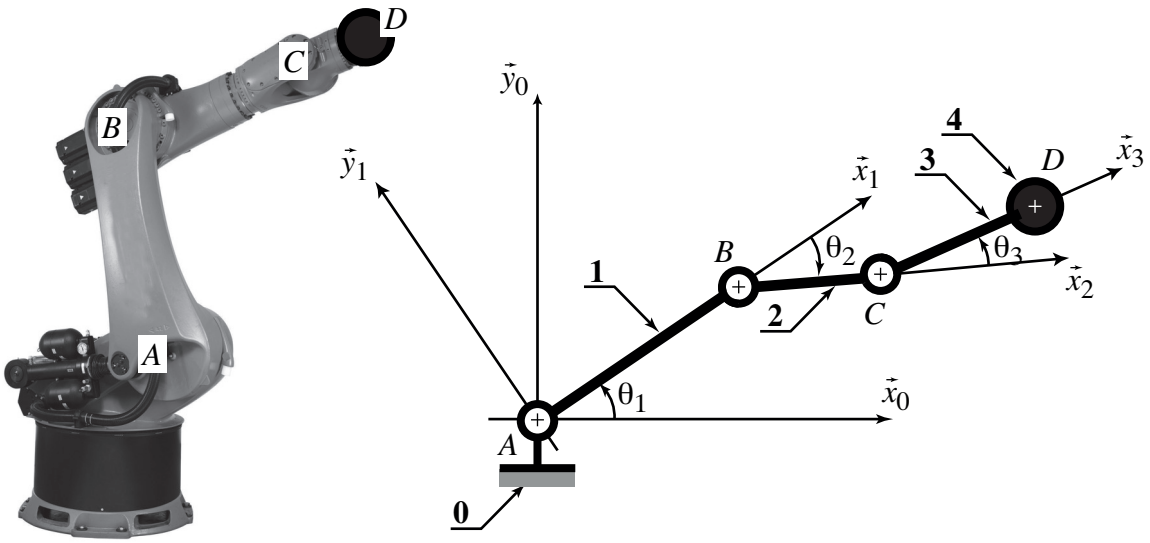


Figure 4 – Modélisation cinématique simplifiée du robot

On donne les **caractéristiques géométriques et cinématiques** suivantes :

Tournez la page S.V.P.

- L'embase et le sol, notés **0**, sont munis du repère $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le référentiel associé est supposé galiléen.
- L'épaule **1** est liée à l'embase **0** par une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$. Le repère lié $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ et on note $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$. La masse de l'épaule est notée m_1, son extrémité B est telle que $\overrightarrow{AB} = a\vec{x}_1$ et son centre de gravité G_1 est tel que $\overrightarrow{AG_1} = a/2\ \vec{x}_1$.
- Le bras **2** est lié à l'épaule **1** par une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_1)$. Le repère lié $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ et on note $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. La masse du bras est notée m_2, son extrémité C est telle que $\overrightarrow{BC} = b\vec{x}_2$ et son centre de gravité G_2 est tel que $\overrightarrow{BG_2} = b/2\ \vec{x}_2$.
- Le poignet **3** est lié au bras **2** par une liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_2)$. Le repère lié $\mathcal{R}_3 = (C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est tel que $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$ et on note $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$. La masse du poignet est notée m_3, son extrémité D est telle que $\overrightarrow{CD} = c\vec{x}_3$ et son centre de gravité G_3 est tel que $\overrightarrow{CG_3} = c/2\ \vec{x}_3$.
- L'unité opérative **4** est liée au poignet **3** par une liaison encastrement en D. Elle est modélisée par une masse ponctuelle m_4 au point G_4 coincidant avec D.
- Le système regroupant les quatres solides **1**, **2**, **3** et **4** est noté **E**.
- Dans les questions qui suivent, toutes les liaisons sont considérées parfaites. Les dimensions sont $a = 1\,500$ mm, $b = 1\,000$ mm et $c = 500$ mm. Du fait des masses très importantes des pièces ($m_1 = 600$ kg, $m_2 = 300$ kg, $m_3 = 100$ kg et une masse de l'unité opérative supposée dans ce cas $m_4 = 300$ kg), **les effets de la pesanteur ne seront pas négligés**. L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\ \vec{y}_0$ avec $g = 9,81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

Les trois liaisons pivots sont actionnées par des servomoteurs à courant alternatif. Ceux-ci sont chacun équipés d'un réducteur (étudié en détail dans la partie suivante) et d'un frein monodisque à aimants qui permet le freinage en cours de fonctionnement et le blocage lors de l'arrêt du servomoteur. La commande de ces servomoteurs, ainsi que le fonctionnement des freins monodisques et des réducteurs, seront étudiés dans la suite du sujet.

I.2 — Actions mécaniques à transmettre en statique

On s'intéresse dans un premier temps au couple que doit fournir $\mathbf{m}_A$, le servomoteur de l'axe A (rotation autour de $(A, \vec{z}_0)$), afin de maintenir le robot dans une position statique quelconque donnée, paramétrée par les angles θ_1, θ_2 et θ_3. On note $\vec{M}(A, m_A \to 1)$ le moment en A exercé par $\mathbf{m}_A$ sur l'épaule **1** et on s'intéresse donc au couple $C_A^{\text{stat}} = \vec{M}(A, m_A \to 1) \cdot \vec{z}_1$.

Question 1 Montrer que le couple C_A^{stat} peut s'écrire sous la forme $C_A^{\text{stat}} = g(\alpha \cos\theta_1 + \beta \cos(\theta_1 + \theta_2) + \gamma \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ où α, β et γ sont des constantes positives que l'on exprimera en fonction des masses et des paramètres géométriques.

Question 2 Déterminer l'expression de la valeur maximale $C_{A,\max}^{\text{stat}} = \max|C_A^{\text{stat}}|$ de ce couple et sa valeur numérique.

Le servomoteur $\mathbf{m}_A$ de la **Figure 5** est composé d'un moteur, d'un réducteur et d'un frein monodisque schématisé de manière très conceptuelle sur la **Figure 6**. Le rapport de réduction du réducteur est noté κ et défini comme le ratio entre la vitesse de sortie du motoréducteur et la vitesse de sortie du moteur.

Les contacts entre les deux jeux de garnitures et le disque ont lieu sous l'effet d'un effort axial F généré par un ensemble de n ressorts de compression. Les garnitures ont la forme d'une couronne de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e. Le contact est modélisé par la loi de Coulomb, avec un coefficient de frottement noté μ. Les n ressorts sont disposés sur un cercle de diamètre D.

En position repos, le frein est actionné par les n ressorts fournissant chacun un effort normal F_r. On suppose que la pression p qui en résulte au niveau du contact est uniforme. Le frein est débloqué de manière électromagnétique lors des phases de rotation.

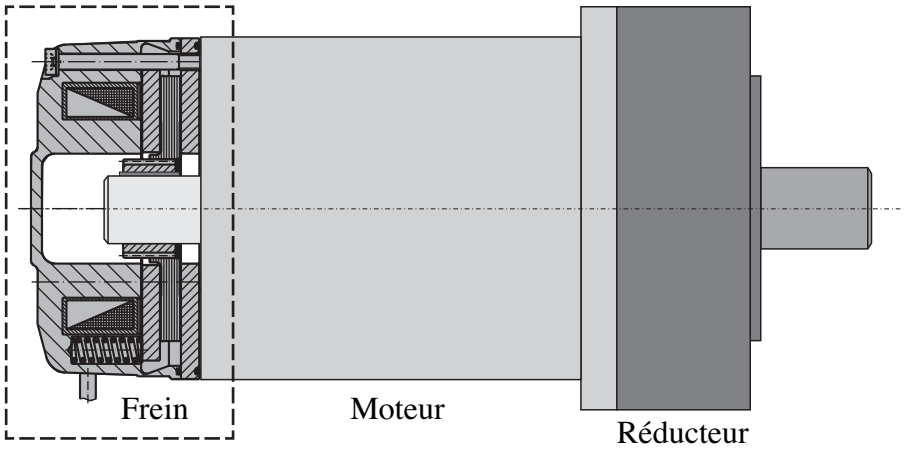


Figure 5 – Servomoteur composé d'un moteur, d'un réducteur et d'un frein électromagnétique

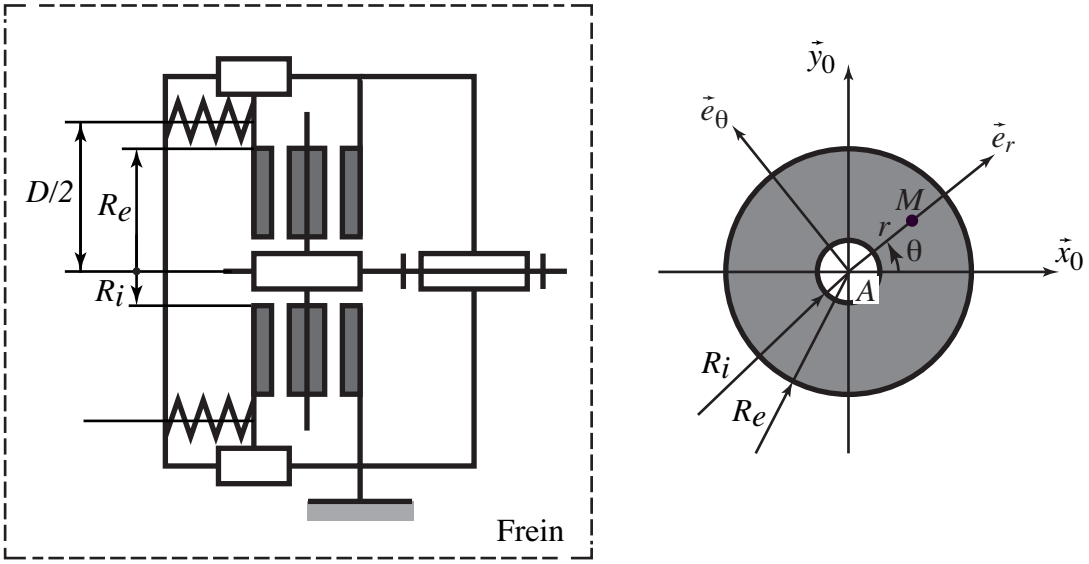


Figure 6 – Schématisation du frein électromagnétique monodisque

Question 3 Lorsque le frein est actionné, déterminer l'expression de la pression p en fonction du nombre de ressorts n, de l'effort normal F_r et des caractéristiques géométriques introduites précédemment.

Question 4 En vous appuyant sur le paramétrage de la **Figure 6** déterminer l'expression du couple de freinage C_f que peut transmettre ce frein en fonction du nombre de ressorts n, de l'effort normal F_r et des caractéristiques introduites précédemment.

On donne les valeurs numériques suivantes : $R_e = 150$ mm, $R_i = 50$ mm, $D = 400$ mm, $\mu = 0,4$ et $\kappa = 1/20$. Quelle que soit la valeur obtenue à la question précédente, on prendra $C^{\text{stat}}_{A,\max} = 20\,10^3$ Nm. Les ressorts de compression les plus raides disponibles chez le fournisseur peuvent transmettre chacun un effort normal maximal $F_r = 1000$ N pour un diamètre $d_r = 20$ mm.

Question 5 Calculer le nombre n de ressorts correspondant. On utilisera utilement le fait que $(150^3 - 50^3)/(150^2 - 50^2) \approx 162$. Conclure quant à la faisabilité d'une telle solution vis-à-vis de l'encombrement disponible dans le réducteur.

Question 6 Expliquer l'avantage d'avoir installé le frein directement sur l'arbre moteur et non en sortie du réducteur. Quelle difficulté cela peut-il engendrer par ailleurs ?

I.3 — Actions mécaniques à transmettre en dynamique

On s'intéresse maintenant aux effets dynamiques sur la valeur de ce couple et on se place dans le cas où le bras de la **Figure 4** est en mouvement avec les angles θ_2 et θ_3 qui restent nuls, ce qui correspond à un mouvement dans lequel le bras reste tendu. Le couple exercé par le servomoteur en dynamique est noté $C_A^{\text{dyn}} = \vec{M}(A, m_A \to 1) \cdot \vec{z}_1$ et on souhaite voir s'il est justifié de se contenter de dimensionner l'actionneur $\mathbf{m}_A$ en statique alors que les vitesses et les accélérations angulaires peuvent atteindre $\dot{\theta}_{1,\max} = 100$ degré s^{-1} et $\ddot{\theta}_{1,\max} = 180$ degré s^{-2}.

