

SESSION 2025

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE DES CONSTRUCTIONS**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier. Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1416A	102	2680

CENTRE NAUTIQUE SPORT – LOISIRS DE NOISY LE GRAND

Toutes les études sont indépendantes les unes des autres. En outre, au sein d'une même étude, un grand nombre de questions peuvent être traitées de manière indépendante. Pour chaque question, en complément des résultats de calculs proprement dits, il convient de justifier les choix effectués et les calculs réalisés ainsi que de commenter les résultats obtenus. Une attention particulière doit être apportée à la présentation et à la clarté des explications.

Étude 1 : étude d'une poutre métallique en treillis 3D

Étude 2 : étude d'une poutre pleine équivalente à une poutre en treillis 3D

Étude 3 : étude d'une poutre continue de roulement en béton armé

Étude 4 : étude du système de climatisation

Étude 5 : étude des installations aquatiques

Étude 6 : étude d'un dissipateur thermique

Contexte de l'étude

Les études à mener portent sur le CENTRE NAUTIQUE SPORT – LOISIRS à NOISY LE GRAND. Il s'agit d'un bâtiment devant accueillir du public et du personnel de bureau.

L'établissement est organisé comme suit :

- au rez-de-chaussée haut : le hall d'accueil, des salles de cours, une salle de réunion, des bureaux, des locaux de stockage, des espaces de convivialité et un espace humide ;
- au rez-de-chaussée bas : le hall des bassins, des vestiaires, des locaux de stockage et l'infirmierie ;
- au sous-sol : des locaux techniques et une galerie technique.

Le centre nautique comporte :

- un bassin sportif,
- un bassin fun,
- un bassin loisirs et apprentissage,
- une pataugeoire.

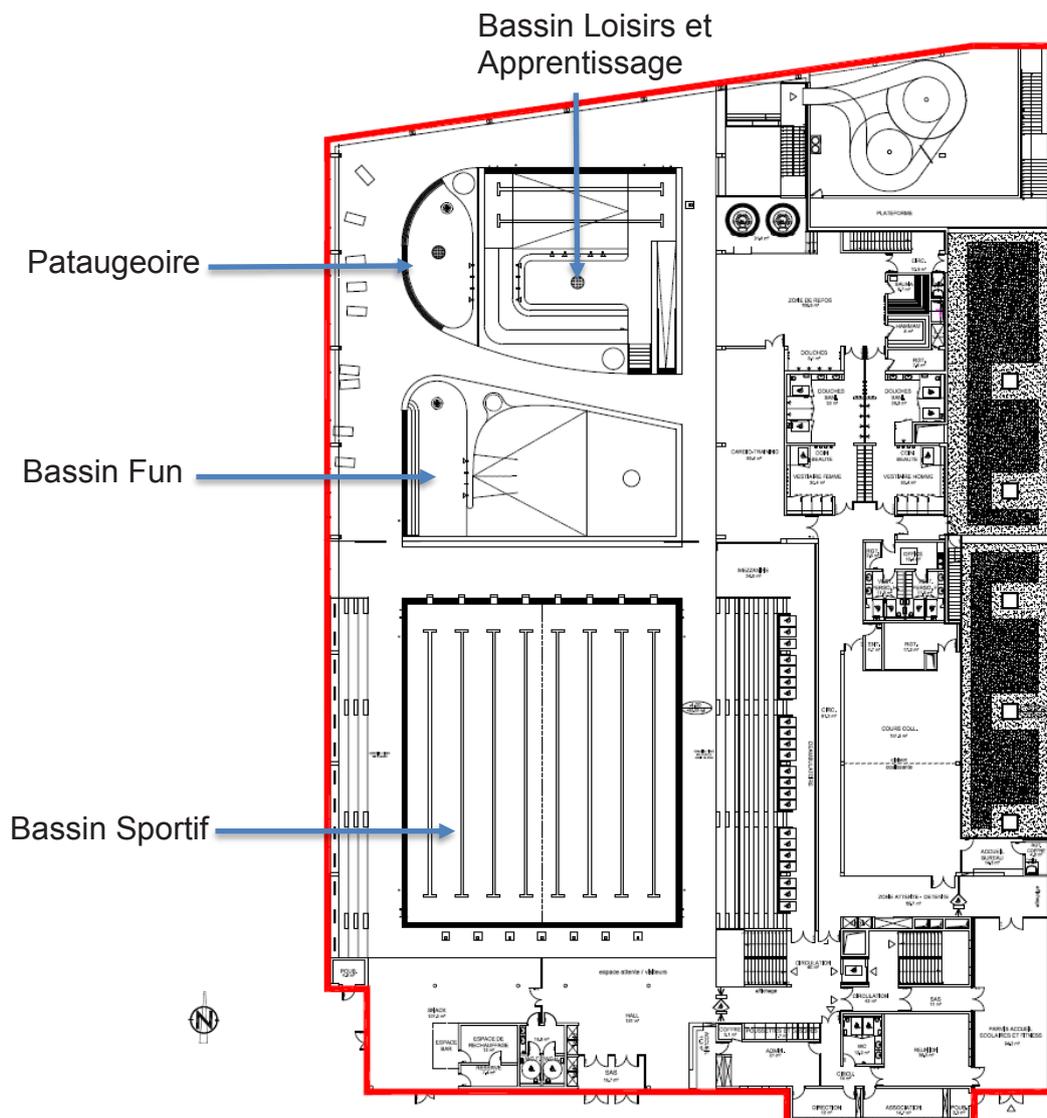


Figure 1 : Plan simplifié – niveau Rez de Chaussée haut

Étude 1 : étude d'une poutre métallique en treillis 3D

L'objectif de cette étude est de vérifier la stabilité structurelle des sections et des éléments barres d'une poutre de roulement métallique en treillis 3D.

Le document technique DT1 permet de repérer la poutre dans le bâtiment.

La poutre étudiée a une longueur $L = 30$ m. La figure 2 représente la poutre étudiée et le repérage des nœuds de celle-ci dans son plan médian. La figure 3 illustre une coupe de cette même poutre.

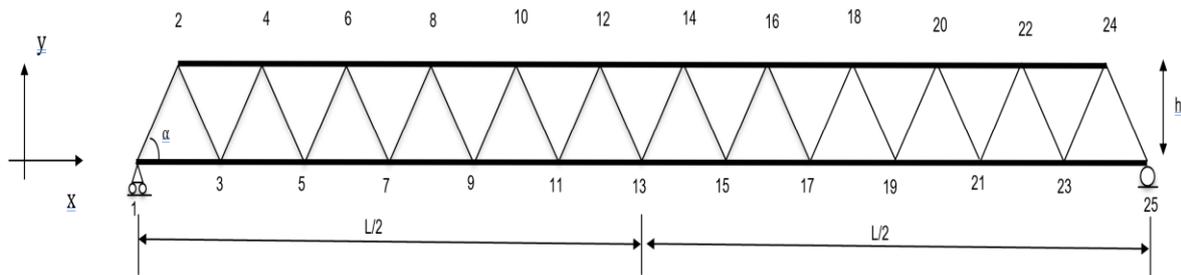


Figure 2 : Repérage des nœuds de la poutre en treillis dans son plan médian

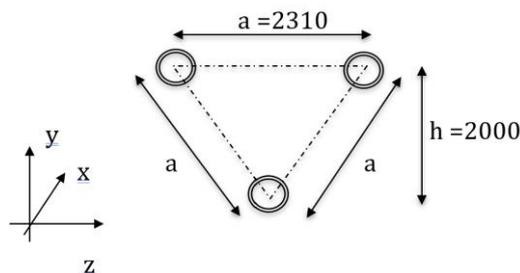


Figure 3 : Coupe de la poutre en treillis, les côtes sont en mm

Les hypothèses prises pour mener l'étude sont les suivantes :

- la poutre en treillis repose sur une rotule (nœud 25) et un appui simple (nœud 1) dans le plan vertical (xy), et dans le plan transversal (yz) ;
- la poutre en treillis est chargée uniquement dans le plan vertical (xy) ;
- la poutre est contreventée par les membrures supérieures et entretoises considérées comme suffisamment rigides pour former une « poutre échelle ».

Le concepteur a opté pour une poutre en treillis tridimensionnel et non pour une poutre en treillis plan.

Question 1.1 Expliquer ce choix de conception.

Le concepteur a opté pour une section circulaire creuse et non pour une section circulaire pleine.

Question 1.2 Expliquer ce choix de conception.

On considère que l'ensemble des tubes ont les caractéristiques suivantes :

- diamètre extérieur du tube = 200 mm ;
- épaisseur du tube = 10 mm.

Question 1.3 Calculer les caractéristiques géométriques (aire, moment quadratique d'inertie et rayon de giration) d'un tube de membrure.