Question 7 Exprimer le couple C_A^{dyn} en fonction du couple en statique C_A^{stat} et du moment dynamique en A, $\vec{\delta}(A, E/0)$, de l'ensemble **E** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

En première approximation, on adopte la modélisation très simplifiée suivante :

— L'ensemble noté **B** des solides **1**, **2** et **3** est assimilé à un parallélépipède représenté sur la **Figure 7**. Il est constitué d'un matériau de masse volumique $\rho = 8\,000$ kg m^{-3} et a pour dimensions $L = a + b + c = 3\,000$ mm, $h = 300$ mm et une épaisseur $e = 200$ mm.

— L'unité opérative **4** est assimilée à une masse ponctuelle $m_4 = 300$ kg située en D.

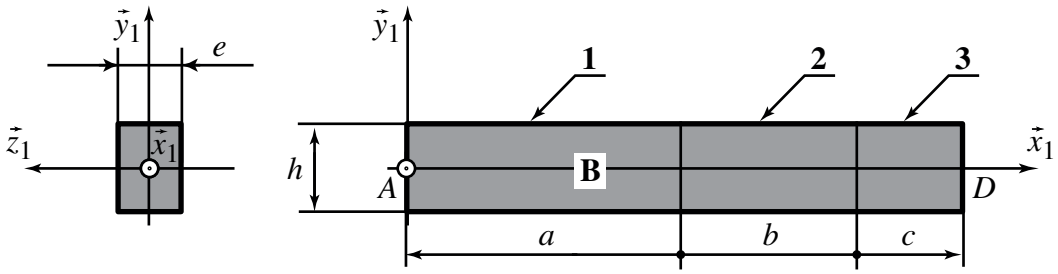


Figure 7 – Caractéristiques géométriques simplifiées du bras considéré comme un solide unique (sans l'unité opérative)

Le moment dynamique d'ensemble, qui peut s'écrire comme la somme des moments dynamiques des solides qui le composent, est donc égal à :

$$\vec{\delta}(A, E/0) = \sum_{i=1}^{4} \vec{\delta}(A, i/0) = \vec{\delta}(A, B/0) + \vec{\delta}(A, 4/0)$$

Question 8 Expliquer pourquoi l'opérateur d'inertie du bras **B** exprimé en A dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est de la forme :

$$\mathcal{I}(A, B) = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

De même, exprimer l'opérateur d'inertie $\mathcal{I}(A, 4)$ de l'unité opérative **4** exprimé en A dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et expliciter le terme non nul qui apparait à deux reprises, noté J, en fonction des caractéristiques introduites précédemment.

Question 9 Exprimer le moment cinétique en A, $\vec{\sigma}(A, E/0)$, puis le moment dynamique en A, $\vec{\delta}(A, E/0)$, de l'ensemble **E** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction des paramètres intertiels et géométriques du problème. En déduire l'expression du couple C_A^{dyn} que doit fournir le moteur en fonction du couple en statique C_A^{stat} et des paramètres intertiels et géométriques du problème.

On rappelle que $C_{A,\max}^{\text{stat}} = 20\,10^3$ Nm et que l'accélération angulaire maximale du bras **1** est $\ddot{\theta}_{1,\max} = 180$ degré s^{-2}. On donne également la valeur numérique $I_z = 1440$ kg m^2.

Question 10 Cacluler la valeur nunérique du moment d'inertie J, puis de $C_{A,\max}^{\text{dyn}}$ et commenter celle-ci par rapport à la valeur $C_{A,\max}^{\text{stat}}$ utilisée précédemment pour dimensionner le frein du servomoteur.

I.4 — Détermination d'une des équations du mouvement

Après avoir eu un aperçu des ordres de grandeur des couples mis en jeu, on s'intéresse, en vue du pilotage du robot, aux équations du mouvement qui régissent l'évolution de sa position. À titre d'exemple, on étudie une configuration particulière où $\theta_1 = \theta_2 = 0$ et où le seul mouvement est celui de l'ensemble noté **U** constitué du poignet **3** et de l'unité opérative **4**. Ce mouvement est paramétré par le seul angle θ_3. De la même manière que pour le servomoteur $\mathbf{m}_A$ de l'axe A (rotation autour de $(A, \vec{z}_0)$), on introduit le servomoteur $\mathbf{m}_C$ pilotant l'axe C (rotation autour de $(C, \vec{z}_0)$ de **3** par rapport à **2**). On note $\vec{M}(C, m_C \to 3)$ le moment en C exercé par $\mathbf{m}_C$ sur le poignet **3** et $C_C^{\text{dyn}} = \vec{M}(C, m_C \to 3) \cdot \vec{z}_3$.

Pour déterminer l'équation du mouvement correspondant, on utilise le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble **U** dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen associé à $\mathcal{R}_0$. Pour répondre aux questions suivantes, le ou la condidat(e) est invité(e) à se reporter aux notations introduites dans l'introduction pour ce qui est des torseurs cinématiques, cinétiques et dynamiques et au paramétrage du début de la partie.

Question 11 Que vaut $\mathcal{P}(U \leftrightarrow U)$ la puissance des inter-efforts dans le système ? Déterminer $\mathcal{P}(\bar{U} \to U/0)$ la puissance des efforts extérieurs agissant sur celui-ci.

Question 12 En négligeant l'inertie en rotation autour de $(C, \vec{z}_0)$ du poignet **3** devant celle de l'unité opérative **4** (toujours assimilée à un point matériel en D), exprimer $T(U/0)$ l'énergie cinétique du système **U** dans son mouvement par rapport $\mathcal{R}_0$.

Question 13 Rappeler le théorème de l'énergie cinétique et, à l'aide des résultats précédents, en déduire une équation du mouvement qui lie les paramètres du mouvement et l'action du servomoteur.

Par la suite, on pourrait déterminer l'ensemble des équations du mouvement qui régissent le comportement dynamique du système **E**, mais on va plutôt se concentrer ici sur la résolution numérique de l'équation du mouvement précédente.

I.5 — Résolution numérique d'une équation du mouvement

Quelle que soit la réponse obtenue précédemment, on suppose cette équation écrite sous la forme :

$$\ddot{\theta}_3 + \omega_c^2 \cos\theta_3 = k_c C(t)$$

où ω_c et k_c sont des constantes supposées connues et $C(t)$ est l'évolution du couple au cours du temps ($C(t) = C_C^{\text{dyn}}(t)$). Cette évolution du couple est représentée sur la **Figure 8** où les caractéristiques t_0, t_1, t_2, t_f et $C_{\max}$ sont données. On suppose les conditions initiales : $\theta_3 = 0$ et $\dot{\theta}_3 = 0$ à $t = 0$.

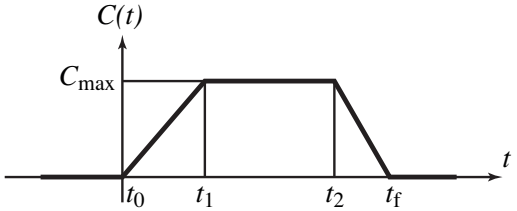


Figure 8 – Évolution du couple $C(t)$ au cours du temps

Pour résoudre l'équation précédente, on utilise la méthode d'Euler explicite associée à la variable $Y = [\theta_3, \dot{\theta}_3]^T$, ce qui revient à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_3(t) \\ \ddot{\theta}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3(t) \\ k_c C(t) - \omega_c^2 \cos\theta_3(t) \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{Y}(t) = F(Y(t), t)$$

Question 14 Compléter les lignes de code de la fonction `C(t)` qui prend en argument une variable `t` représentant le temps et renvoie la valeur de $C(t)$.

Question 15 Compléter les lignes de code de la fonction `euler(F,Y0,T)` permettant de « résoudre $\dot{Y}(t) = F(Y,t)$ avec $Y(0) = Y_0$ ». Cette fonction prend en arguments une fonction `F`, un vecteur `Y0` correspondant à l'état initial et une liste croissante d'instants `T`. Elle doit renvoyer un tableau `Y` dont la i-ème ligne correspond à l'état du système à l'instant t_i, c'est-à-dire $Y_i = Y(t_i)$.

Question 16 Compléter les lignes de code de la fonction `F(Y,T)` correspondant spécifiquement à l'équation à résoudre ici et définie en fonction de `Y`, `wc`, `kc` et `C` (associées respectivement à $Y(t)$, ω_c, k_c et $C(t)$).

PARTIE II

Étude d'un des réducteurs

Objectif. — Dans cette deuxième partie, on étudie un des réducteurs dont sont équipés les servomoteurs. On s'intéresse notamment aux déformations internes qui, du fait des grandes dimensions du robot, peuvent causer des défauts de positionnement. Le tableau suivant précise quelques-uns des critères et niveaux associés aux exigences.

Exigence	Critères d'appréciation	Niveau
Assurer le positionnement de l'unité opérative	• Masse maximale de l'unité opérative • Déploiement maximal du bras du robot • Précision en bout de bras du robot	• 300 kg • 3 000 mm • $\leqslant 0,1$ mm

II.1 — Influence des défauts angulaires

Le robot est capable d'une répétabilité de positionnement extrêmement grande malgré ses dimensions et les actions mécaniques mises en jeu : $\pm\varepsilon$ avec $\varepsilon = 0,1$ mm en bout de bras. Or, si on revient à la schématisation de la **Figure 4**, on voit qu'une petite erreur sur un des angles des axes A, B, C peut se traduire par une erreur importante de positionnement du point D. À titre d'exemple, la **Figure 9** montre le robot dans deux positions particulières. On rappelle que $\overrightarrow{AB} = a\vec{x}_1$, $\overrightarrow{BC} = b\vec{x}_2$ et $\overrightarrow{CD} = c\vec{x}_3$ avec $a = 1\,500$ mm, $b = 1\,000$ mm et $c = 500$ mm. On s'intéresse à la position de droite, correspondant idéalement à des angles $\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = -90°$ et $\theta_3 = -90°$.

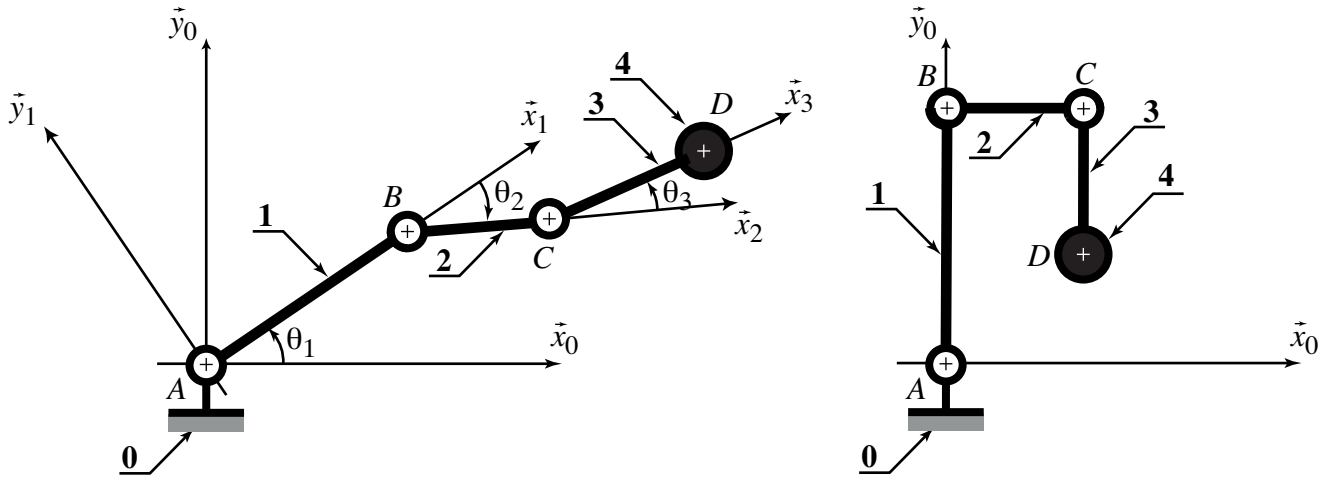


Figure 9 – Modélisation cinématique simplifiée du robot dans deux positions particulières

On suppose un défaut angulaire $\Delta\theta_i$ sur chacun des angles θ_i, de telle sorte que celui-ci devient $\theta_i + \Delta\theta_i$, et on s'intéresse à l'effet de ces défauts sur le positionnement du point D dans la configuration de droite.

Question 17 Exprimer $x_D = \overrightarrow{AD} \cdot \vec{x}_0$ la position du point D dans une position quelconque définie par les paramètres géométriques θ_1, θ_2 et θ_3, puis particulariser ce résultat pour la position d'intérêt $\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = -90°$ et $\theta_3 = -90°$.

Question 18 Calculer $x_D + \Delta x_D = \overrightarrow{AD} \cdot \vec{x}_0$ pour le cas où un défaut angulaire $\Delta\theta_i$ existe sur chacun des angles θ_i puis particulariser ce résultat pour la position d'intérêt $\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = -90°$ et $\theta_3 = -90°$. En supposant les défauts suffisamment petits ($\Delta\theta_i \ll 1$) pour linéariser le résultat au premier ordre, calculer Δx_D, l'erreur de position horizontale du point D, en fonction des défauts angulaires.

On rappelle que la précision de positionnement annoncée par le constructeur est $\pm\varepsilon$ avec $\varepsilon = 0,1$ mm. Pour fixer les idées et donner un ordre de grandeur des défauts angulaires maximaux admissibles, on s'intéresse au cas où le défaut Δx_D est positif ($\Delta x_D > 0$) et on suppose tous les défauts identiques en valeur absolue $|\Delta\theta_i| = \Delta\theta > 0$. On pourra par exemple poser $\Delta\theta_i = \xi_i \Delta\theta$ avec $\xi_i = \pm 1$ pour déterminer quelle combinaison de signes conduit au défaut de positionnement maximal.

Question 19 Calculer la valeur du défaut angulaire maximum $\Delta\theta_{\max}$ en radians puis en degrés.

Dans les questions qui suivent, on s'intéresse aux déformations des dentures dans les réducteurs des servomoteurs afin de voir si elles permettent d'assurer une telle précision.

II.2 — Schématisation du réducteur

On reprend le servomoteur $\mathbf{m}_A$ de la **Figure 6**, dont on avait déjà étudié le système de frein. Le réducteur associé est supposé épicycloïdal et est représenté sur la **Figure 10** où, pour simplifier, on a considéré un seul des satellites.

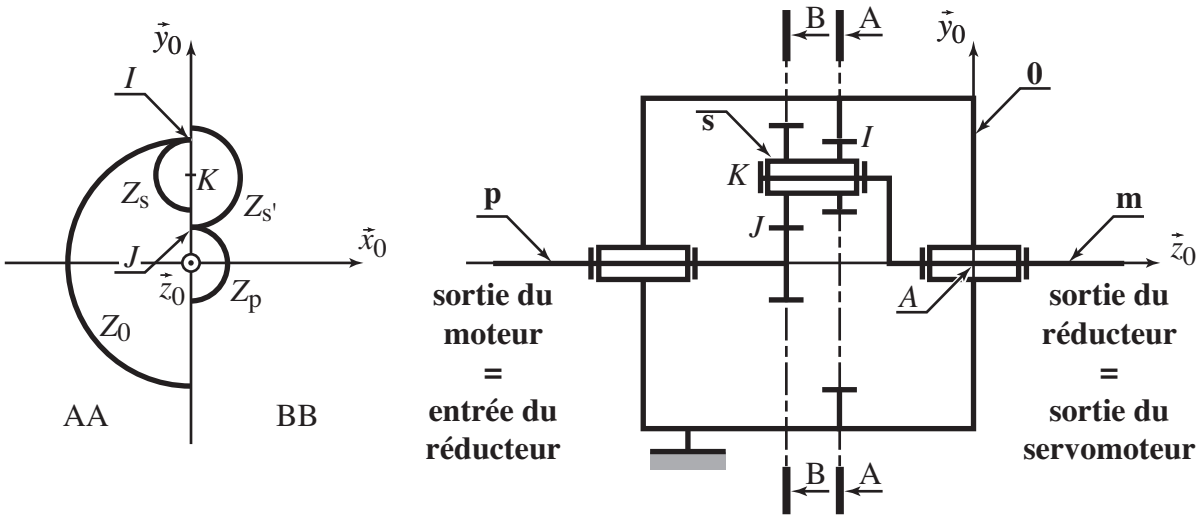


Figure 10 – Schéma de principe d'un réducteur épicycloïdal équipant le servomoteur d'axe A

L'arbre de sortie du moteur, noté **p**, constitue le planétaire. L'arbre de sortie du réducteur (et donc du servomoteur), noté **m**, constitue le porte-satellites. Ces deux pièces sont liées par une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ à la couronne **0** (en encastrement avec le stator du moteur et le bâti) qui comporte $Z_0 = 200$ dents. Le double satellite **s** comporte $Z_s = 30$ et $Z_{s'} = 60$ dents. Le planétaire **p** comporte un pignon à $Z_p = 20$ dents. On suppose que les deux engrènements $\mathbf{0} - \mathbf{s}$ et $\mathbf{s} - \mathbf{p}$ ont lieu avec roulement sans glissement aux points notés I et J. Si besoin, on pourra introduire le module noté m des dentures. On se place en régime permanent et on suppose toutes les liaisons parfaites. On note ω_{ij} la vitesse de rotation autour d'axes parallèles à l'axe $\vec{z}_0$ du solide **i** par rapport au solide **j**. On note C_{ji} le couple exercé autour de $(A, \vec{z}_0)$ par le solide **j** sur le solide **i**.

Question 20 Par la méthode de votre choix, calculer le rapport de réduction $\kappa = \omega_{m0}/\omega_{p0}$ en fonction du nombre de dents des différents pignons, puis calculer sa valeur numérique.

On s'intéresse aux déformations de la denture de l'engrenage $\mathbf{s} - \mathbf{p}$ afin d'étudier si elles peuvent se traduire par un manque de précision du positionnement global (pour simplifier, on suppose que les déformations des

autres dentures sont négligeables). Quels que soient les résultats obtenu précédemment, on prendra comme valeur du défaut angulaire admissible en sortie du servomoteur $\Delta\theta_{\max} = 5\,10^{-5}$ rad $\approx 3\ 10^{-3}\,^\circ$, comme valeur du couple de sortie du servomoteur $|C_A^{\text{dyn}}| = 30\,10^3$ N m et comme valeur du rapport de réduction $\kappa = 1/20$.

Question 21 Déterminer analytiquement, puis numériquement, $\Delta\theta_{p,\max}$ le défaut angulaire maximal admissible au niveau du pignon **p**, ainsi que $C_{p,\max}$ le couple maximal qu'il doit transmettre.

L'engrenage **s** − **p** est supposé à denture droite de module $m_0 = 5$ mm, d'angle de pression 20°, de largeur $\ell = 10$ mm. La hauteur des dents d'un tel engrenage est $h = 2,25 m_0$ et l'épaisseur au niveau du diamètre primitif $e = \pi m_0/2$. Lorsque deux dents engrènent, on suppose que le cas le plus défavorable en terme de déformation est celui où le chargement est appliqué au sommet de la denture d'un des pignon (qui va donc se déformer en flexion) et au pied de la denture de l'autre (dont on négligera la déformation).

La **Figure 11** propose un modèle d'une des dents du pignon **p** qui permet d'avoir un ordre de grandeur de la déformation en assimilant la dent qui se déforme à une poutre encastrée de module d'Young $E = 200$ GPa, de hauteur h, de section rectangulaire $e \times \ell$, soumise à son autre extrémité à l'action d'un effort de cisaillement T.

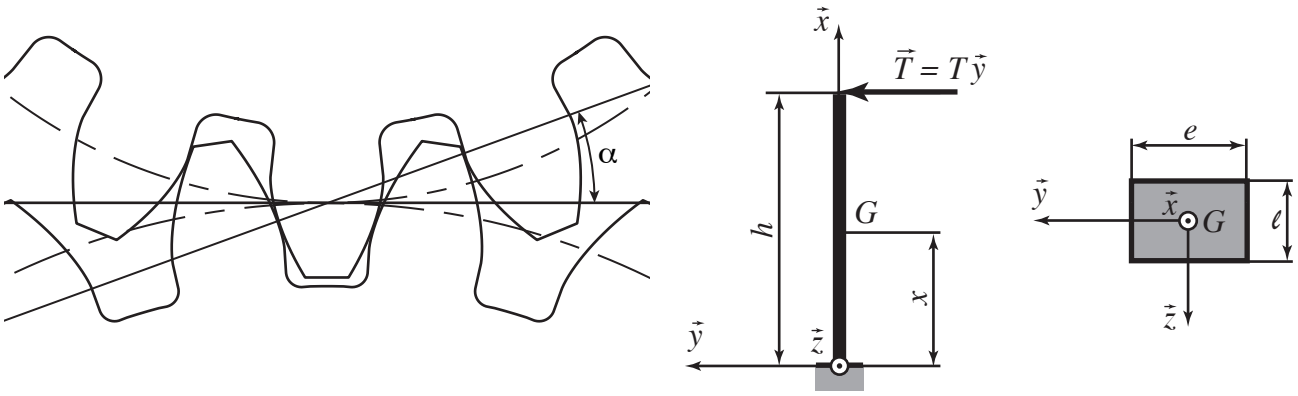


Figure 11 – Modélisation simplifiée d'une dent du pignon **p**

Question 22 Par la méthode de votre choix, déterminer l'expression de la flèche δ_p en bout de poutre en fonction de l'effort T, des caractéristiques géométriques et de celles du matériau. Calculer la valeur numérique de cette flèche à partir des données et des réponses aux questions précédentes.

Question 23 À partir de cette flèche δ_p au niveau du pignon **p**, exprimer le défaut angulaire $\Delta\theta_p$ et le comparer à la valeur $\Delta\theta_{p,\max}$ admissible. Conclure.

VLM robotics travaille actuellement avec la société REDEX pour concevoir une solution novatrice qui permettra de pallier cette difficulté technique et de répondre à la problématique de solution hybride de manufacturing en ce qui concerne les performances en matière de précision et de rigidité des robots.

PARTIE III

Étude et définition du contrôle du mouvement de l'outil

Objectif. — On s'intéresse dans cette partie au mouvement de rotation du poignet **3** autour de l'axe $(C, \vec{z}_3)$ (**Figure 9**). L'objectif est ici de déterminer un modèle de comportement de la chaîne de transmission de puissance de ce mouvement de rotation et de déterminer les correcteurs nécessaires à son contrôle au cours du temps. Le tableau suivant précise les critères et niveaux associés.

Exigence	Critères d'appréciation	Niveau
Contrôler le mouvement de rotation du poignet	• Erreur statique pour une entrée en échelon • Erreur statique de trainage pour une entrée en rampe • Temps de réponse à 5 % : $Tr_{5\%}$ • Marge de phase • Marge de gain • Pulsation à 0 dB de la FTBO	• nulle • nulle • $\leqslant 0,03$ s • $\geqslant 60°$ • $\geqslant 15$ dB • $\geqslant 100$ rad/s

III.1 — Présentation de la structure du système de contrôle du mouvement de l'outil

Comme le montre la **Figure 12**, le système complet de contrôle du mouvement du poignet comprend 2 parties : une partie analogique et une partie numérique.

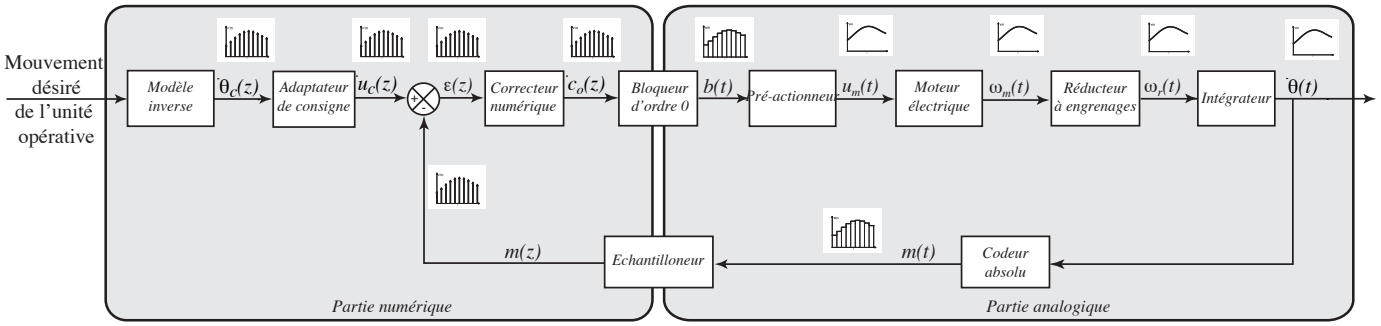


Figure 12 – Structure de la boucle d'asservissement

La partie analogique comprend :

— un préactionneur ;

— un moteur électrique à courant continu ;

— un réducteur de rapport de réduction κ ;

— un codeur absolu qui permet de mesurer la position angulaire de l'outil par rapport au poignet.