Pour la suite de l'étude, on considère que l'ensemble les tubes ont les caractéristiques suivantes :

Grandeur	Notation	Valeur	Unité
Diamètre extérieur	Dext	18,00	cm
Epaisseur	e	1,000	cm
Aire	A	53,41	cm ²
Moment quadratique d'inertie	I	1 936	cm ⁴
Rayon de giration	i	6,020	cm

On suppose que le chargement de la poutre est composé de :

- la charge surfacique de toiture et de charpente secondaire en configuration fermée $G_0 = 0,7 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$;
- la charge linéique de poutre treillis $g_1 = 3,6 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$;
- la charge surfacique de neige sur la toiture $S = 0,36 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$.

Aucun coefficient partiel de sécurité sur les actions n'est appliqué.

Question 1.4 Calculer la charge linéique p reprise par la poutre treillis pour le chargement étudié.

Pour la suite de l'étude, on suppose que $p = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$. On suppose que la charge linéique p est appliquée en partie supérieure de la poutre.

Question 1.5 Montrer que la structure est isostatique extérieurement. **Montrer** que les réactions d'appui de la poutre en treillis sont uniquement verticales et d'une valeur de 180 kN.

Pour la suite de l'étude, on suppose que :

- les charges s'appliquent uniquement sur les nœuds supérieurs de la poutre en treillis ;
- la poutre échelle constituée par les membrures supérieures et les entretoises encastrées est remplacée par une structure triangulée constituée des membrures supérieures, des entretoises et des barres de contreventement.

Le repérage des barres et des nœuds est fourni dans le document technique DT3.

Question 1.6 Montrer que la structure est isostatique intérieurement en dénombrant les barres, les nœuds et les inconnues de liaisons.

Question 1.7 Déterminer les forces qui s'appliquent sur les nœuds de la partie haute du treillis (2', 2'', 4', 4'', ...).

Question 1.8 Calculer les efforts dans les barres au nœud 1 par la méthode des nœuds.

Question 1.9 Calculer les efforts dans les barres au nœud 2'' par la méthode des nœuds.

Question 1.10 Calculer l'effort normal maximal dans les membrures par la méthode de la coupure (ou méthode de Ritter).

On considère que la membrure inférieure la plus sollicitée est soumise à un effort de traction $N = 680 \text{ kN}$.

Question 1.11 Calculer la contrainte normale. En utilisant les données du document technique DT2, **conclure** sur la stabilité structurelle de la section et de la barre.

On considère que la membrure supérieure gauche la plus sollicitée est soumise à un effort de compression $N = 340 \text{ kN}$.

Question 1.12 Calculer la contrainte normale. En utilisant les données du document technique DT2, **conclure** sur la stabilité structurelle de la section et de la barre.

Question 1.13 Conclure sur la stabilité structurelle de la poutre métallique en treillis 3D.

Étude 2 : étude d'une poutre pleine équivalente à une poutre en treillis 3D

Cette étude aborde la méthode de la poutre pleine équivalente. Cette méthode permet de simplifier les études de prédimensionnement des poutres en treillis. L'objectif de cette étude est d'établir les caractéristiques de la poutre pleine équivalente à la poutre en treillis 3D et de comparer les résultats du calcul de flèche obtenus par la méthode de la poutre équivalente d'une part, et par différentes modélisations issues de logiciel de calcul de structure d'autre part.

Dans cette étude, on considère que les tubes de la poutre en treillis 3D ont les caractéristiques suivantes :

Grandeur	Notation	Valeur	Unité
Diamètre extérieur	Dext	18,00	cm
Epaisseur	e	1,000	cm
Aire	A	53,41	cm ²
Moment quadratique d'inertie	I	1 936	cm ⁴
Rayon de giration	i	6,020	cm

Les autres hypothèses et données sont rappelées dans les documents techniques DT1, DT2 et DT3.

Question 2.1 En considérant uniquement les membrures supérieures et inférieures de la poutre en treillis de type Warren, **calculer** l'aire, notée A_{eq} , et le moment quadratique d'inertie, noté I_{eq} , de la section de poutre équivalente.

Question 2.2 Tracer l'allure des sollicitations d'effort tranchant (V) et de moment fléchissant (M) de la poutre équivalente, sous le chargement uniforme de $12 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$. **Indiquer** sur le tracé les valeurs minimales, maximale, ainsi que les valeurs nulles.