L'autre partie de la boucle d'asservissement est numérique et le signal de mesure $m(t)$ en sortie du codeur absolu est échantillonné à la période T_e. La consigne $\theta_3(t)$ est définie par un calcul inverse réalisé par un programme informatique prenant en compte le mouvement désiré en bout de bras et la configuration géométrique à chaque instant du robot. Le traitement de ces deux signaux (comparateur et correcteur) est réalisé sous forme

échantillonnée. On suppose que le temps de calcul du traitement numérique des signaux est bien inférieur à la période d'échantillonnage T_e. La génération de la tension de commande du moteur est réalisée par un bloqueur d'ordre 0 dont la valeur est mise à jour à chaque pas de temps, et qui bloque sa sortie à cette valeur constante durant la période d'échantillonnage.

III.2 — Étude du bloqueur

Le bloqueur utilisé est un bloqueur d'ordre 0. Il permet de transformer un signal numérique discret en un signal continu par morceaux. La valeur du signal en sortie du bloqueur est maintenue constante sur la période d'échantillonnage T_e. Le signal en sortie du bloqueur est représenté sur la **Figure 13** et s'écrit :

$$b(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^*(kT_e)C_r(t - kT_e)$$

où $C_r(t - kT_e)$ est un créneau de largeur T_e et de hauteur 1, retardé de kT_e par rapport au créneau initial représenté sur la **Figure 14**.

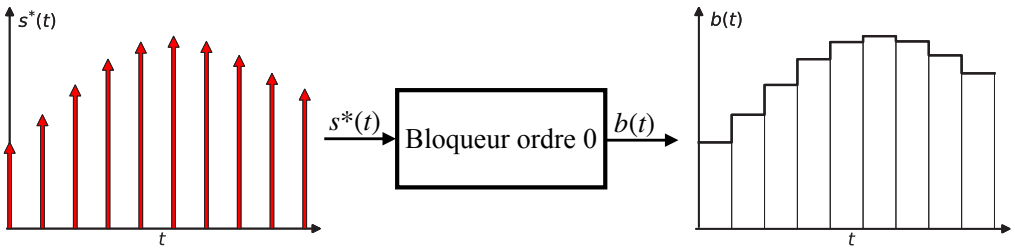


Figure 13 – Comportement du bloqueur d'ordre 0

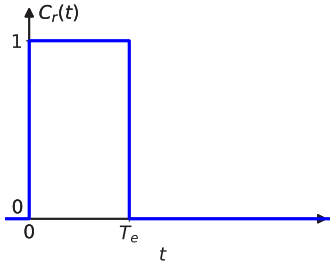


Figure 14 – Créneau initial commençant à l'instant $t = 0$

Question 24 Donner l'expression temporelle du créneau unitaire initial $C_r(t)$ de largeur T_e en fonction de la fonction échelon notée $u(t)$. Donner alors l'expression temporelle du créneau unitaire retardé $C_r(t - kT_e)$ de largeur T_e en fonction de la fonction échelon notée $u(t)$.

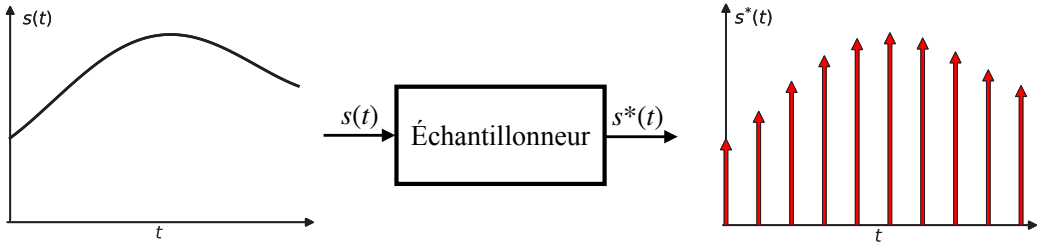


Figure 15 – Principe d'échantillonnage

On rappelle que le processus d'échantillonnage d'un signal peut être représenté par un interrupteur se fermant périodiquement (à la période d'échantillonnage T_e) durant un temps infiniment court (**Figure 15**). On

admet que la modélisation mathématique adaptée au signal échantillonné est une distribution $s^*(t)$ issue du produit du signal $s(t)$ par un peigne de Dirac (succession équi-répartie d'impulsions de Dirac, comme représenté sur la **Figure 16**) :

$$s^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e)T_e\delta(t-kT_e) = s(t)T_e\sum_{k=0}^{+\infty}\delta(t-kT_e) = s(t)T_eP_\delta(t)$$

où :

— le signal $s(t)$ est continu en fonction du temps ;

— $\delta(t-kT_e)$ est l'impulsion de Dirac retardée du temps kT_e ;

— $P_\delta(t)$ est un « peigne de Dirac ».

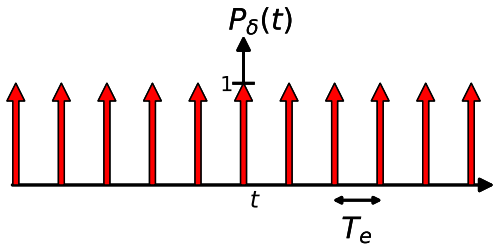


Figure 16 – Peigne de Dirac

Dans la suite de cette partie, on notera $s_k = s(kT_e)$ la valeur du signal au temps $t_k = kT_e$. La transformée de Laplace du signal en sortie du bloqueur peut alors s'écrire :

$$\mathcal{L}(b(t)) = \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} s_k C_r(t-t_k)\right)$$

Question 25 À partir de l'expression de $s^*(t)$ $\left(s^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k T_e\delta(t-t_k)\right)$, déterminer l'expression de la transformée de Laplace de la fonction $s^*(t)$: $\mathcal{L}(s^*(t))$.

Question 26 Déterminer alors l'expression de la fonction de transfert $B_0(p)$ d'un bloqueur d'ordre 0 telle que :

$$\mathcal{L}(b(t)) = B_0(p)\mathcal{L}(s^*(t))$$

avec :

$$B_0(p) = \frac{1}{a_b p}\left(1 - b_b e^{-T_e p}\right)$$

et donner les expressions des coefficients a_b et b_b en fonction de T_e.

Dans le cadre de l'analyse de la stabilité par le critère du revers, la variable de Laplace p correspond au complexe : $p = i\omega$.

Question 27 À partir des formules d'Euler et de l'expression de la variable de Laplace p, montrer que l'on peut écrire la fonction de transfert $B_0(p)$ du bloqueur d'ordre 0 sous la forme :

$$B_0(p) = e^{\frac{-T_e}{2}p}\,\mathrm{sin}_c\left(\frac{T_e}{2}|p|\right)$$

où sin_c correspond à la fonction « sinus cardinal » : $\mathrm{sin}_c(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Question 28 Donner alors les expressions du module $|B_0(i\omega)|$ et de l'argument $\arg(B_0(i\omega))$ de la fonction de transfert $B_0(p)$.

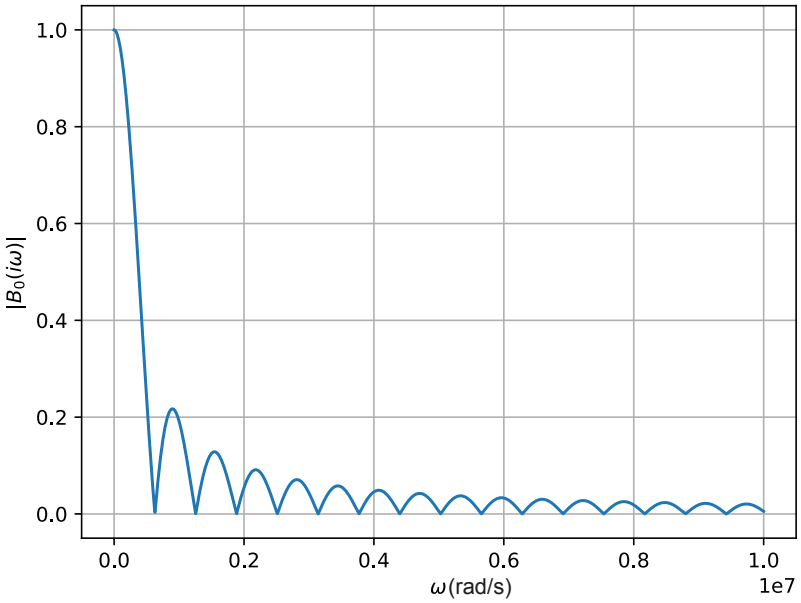


Figure 17 – Gain du bloqueur

Sur la **Figure 17** est représenté le graphique du module $|B_0(i\omega)|$ pour une fréquence du bloqueur $f_e = 10^5$ Hz. L'échelle des abscisses est linéaire.

Question 29 Compléter sur le **Cahier Réponses** le diagramme de Bode du gain en décibels et de la phase en degrés de la fonction de transfert $B_0(p)$ du bloqueur.

Question 30 Sur quelle plage de fréquence peut-on modéliser le bloqueur d'ordre 0 par un modèle simplifié de type retard pur de retard $T_e/2$. En considérant le critère du revers, donner une condition sur la fréquence d'échantillonnage f_e afin de pouvoir utiliser un modèle simplifié de retard pur pour le bloqeur d'ordre 0.

Dans la suite du sujet, on considérera cette condition vérifiée.

III.3 — Étude du codeur absolu

La précision annoncée en bout de robot est de 0,1 mm. On considère qu'un dixième de cette erreur peut être imputée au défaut de précision angulaire du codeur absolu.

Question 31 En considérant une longueur totale de 250 mm entre l'axe de rotation du poignet et le bout de l'outil, quelle est la valeur en radian de l'écart angulaire correspondant à une erreur de 0,01 mm en bout d'outil ?

Question 32 Déterminer le nombre minimal de pistes nécessaires sur le disque du codeur afin que la portion angulaire d'un secteur du disque du codeur absolu soit inférieure à cette erreur angulaire.

Question 33 Le codage utilisé sur le disque d'un codeur absolu doit posséder la propriété suivante : un seul bit doit changer d'état entre 2 codes successifs (les codes associées à deux secteurs angulaires voisins). Expliquer (en 5 lignes maximum) la raison technologique qui impose cette propriété.

III.4 — Étude du préactionneur

Le préactionneur utilisé pour moduler la tension de commande du moteur à courant continu est un hacheur. L'objectif de cette partie est de déterminer l'architecture du hacheur qui permet le pilotage du moteur dans ses différentes phases de fonctionnement. Le moteur doit pouvoir tourner dans les 2 sens de rotation afin d'entrainer l'outil dans les différents mouvements nécéssaires. Le débattement angulaire du mouvement de l'outil est de 320 degrés. Le système n'a pas vocation à récupérer une partie du courant lors des phases de freinage.

III.4.1 — Analyse de la pertinence d'un hacheur simple série

On considère dans un premier temps un hacheur simple série (cf. **Figure 18**) constitué d'une diode et d'un interrupteur commandé de type « MOFSET de puissance », de fréquence de découpage très grande par rapport au temps caractéristique électrique du circuit. L'interrupteur K_{mof} et la diode D_1 sont supposés parfaits.

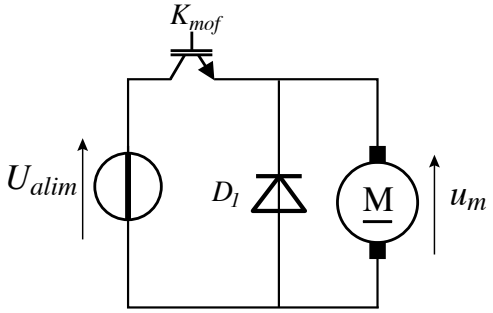


Figure 18 – Schéma électrique de l'architecture simplifiée d'un hacheur simple série

Question 34 On suppose une tension d'alimentation U_{alim} positive. Préciser sur le **Cahier Réponses** avec deux couleurs différentes les mailles dans lesquelles le courant circule lorsque le transistor est bloqué ou passant. Ce type de hacheur permet-il les deux sens de courant dans le moteur (expliquer en trois lignes maximum). Préciser alors sur le schéma du **Cahier Réponses** le(s) quadrant(s) dans le(s)quel(s) le moteur à courant continu peut fonctionner avec ce hacheur. Ce hacheur permet-il les différents modes de fonctionnement du moteur précisés en introduction de cette partie (expliquer en 5 lignes maximum) ?