Question 2.3 Calculer la flèche à mi-travée en considérant une inertie $I_{eq} = 1\,500\,000 \text{ cm}^4$.

Dans la suite de l'étude, on calcule dans un premier temps l'équivalence entre le torseur des sollicitations (N , V , M) de la poutre pleine équivalente et les efforts normaux dans les barres de la poutre en treillis 3D. On identifie ensuite les caractéristiques géométriques de la poutre équivalente et également les énergies de déformation des deux modèles sur une longueur de maille m de treillis ou de poutre équivalente. Afin de simplifier les expressions, on suppose que le torseur des sollicitations (N , V , M) de la poutre pleine équivalente est constant sur une maille m . Le repérage les éléments et les notations sont fournis dans le document technique DT4.

On suppose dans cette étude que l'effort normal est nul dans la poutre équivalente ($N=0$).

Question 2.4 Montrer que l'effort normal dans la membrure supérieure est égal à $\frac{M}{2 \cdot h}$.

Question 2.5 Montrer que l'effort normal dans la membrure inférieure est égal à $\frac{M}{h}$.

Question 2.6 Montrer que l'effort normal dans la diagonale est égal à $\frac{1}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta} \cdot V$ et que l'effort normal dans l'entretoise est égal à $\frac{\tan \beta}{\sin \alpha} \cdot V$.

Question 2.7 Montrer que l'effort normal dans une entretoise est nul.

On note E le module d'Young et G le module de cisaillement.

Question 2.8 Montrer que sur la maille de longueur m l'énergie de déformation de la poutre équivalente, notée $W_{i, eq}$, s'écrit :

$$W_{i, eq} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{V^2}{G \cdot A_{eq}} + \frac{M^2}{E \cdot I_{eq}} \right) \cdot m$$

Question 2.9 En ne considérant que les membrures et les diagonales, **montrer** que sur la maille m l'énergie de déformation des barres de la poutre en treillis 3D, notée W_i , s'écrit :

$$W_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{E \cdot h^2} \cdot \left(\frac{3}{2A} \right) \cdot m + \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{E \cdot 2A} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^3 \beta} \cdot m$$

Question 2.10 Par identification, **montrer** que la poutre équivalente a pour caractéristiques géométriques :

$$I_{eq} = \frac{2}{3} \cdot A \cdot h^2$$
$$A_{eq} = 2 \cdot \frac{E}{G} \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^3 \beta \cdot A$$

Le document technique DT5 rappelle l'expression du théorème de Pasternak. Le document technique DT6 rappelle les intégrales de Mohr.

Question 2.11 En prenant en compte les caractéristiques de la section droite de la poutre équivalente établies à la question précédente, **calculer** la flèche à mi travée à l'aide du théorème de Pasternak.

Question 2.12 Comparer le résultat obtenu par la méthode de la poutre équivalente avec les différents résultats obtenus par un logiciel de calcul de structure et fournis dans le document technique DT7.

Question 2.13 Conclure sur l'intérêt de la méthode de la poutre équivalente et ses limites.

Étude 3 : étude d'une poutre continue en béton armé

La poutre continue en béton armé étudiée doit être capable de supporter les poutres mobiles métalliques en treillis 3D qui supportent la toiture. L'objectif de cette étude est de valider la conception en caisson double de la poutre continue en béton armé. Sauf indication contraire, on suppose que les matériaux sont élastiques linéaires et que les formules classiques de la résistance des matériaux établies en élasticité linéaire sont applicables. Le document technique DT9 donne les caractéristiques mécaniques de l'acier et du béton.

Question 3.1 En utilisant les documents techniques DT8 et DT9, **justifier** les hypothèses de modélisation des portées et des appuis.

Question 3.2 En utilisant le document technique DT10, **tracer**, à l'aide de la méthode des trois moments, l'allure des sollicitations d'effort tranchant V et de moment fléchissant M , le long de la poutre continue en béton armé chargée par une charge linéique de $82 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$. **Indiquer** sur le tracé les valeurs remarquables des sollicitations.

Question 3.3 Déterminer la répartition élastique des contraintes normales générées par le moment de flexion. **En déduire** un principe de ferrailage longitudinal.

Dans la suite de l'étude, on considère la section de béton armé fissurée illustrée par la figure 4. On néglige la contribution du béton tendu.

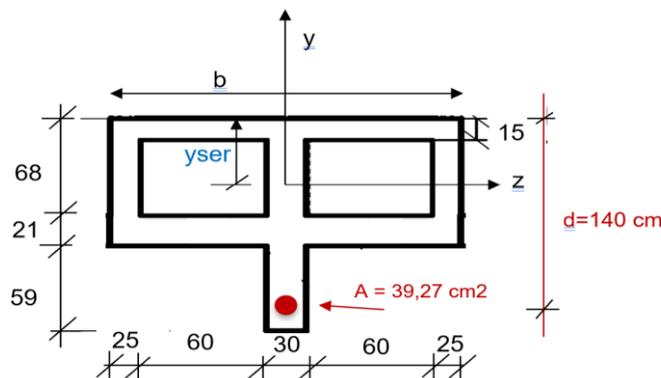


Figure 4 : Coupe de la poutre continue en béton armé, les côtes sont en cm

On note :

- A la section d'acier tendue ;
- d la distance entre les aciers tendus et la fibre de béton la plus comprimée ;
- y_{ser} la distance entre l'axe neutre et la fibre de béton la plus comprimée ;
- n le coefficient d'équivalence conventionnel entre les matériaux.

Cette section est sollicitée par un moment de service $M_{ser} = 1\,220 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Question 3.4 En considérant la section de béton armé fissurée **établir** l'équation d'équilibre horizontal (selon l'axe x) des efforts internes de la section (béton comprimé, acier tendu) dans les deux cas suivants :

- un axe neutre situé dans la table supérieure du caisson ($y_{ser} < 15 \text{ cm}$) ;
- un axe neutre situé dans l'âme du caisson ($15 \text{ cm} < y_{ser} < 68 \text{ cm}$).

Question 3.5 Calculer la valeur numérique de y_{ser} .

Question 3.6 En partant de la définition du moment quadratique et en introduisant le coefficient d'équivalence n entre les matériaux, **établir** l'expression littérale du moment quadratique de la section de béton armé fissurée calculé à l'axe neutre y_{ser} , noté I_{ser} .

Question 3.7 Calculer la valeur numérique de I_{ser} à partir de la valeur numérique y_{ser} trouvée à la question 3.5.

Question 3.8 Calculer les contraintes normales dans le béton et dans les aciers et **vérifier** les critères de contraintes limites. **Comparer** les résultats avec ceux obtenus à la question 3.2 et **conclure**.

Question 3.9 En utilisant le document technique DT11, **calculer** la répartition élastique des contraintes de cisaillement générées par un effort tranchant $V=610$ kN en utilisant la formule de Jouravski. **En déduire** un principe de ferrailage.

Question 3.10 En utilisant le document technique DT10, **tracer**, à l'aide de la méthode des trois moments, l'allure des sollicitations d'effort tranchant V et de moment fléchissant M , le long de la poutre continue en béton armé. **Indiquer** sur le tracé les valeurs remarquables des sollicitations.

Question 3.11 En utilisant le document technique DT10, **tracer**, à l'aide de la méthode des trois moments, l'allure des sollicitations d'effort tranchant V et de moment fléchissant M , le long de la poutre continue en béton armé, en cas de tassement de 5 cm au niveau de l'appui central. **Indiquer** sur le tracé les valeurs remarquables des sollicitations. **Commenter** le résultat.

Dans la suite de l'étude, on étudie la section de poutre en travée, avec la couverture mobile chargée uniquement à gauche :

- poids propre hors couverture mobile : $g_0 = 70 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$;
- poids propre couverture mobile à gauche : $g_1' = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$.

On considère la poutre comme bi-encastée vis-à-vis de la torsion entre les deux appuis de rive.

Question 3.12 En analysant les données des documents techniques DT8 et DT9, **justifier** l'hypothèse d'une poutre comme bi-encastée vis-à-vis de la torsion, puis **calculer** le moment de torsion T le long de la poutre.

Question 3.13 En considérant la section de béton non armé, **justifier** les hypothèses de modélisation et de calcul puis **calculer** la répartition élastique des contraintes de cisaillement générées par le moment de torsion en utilisant la formule du flux de cisaillement de torsion rappelée dans le document technique DT12. **En déduire** un principe de ferrailage.

Question 3.14 **Conclure** sur la pertinence de la conception en double caisson.

Étude 4 : étude du système de climatisation

L'objectif de cette étude est de dimensionner les différents éléments constituant la Centrale de traitement d'air (CTA) utilisée pour climatiser le hall des bassins.