III.4.2 — Analyse de la pertinence d'un hacheur réversible en tension

On considère maintenant un hacheur réversible en tension dont le schéma simplifié est présenté sur la **Figure 19**. Sur une période de découpage T_d, les interrupteurs sont pilotés de la manière suivante (où α représente le rapport cyclique compris entre 0 et 1) :

— sur l'intervalle $[0, \alpha T[$ les interrupteurs K_{mof} sont passants ;

— sur l'intervalle $[\alpha T, T[$ les interrupteurs K_{mof} sont bloqués.

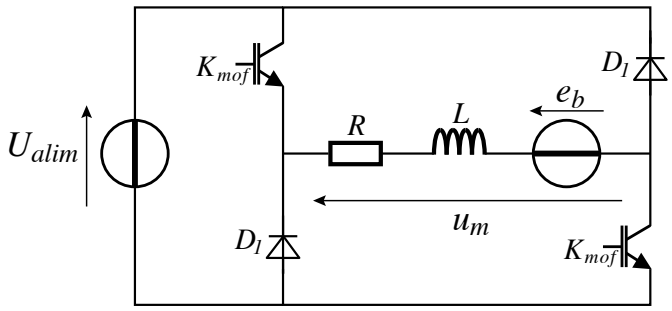


Figure 19 – Schéma électrique de l'architecture simplifiée d'un hacheur réversible en tension

Question 35 En considérant la tension U_{alim} constante, représenter sur le chronogramme du **Cahier Réponses** le graphe de $u_m(t)$ sur une période T. Déterminer l'expression de la valeur moyenne de $u_m(t)$ sur une période T (notée $\langle u_m \rangle$) en fonction de U_{alim} et de α. Quelle est la plage de variation de $\langle u_m \rangle$? Cette plage est-elle compatible avec les deux sens de rotation ?

Question 36 Préciser sur le schéma du **Cahier Réponses** le(s) quadrant(s) dans le(s)quel(s) le moteur à courant continu peut fonctionner avec ce hacheur. Conclure.

III.5 — Modélisation de la chaîne de transmission de puissance

Nous ne nous intéressons pas ici à la structure interne du moteur car les caractéristiques globales de ce système vont être obtenues expérimentalement. Afin de déterminer un modèle de comportement de la chaîne de transmission de puissance associée à cet axe, on réalise un essai en « chaîne ouverte ». Pour réaliser celui-ci, une génératrice tachymétrique est fixée sur le moteur afin d'en mesurer la vitesse de rotation. Lors de l'essai, le moteur entraine l'outil fixé sur le poignet du robot.

La structure complète des mouvements du robot comporte un axe supplémentaire par rapport à ceux qui ont été présentés et étudiés dans les parties I et II de ce sujet. En effet, afin d'obtenir une mobilité supplémentaire hors plan, le bras **2** est en fait scindé en deux parties **2'** et **2"** liées par une liaison pivot d'axe $(B, \vec{x}_2)$. On réalise l'essai d'identification de la chaine associée au mouvement du poignet dans la configuration géométrique représentée sur la **Figure 20**.

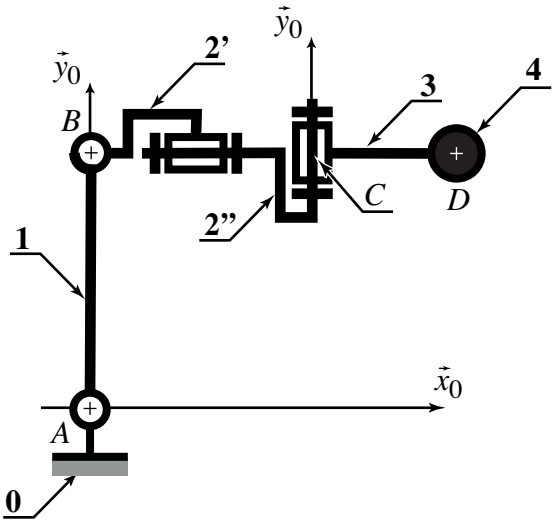


Figure 20 – Configuration géométrique du robot pour l'essai d'identification

Question 37 Expliquer pourquoi il est nécessaire de placer l'axe de la pivot du poignet dans une position verticale (parallèle à $\vec{y}_0$) pour effectuer l'essai d'identification des caractéristiques de la chaine de transmission de puissance.

On réalise l'essai suivant (**Figure 21**) comportant le moteur électrique alimenté par une tension constante de 24 V entrainant le réducteur et l'outil et une génératrice tachymétrique permettant de mesurer la vitesse de rotation du moteur. La tension en sortie de la génératrice est numérisée par un convertisseur analogique numérique (CAN). Les sorties du « CAN » sont récupérées informatiquement et stockées sous forme de 2 tableaux numpy. À partir des caractéristiques de la génératrice tachymétrique, on construit un tableau numpy noté w_m qui contient les valeurs numériques correspondant à la vitesse de rotation ω_m du moteur.

Les données sont donc stockées dans deux tableaux numpy t et w_m. On notera t_i l'élément d'indice i du tableau t et w_{mi} l'élément d'indice i du tableau w_m. La courbe de la **Figure 22** représentent l'évolution de la

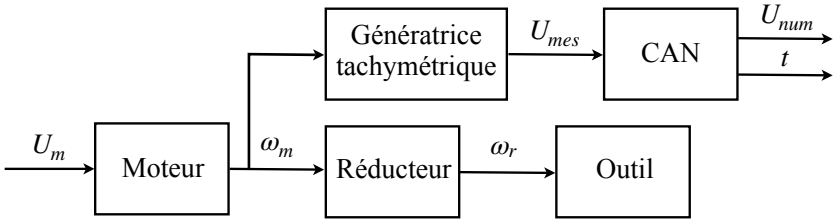


Figure 21 – Schéma fonctionnel de l'essai en chaîne ouverte

vitesse de rotation du moteur en fonction du temps. Celle-ci étant très bruitée, on décide de réaliser un filtrage numérique des données.

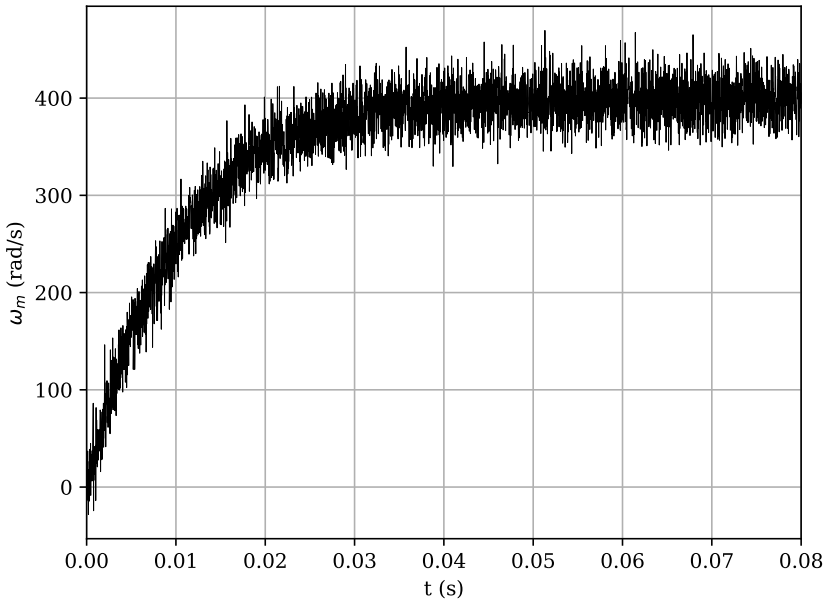


Figure 22 – Courbe bruitée de la vitesse de rotation du moteur

On choisit d'utiliser un filtre d'ordre 2 de fonction de transfert :

$$H_f(p) = \frac{1}{1 + \dfrac{2\xi_f}{O_{mf}}p + \dfrac{p^2}{O_{mf}^2}}$$

et on cherche à obtenir le schéma numérique associé à ce filtre afin de lisser la courbe obtenue expérimentalement.

Question 38 À partir de la forme du diagramme de Bode du gain d'une fonction de transfert d'ordre deux, expliquer pourquoi on choisit une valeur de ξ_f proche de 0,7.

On choisit de calculer la dérivée de façon approchée par une différence vers l'arrière en utilisant le pas de temps précédent :

$$\frac{dw_m(t)}{dt} \approx \frac{w_m(t) - w_m(t - T_e)}{T_e} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dw_m}{dt}(t_i) \approx \frac{w_{m_i} - w_{m_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}}$$

La numérisation étant à pas constant, on utilisera : $T_e = t_i - t_{i-1}$

Question 39 À partir de la fonction de transfert $H_f(p)$, déterminer l'équation différentielle associée au filtrage :

$$W_{mf}(p) = H_f(p)\, W_m(p)$$

Question 40 En appliquant le schéma numérique de calcul d'une dérivée par une différence vers l'arrière, déterminer le schéma numérique associé au filtre d'ordre 2 et donner les expressions des constantes a_0, b_0 et b_1 en fonction de O_{mf}, ξ_f et T_e :

$$w_{mf_i} = a_0 w_{m_i} + b_0 w_{mf_{i-1}} + b_1 w_{mf_{i-2}}$$

Les scalaires w_{mf_i} correspondent au éléments d'un tableau numpy w_{mf} représentant les valeurs filtrées de l'évolution de la vitesse de rotation du moteur.

Question 41 À partir de la **Figure 22** proposer une valeur numérique approximative de la pulsation de cassure O_{mf} du filtre d'ordre 2 qui permet de filtrer les oscillations parasites.

Le filtre numérique d'ordre deux est appliqué aux données non filtrées et on obtient la courbe de la **Figure 23**.

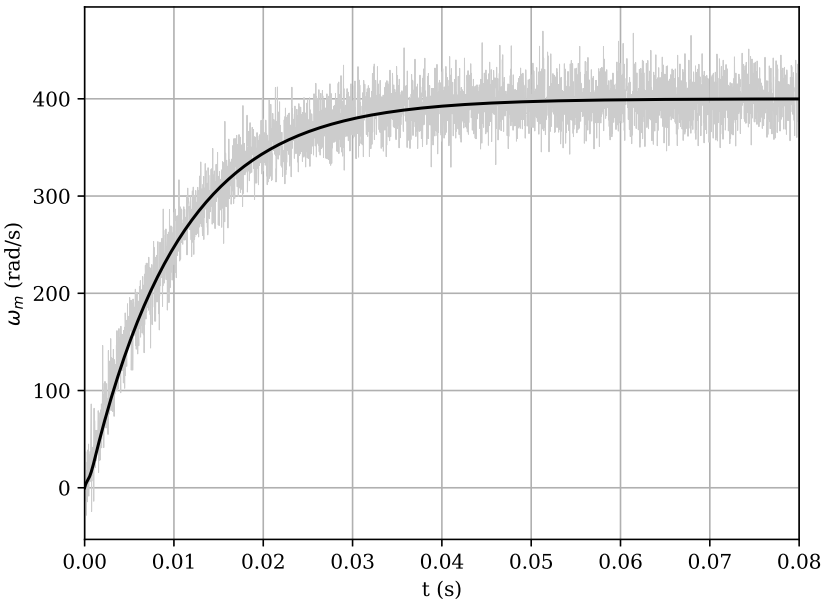


Figure 23 – Courbe filtrée de la vitesse de rotation du moteur

Question 42 À partir de la forme de la courbe filtrée obtenue, expliquer pourquoi on peut modéliser le comportement du moteur entrainant les éléments de la chaine de transmission par une fonction de transfert $H_m(p)$ d'ordre 1 :

$$H_m(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$$

et déterminer les valeurs numériques des coefficients K_m et τ_m.

III.6 — Détermination des correcteurs

On considère dans cette partie que la fréquence d'échantillonnage de la partie numérique du bouclage est suffisamment grande pour pouvoir analyser et définir le contrôle du mouvement du poignet avec une modélisation classique des SLCI (Systèmes Linéaires, Continus et Invariants). On néglige dans un premier temps l'influence du bloqueur, celle-ci sera évaluée en fin de partie. On considère donc le schéma fonctionnel de la **Figure 24**.

Le moteur électrique est modélisé par une fonction de transfert $H_m(p)$ d'ordre 1, de gain K_m et de constante de temps τ_m :

$$H_m(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$$

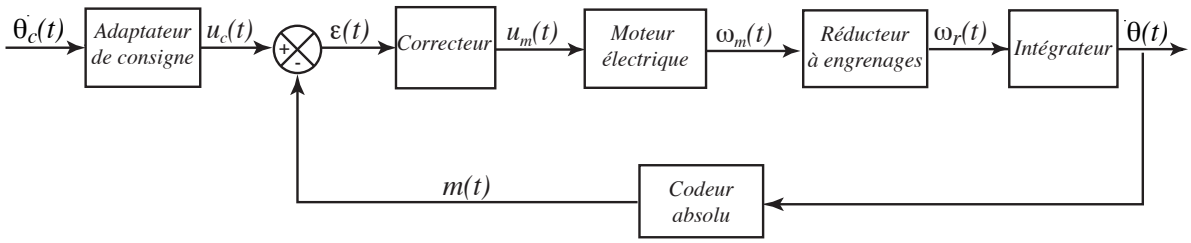


Figure 24 – Schéma fonctionnel du modèle continu du contrôle du mouvement du poignet

Le rapport du réducteur à engrenages est noté κ. La dynamique du codeur absolu est suffisamment grande par rapport à celle du moteur pour adopter un modèle de gain pur C_{abs}. Pour la même raison, l'adaptateur de consigne est modélisé par un gain pur A_c. On prendra : $C_{abs} = 1$ V rad^{-1}.

La fonction de transfert du correcteur est notée $C(p)$ (voir **Figure 25**). Quels que soient les résultats obtenus précédemment, on prendra : $\kappa = 1/20$, $K_m = 15$ rad s^{-1} V^{-1} et $\tau_m = 0,01$ s.

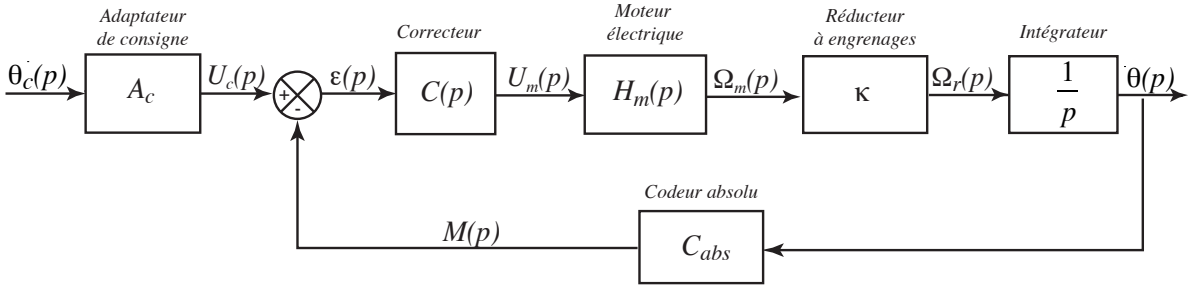


Figure 25 – Schéma-blocs du modèle continu du contrôle du mouvement du poignet

Question 43 Déterminer l'expression du gain A_c, en fonction des caractéristiques des éléments du système, de manière à ce que l'écart $\varepsilon(t)$ ait un sens.

Question 44 Expliquer pourquoi il est nécessaire de choisir un correcteur de classe 1 pour satisfaire les critères de précision du *Cahier des Charges* (tableau donné en début de partie).

On choisit un correcteur de type « Proportionnel-Intégral » de fonction de transfert : $C(p) = K_{PI}\dfrac{1+\tau_{PI}p}{p}$. On fixe la valeur de τ_{PI} afin de compenser le mode d'ordre un du moteur et on considère K_{PI} unitaire dans un premier temps.

Question 45 Quels sont les inconvénients éventuels à utiliser une compensation de pôles ?

Question 46 Donner l'expression de la FTBO du système bouclé ainsi corrigé et représenter sur le **Cahier Réponses** le diagramme de Bode du gain et de la phase de la FTBO pour une valeur de K_{PI} unitaire ($K_{PI} = 1$ s^{-1}). Le système ainsi corrigé est-il stable ? Si oui, donner les marges de gain et de phase.

Question 47 Déterminer la valeur de K_{PI} qui permet d'obtenir la valeur minimale de la pulsation à 0dB de la FTBO (ω_{0dB}) imposée par le *Cahier des Charges*.

Le critère de marge de phase n'étant pas validé, on ajoute un correcteur à avance de phase de fonction de transfert : $H_a(p) = K_a\dfrac{1+\tau_a p}{1+a_a\tau_a p}$ avec $a_a < 1$. Les caractéristiques générales de ce correcteur sont rappelées à la fin de cette partie.

Question 48 Donner la valeur de la phase que doit apporter le correcteur à avance de phase au niveau la pulsation ω_{0dB} et déterminer les valeurs numériques des coefficients K_a, a_a et τ_a.

La partie III.2 a permis de montrer que le modèle d'un bloqueur d'ordre 0 de période T_e peut être approximé par un retard pur de retard $T_e/2$. Même si cet élément n'apparait pas jusqu'à présent dans cette sous-partie du sujet, il fait partie de la chaîne directe réelle et peut avoir un impact sur certaines caractéristiques de la boucle d'asservissement.

Question 49 La période d'échantillonnage de la partie numérique est $T_e = 10^{-5}$ s. De quelle valeur en degré le bloqueur, modélisé par un retard pur de valeur $T_e/2$, va-t-il diminuer la marge de phase ? Conclure.

III.7 — Annexe : correcteur à avance de phase

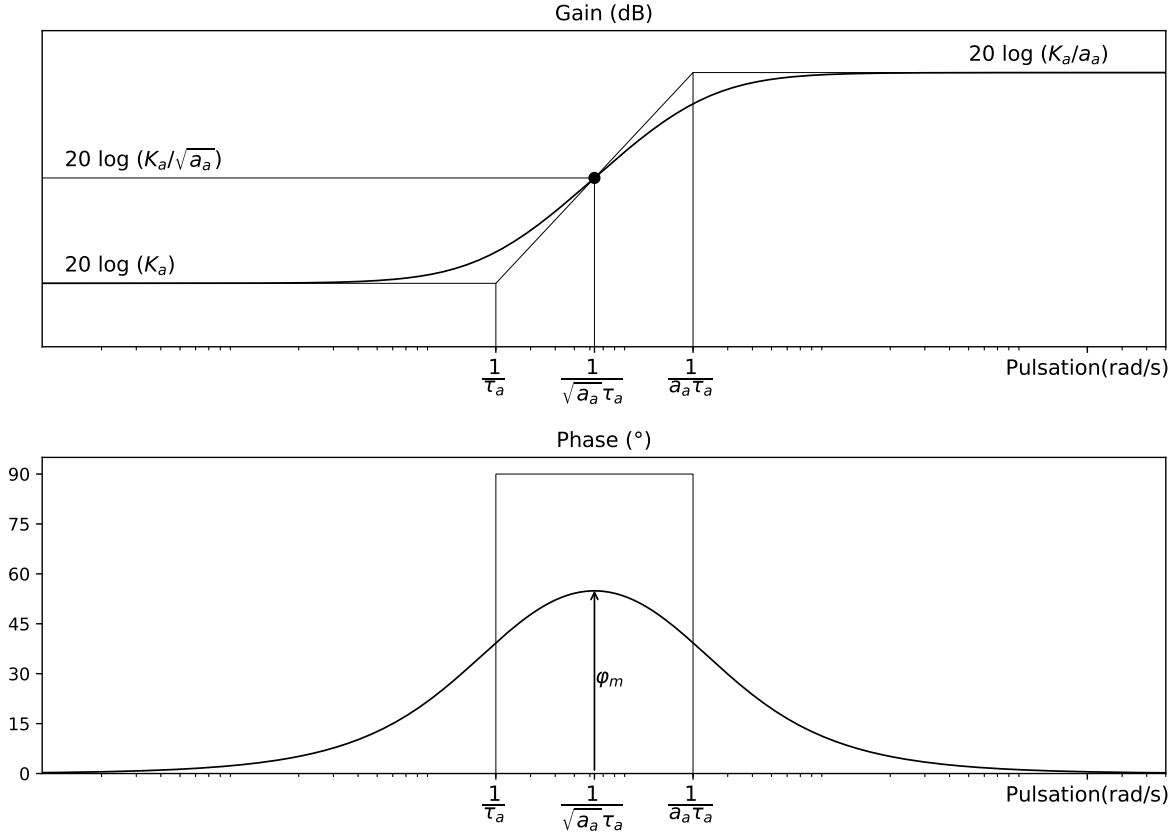


Figure 26 – Diagramme de Bode d'un correcteur à avance de phase

On rappelle :

$$\sin(\varphi_m) = \frac{1 - a_a}{1 + a_a}$$

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1011 – D'après documents fournis

Cahier réponse
Épreuve de Sciences Industrielles A

AVERTISSEMENT

Toutes les calculatrices sont interdites, quel qu'en soit le type, ainsi que les agendas électroniques, les règles à calculs, les téléphones portables…

INSTRUCTIONS

- Remplir sur chaque copie A3 en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- **Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.**
- **Vérifiez que votre cahier réponse comporte le nombre de pages indiqué et qu'il est correctement imprimé.**
- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à encre foncé : bleue ou noire. Le crayon-mine et autres couleurs peuvent être utilisés uniquement dans les schémas.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est strictement interdit. Les surveillants et surveillantes se réservent le droit de les confisquer.
- **À la fin de l'épreuve, rendre toutes les pages dans l'ordre mêmes celles non renseignées. Toute réclamation ultérieure ne pourra pas être prise en compte.**
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance. La présence d'une information d'identification en dehors du cartouche donnera lieu à un point de pénalité et la page concernée pourra être soustraite de la correction.

Tournez la page S.V.P

Modèle CMEN-DR v2 ©EXATECH

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : ..... Section/Spécialité/Série : .....

Epreuve : ..... Matière : ..... Session : .....

CONSIGNES

- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

PARTIE I — Étude de la cinématique et des actions mécaniques dans le robot

011

Question 1 Montrer que le couple C_A^{stat} peut s'écrire sous la forme $C_A^{\text{stat}} = g(\alpha\cos\theta_1 + \beta\cos(\theta_1+\theta_2) + \gamma\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ où α, β et γ sont des constantes positives que l'on exprimera en fonction des masses et des paramètres géométriques.

Ba

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Question 2 Déterminer l'expression de la valeur maximale $C_{A,\max}^{\text{stat}} = \max|C_A^{\text{stat}}|$ de ce couple et sa valeur numérique.

Question 3 Lorsque le frein est actionné, déterminer l'expression de la pression p en fonction du nombre de ressorts n, de l'effort normal F_r et des caractéristiques géométriques introduites précédemment.

Question 4 En vous appuyant sur le paramétrage de la figure déterminer l'expression du couple de freinage C_f que peut transmettre ce frein en fonction en fonction du nombre de ressorts n, de l'effort normal F_r et des caractéristiques introduites précédemment.

Question 5 Calculer le nombre n de ressorts correspondant. On utilisera utilement le fait que $(150^3 - 50^3)/(150^2 - 50^2) \approx 162$. Conclure quant à la faisabilité d'une telle solution vis-à-vis de l'encombrement disponible dans le réducteur.

Question 6 Expliquer l'avantage d'avoir installé le frein directement sur l'arbre moteur et non en sortie du réducteur. Quelle difficulté cela peut-il engendrer par ailleurs ?

Question 7 Exprimer le couple C_A^{dyn} en fonction du couple en statique C_A^{stat} et du moment dynamique en A, $\vec{\delta}(A, E/0)$, de l'ensemble **E** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Question 8 Expliquer pourquoi l'opérateur d'inertie du bras **B** exprimé en A dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est de la forme :

$$\mathcal{I}(A, B) = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

De même, exprimer l'opérateur d'inertie $\mathcal{I}(A, 4)$ de l'unité opérative **4** exprimé en A dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et expliciter le terme non nul qui apparait à deux reprises, noté J, en fonction des caractéristiques introduites précédemment.

Modèle CMEN-DR v2 ©EXATECH

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : ..... Section/Spécialité/Série : .....

Epreuve : ..... Matière : ..... Session : .....

CONSIGNES

- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

Question 9 Exprimer le moment cinétique en A, $\vec{\sigma}(A, E/0)$, puis le moment dynamique en A, $\vec{\delta}(A, E/0)$, de l'ensemble **E** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction des paramètres intertiels et géométriques du problème. En déduire l'expression du couple C_A^{dyn} que doit fournir le moteur en fonction du couple en statique C_A^{stat} et des paramètres intertiels et géométriques du problème.

Question 10 Cacluler la valeur nunérique du moment d'inertie J, puis de $C_{A,\text{max}}^{\text{dyn}}$ et commenter celle-ci par rapport à la valeur $C_{A,\text{max}}^{\text{stat}}$ utilisée précédemment pour dimensionner le frein du servomoteur.

Bb

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Question 11 Que vaut $\mathcal{P}(U \leftrightarrow U)$ la puissance des inter-efforts dans le système ? Déterminer $\mathcal{P}(\bar{U} \rightarrow U/0)$ la puissance des efforts extérieurs agissant sur celui-ci.

Question 12 En négligeant l'inertie en rotation autour de $(C, \vec{z}_0)$ du poignet **3** devant celle de l'unité opérative **4** (toujours assimilée à un point matériel en D), exprimer $T(U/0)$ l'énergie cinétique du système **U** dans son mouvement par rapport $\mathcal{R}_0$.

Question 13 Rappeler le théorème de l'énergie cinétique et, à l'aide des résultats précédents, en déduire une équation du mouvement qui lie les paramètres du mouvement et l'action du servomoteur.

Question 14 Compléter les lignes de code de la fonction `C(t)` qui prend en argument une variable `t` représentant le temps et renvoie la valeur de $C(t)$.

```
1 def C(t):
2     if t < t_0 or t > t_f:
3         return ...
4     elif t < t_1:
5         return C_max * (t - t_0) / (t_1 - t_0)
6     elif t > t_2:
7         return ...
8     return ...
```

Question 15 Compléter les lignes de code de la fonction `euler(F,Y0,T)` permettant de « résoudre $\dot{Y}(t) = F(Y,t)$ avec $Y(0) = Y_0$ ». Cette fonction prend en arguments une fonction `F`, un vecteur `Y0` correspondant à l'état initial et une liste croissante d'instants `T`. Elle doit renvoyer un tableau `Y` dont la i-ème ligne correspond à l'état du système à l'instant t_i, c'est-à-dire $Y_i = Y(t_i)$.

```
1 def euler(F, Y0, T):
2     Y = np.zeros((len(T), len(Y0)))
3     Y[0] = Y0
4     for i in range(len(T) - 1):
5         Y[i + 1] = ...
6     return Y
```

Question 16 Compléter les lignes de code de la fonction `F(Y,T)` correspondant spécifiquement à l'équation à résoudre ici et définie en fonction de `Y`, `wc`, `kc` et `C` (associées respectivement à $Y(t)$, ω_c, k_c et $C(t)$).

```
1 def F(Y, T):
2     return np.array( ...
```

PARTIE II

Étude d'un des réducteurs

Question 17 Exprimer $x_D = \overrightarrow{AD} \cdot \vec{x}_0$ la position du point D dans une position quelconque définie par les paramètres géométriques θ_1, θ_2 et θ_3, puis particulariser ce résultat pour la position d'intérêt $\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = -90°$ et $\theta_3 = -90°$.

Question 18 Calculer $x_D + \Delta x_D = \overrightarrow{AD} \cdot \vec{x}_0$ pour le cas où un défaut angulaire $\Delta\theta_i$ existe sur chacun des angles θ_i puis particulariser ce résultat pour la position d'intérêt $\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = -90°$ et $\theta_3 = -90°$. En supposant les défauts suffisamment petits ($\Delta\theta_i \ll 1$) pour linéariser le résultat au premier ordre, calculer Δx_D, l'erreur de position horizontale du point D, en fonction des défauts angulaires.

Question 19 Calculer la valeur du défaut angulaire maximum $\Delta\theta_{max}$ en radians puis en degrés.

Question 20 Par la méthode de votre choix, calculer le rapport de réduction $\kappa = \omega_{m0}/\omega_{p0}$ en fonction du nombre de dents des différents pignons, puis calculer sa valeur numérique.

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Question 21 Déterminer analytiquement, puis numériquement, $\Delta\theta_{p,\max}$ le défaut angulaire maximal admissible au niveau du pignon **p**, ainsi que $C_{p,\max}$ le couple maximal qu'il doit transmettre.

Question 22 Par la méthode de votre choix, déterminer l'expression de la flèche δ_p en bout de poutre en fonction de l'effort T et des caractéristiques géométriques et du matériau. Calculer la valeur numérique de cette flèche à partir des données et des réponses aux questions précédentes.

Question 23 À partir de cette flèche δ_p au niveau du pignon **p**, exprimer le défaut angulaire $\Delta\theta_p$ et la comparer à la valeur $\Delta\theta_{p,\max}$ admissible. Conclure.

PARTIE III

Etude et définition du contrôle du mouvement de lacet

Question 24 Donner l'expression temporelle du créneau unitaire initial $C_r(t)$ de largeur T_e en fonction de la fonction échelon notée $u(t)$. Donner alors l'expression temporelle du créneau unitaire retardé $C_r(t - kT_e)$ de largeur T_e en fonction de la fonction échelon notée $u(t)$.

Question 25 À partir de l'expression de $s^*(t)$ $\left(s^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k T_e \delta(t - t_k)\right)$, déterminer l'expression de la transformée de *Laplace* de la fonction $s^*(t)$: $\mathcal{L}\left(s^*(t)\right)$.

Question 26 Déterminer alors l'expression de la fonction de transfert $B_0(p)$ d'un bloqueur d'ordre 0 et donner les expressions des coefficients a_b et b_b en fonction de T_e.

Modèle CMEN-DR v2 ©EXATECH

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : ..... Section/Spécialité/Série : .....

Epreuve : ..... Matière : ..... Session : .....

CONSIGNES

- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

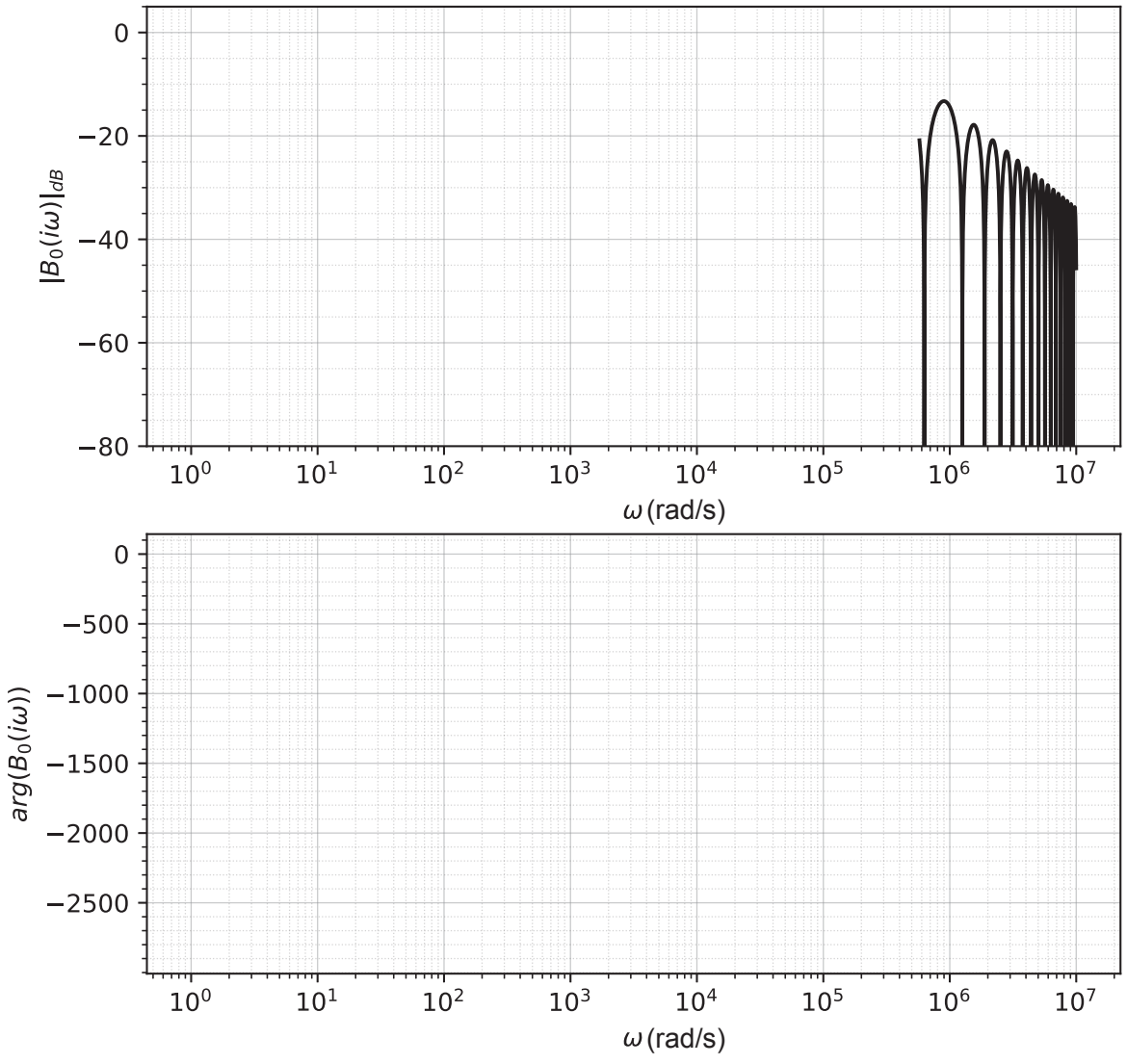
Question 27 À partir des formules d'Euler et de l'expression de la variable de *Laplace* p montrer que l'on peut écrire la fonction de transfert $B_0(p)$ du bloqueur sous la forme : $B_0(p) = e^{\frac{-T_e}{2}p} sin_c\left(\frac{T_e}{2}|p|\right)$, où sin_c correspond à la fonction "sinus cardinal".

Bd

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Question 28 Donner alors les expressions du module $|B_0(i\omega)|$ et de l'argument $\arg(B_0(i\omega))$ de la fonction de transfert $B_0(p)$.

Question 29 Compléter le diagramme de Bode du gain en décibels et de la phase en degré de la fonction de transfert $B_0(p)$ du bloqueur.



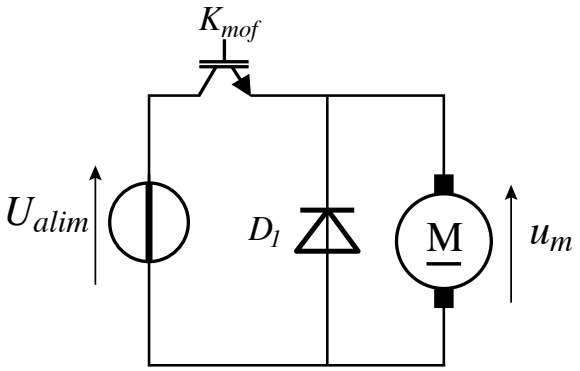
Question 30 Sur quelle plage de fréquence peut-on modéliser le bloqueur d'ordre 0 par un modèle simplifié de type retard pur de retard $T_e/2$. En considérant le critère du revers, donner une condition sur la fréquence d'échantillonnage f_e afin de pouvoir utiliser un modèle simplifié de retard pur pour le bloqeur d'ordre 0.

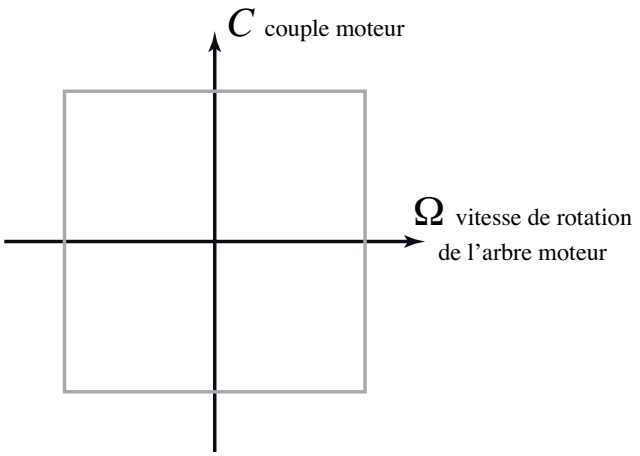
Question 31 En considérant une longueur totale de 25 cm entre l'axe de rotation du poignet et le bout de l'outil, quelle est la valeur en radian de l'erreur angulaire correspondant à une erreur de 0.01 mm en bout d'outil ?

Question 32 Déterminer le nombre minimal de pistes nécessaires sur le disque du codeur afin que la portion angulaire d'un secteur du disque du codeur absolu soit inférieure à cette erreur angulaire.

Question 33 Le codage utilisé sur le disque d'un codeur absolu doit posséder la propriété suivante : il ne peut y avoir qu'un seul bit qui change d'état entre 2 codes successifs (les codes associées à deux secteurs angulaires voisins). Expliquer (en 5 lignes maximum) la raison technologique qui nécessite cette propriété.

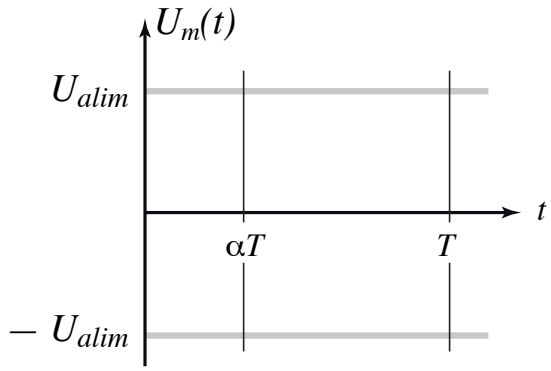
Question 34 On suppose une tension d'alimentation U_{alim} positive. Préciser sur le schéma avec deux couleurs différentes les mailles dans lesquelles le courant circule lorsque le transistor est bloqué ou passant. Ce type de hacheur permet-il les deux sens de courant dans le moteur (expliquer en trois lignes maximum). Préciser alors sur le schéma le(s) quadrant(s) dans le(s)quel(s) le moteur à courant continu peut fonctionner avec ce hacheur. Ce hacheur permet-il les différents modes de fonctionnement du moteur précisés en introduction de cette partie (expliquer en cinq lignes maximum) ?



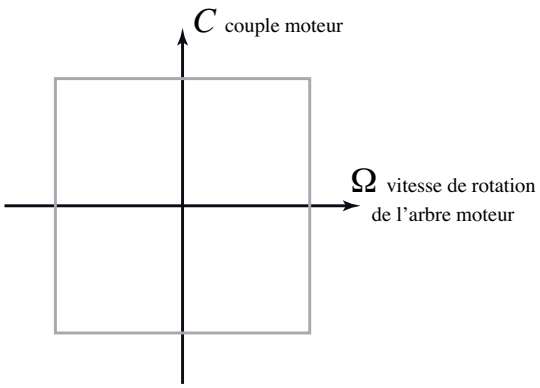


Modèle CMEN-DR v2 ©EXATECH
Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)
Prénom(s) :
Numéro Inscription :
Né(e) le : / /
(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)
(Remplir cette partie à l'aide de la notice)
Concours / Examen : ..... Section/Spécialité/Série : .....
Epreuve : ..... Matière : ..... Session : .....
CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Question 35 En considérant la tension U_{alim} constante, représenter sur le chronogramme le graphe de $u_m(t)$ sur une période T. Déterminer l'expression de la valeur moyenne de $u_m(t)$ sur une période T (notée $\langle u_m \rangle$) en fonction de U_{alim} et de α. Quelle est la plage de variation de $\langle u_m \rangle$. Cette plage est-elle compatible avec les deux sens de rotation ?



Question 36 Préciser sur le schéma le(s) quadrant(s) dans le(s)quel(s) le moteur à courant continu peut fonctionner avec ce hacheur. Conclure.



NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Question 37 Expliquer pourquoi il est nécessaire de placer l'axe de la pivot du poignet dans une position verticale (parallèle à $\vec{y}_0$) pour effectuer l'essai d'identification de la chaine de transmission de puissance.

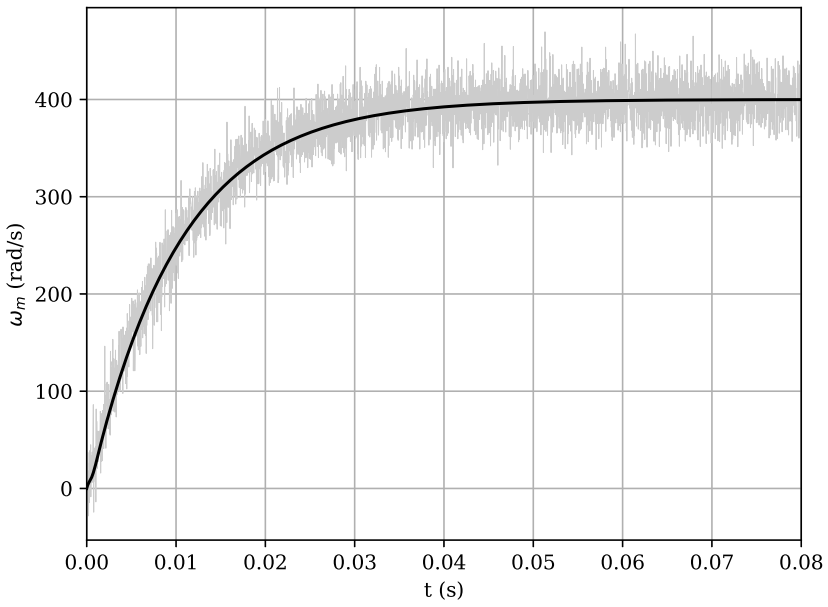
Question 38 À partir de la forme du diagramme de Bode du gain d'une fonction de transfert d'ordre deux, expliquer pourquoi on choisit une valeur de ξ_f proche de 0,7.

Question 39 à partir de la fonction de transfert $H_f(p)$, déterminer l'équation différentielle associée au filtrage : $W_{mf}(p) = H_f(p) W_m(p)$

Question 40 En appliquant le schéma numérique de calcul d'une dérivée par une différence vers l'arrière, déterminer le schéma numérique associé au filtre d'ordre 2 et donner les expressions des constantes a_0, b_0 et b_1 en fonction de O_{mf}, ξ_f et T_e : $w_{mf_i} = a_0 w_{m_i} + b_0 w_{mf_{i-1}} + b_1 w_{mf_{i-2}}$

Question 41 Donner une valeur approximative de la pulsation de cassure O_{mf} du filtre d'ordre 2.

Question 42 À partir de la forme de la courbe filtrée obtenue, expliquer pourquoi on peut modéliser le comportement du servo-moteur par une fonction de transfert $H_m(p)$ d'ordre 1 et déterminer les valeurs numériques des coefficients K_m et τ_m.



Question 43 Déterminer la valeur du gain A_c pour que l'écart $\varepsilon(t)$ ait un sens.

Modèle CMEN-DR v2 ©EXATECH

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : ..... Section/Spécialité/Série : .....

Epreuve : ..... Matière : ..... Session : .....

CONSIGNES

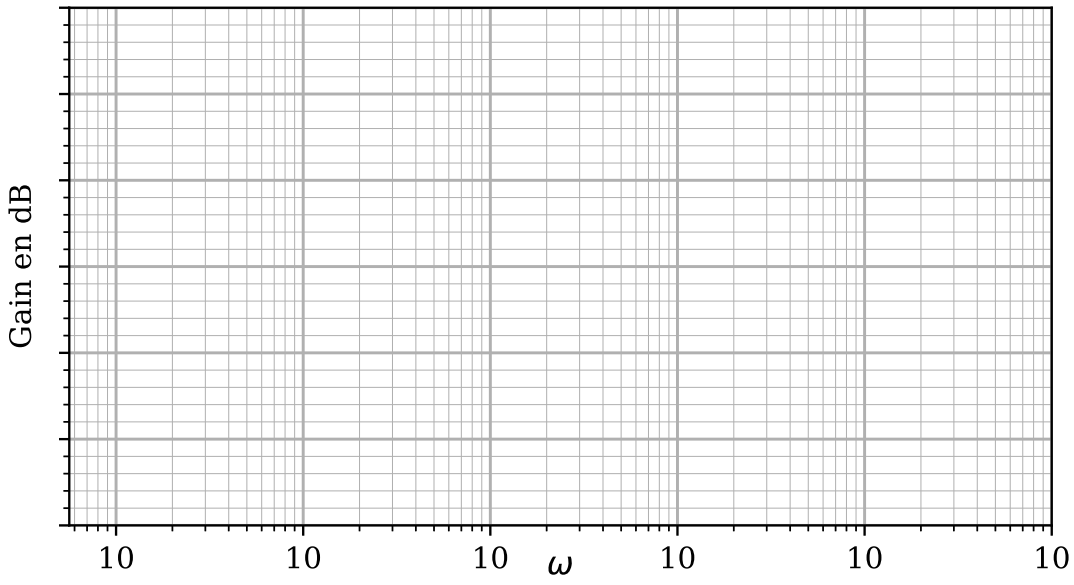
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

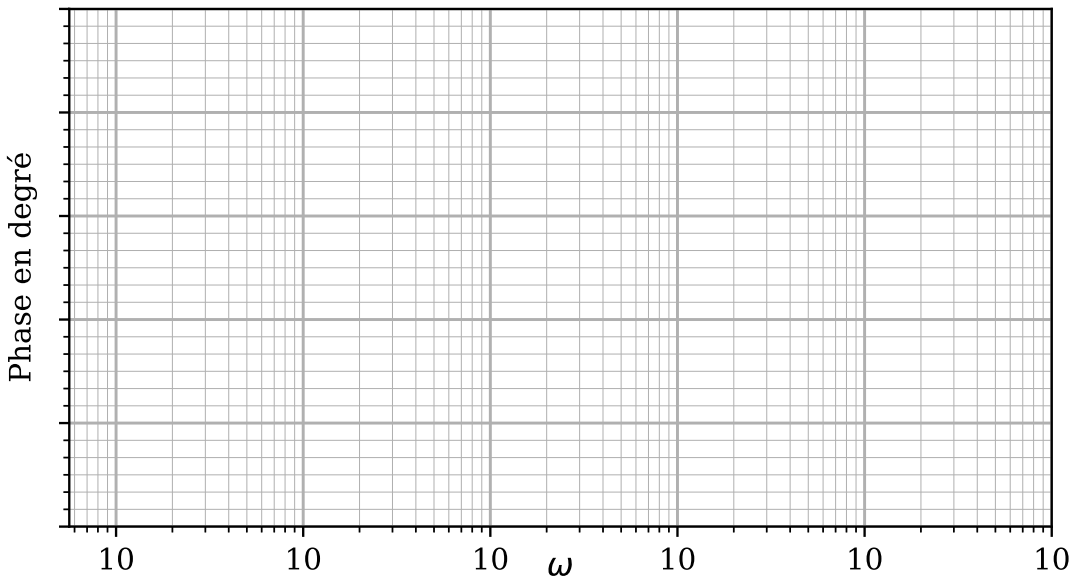
Question 44 Expliquer pourquoi il est nécessaire de choisir un correcteur de classe 1 pour satisfaire les critères de précision du *Cahier des Charges*.

Question 45 Quels sont les inconvénients éventuels à utiliser une compensation de pôles ?

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Question 46 Donner l'expression de la FTBO du système bouclé ainsi corrigé et représenter le diagramme de Bode du gain et de la phase de la FTBO pour une valeur de K_{PI} unitaire ($K_{PI} = 1$ s^{-1}). Le système ainsi corrigé est-il stable ? Si oui, donner les marges de gain et de phase.





Question 47 Déterminer la valeur de K_{PI} qui permet d'obtenir la valeur minimale de la pulsation à 0dB de la FTBO (ω_{0dB}) imposée par le *Cahier des Charges*.

Question 48 Donner la valeur de la phase que doit apporter le correcteur à avance de phase au niveau la pulsation ω_{0dB} et déterminer les valeurs numériques des coefficients K_a, a_a et τ_a.

Question 49 La période d'échantillonnage de la partie numérique est $T_e = 10^{-5}$ s. De quelle valeur en degré le bloqueur, modélisé par un retard pur de valeur $T_e/2$, va-t-il diminuer la marge de phase ? Conclure.