Jusqu'à 1 000 personnes peuvent être présentes simultanément dans le hall des bassins. Le débit d'air neuf étant extrêmement important, le système de chauffage et de rafraîchissement se fait à partir de l'air soufflé. Une CTA située en toiture prépare l'air soufflé à partir des informations que délivre la sonde d'air repris du hall des bassins.

Les équipements sont dimensionnés avec les bases de calcul suivantes :

Conditions extérieures de référence :

- Hiver :

Température -7°C
Hygrométrie 95%

- Eté :

Température sèche 35°C
Hygrométrie 35%

Conditions intérieures hiver

- Hall des bassins :

Température 28°C (ralenti à 25°C)
Hygrométrie 65% (±10%)

Conditions intérieures été

- Hall des bassins :

Température 29°C
Hygrométrie 70% (±10%)

L'écart de soufflage maximal est limité à :

-7°C en été
+10°C en hiver

Le débit d'air neuf minimum est imposé à 30 m³/h/personne. La masse volumique de l'air est évaluée à : $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Puissance liée aux apports été par les parois	32,2 kW
Puissance liée aux déperditions hiver par les parois	-40,2 kW
Volume du hall des bassins	29 116,8 m ³
Débit d'air neuf minimal	0,25 x Volume / heure
Puissance liée aux apports totaux d'une personne	131 W

Température de l'air θ_{air}	28°C	29°C
Chaleur sensible	53 W	47 W
Vapeur d'eau	78,9 g·h ⁻¹	83,2 g·h ⁻¹

La chaleur latente de vaporisation est notée L_v et est déterminée par la formule :

$$L_v = 2\,501 + 1,86 \times \theta_{\text{air}} [\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}]$$

Étude dans les conditions d'hiver

Dans un premier temps on se place dans l'hypothèse d'une salle inoccupée. On suppose que la CTA se compose d'une batterie de préchauffage de l'air neuf, d'un caisson de mélange, d'une batterie chaude, d'un humidificateur à vapeur autonome et d'un ventilateur. La batterie de préchauffage permet de maintenir l'air neuf à -3°C avant le caisson de mélange.

Question 4.1 Sur le diagramme de l'air humide du document réponse DR1, **tracer** en bleu l'évolution de l'air dans la CTA et le hall des bassins avec la configuration, débit d'air minimal et écart de soufflage maximal. **Compléter** le tableau fourni sur le document réponse DR1 avec les points remarquables.

Question 4.2 Calculer la puissance délivrée par la batterie chaude ainsi que la batterie de préchauffage.

Question 4.3 Indiquer le risque possible susceptible de se produire dans le caisson de mélange. **Proposer** une solution pour éviter ce risque.

Dans un deuxième temps, on se place dans l'hypothèse d'une salle occupée. On suppose que la batterie de préchauffage de l'air neuf permet maintenant de maintenir l'air neuf à 5°C avant le caisson de mélange.

Le débit de soufflage est fixé à $20 \text{ kg}_{\text{air}} \text{ sec}^{-1}$.

Question 4.4 Déterminer le débit massique d'air neuf pour les 1 000 personnes.

Question 4.5 Déterminer le point de soufflage en hiver. Sur le document réponse DR1, **tracer** l'évolution de l'air dans la CTA et le hall des bassins en couleur rouge.

Étude dans les conditions d'été

On se place dans l'hypothèse d'une salle occupée. Le débit de soufflage est fixé à $20 \text{ kg}_{\text{air}} \text{ sec}^{-1}$. La batterie froide est alimentée par de l'eau glacée au régime $7/12^{\circ}\text{C}$.

Question 4.6 Déterminer le point de soufflage en été. **Tracer** l'évolution de l'air dans la CTA et le hall des bassins sur le diagramme du document réponse DR2.

Question 4.7 Déterminer l'efficacité de la batterie froide.

Schématisation de la CTA

Question 4.8 Réaliser un schéma complet de la CTA incluant le soufflage et la reprise d'air en faisant apparaître tous les éléments qui la composent, ainsi que les sondes de mesure et les éléments de régulation.

Étude 5 : étude des installations aquatiques mises à la disposition du public

Le hall des bassins accueille des cours de natation tout public, allant du niveau débutant (pour enfants et adultes) au niveau confirmé. Certaines installations sont mises en place afin de faciliter l'apprentissage de la natation. L'objectif est de vérifier la conformité de ces installations vis-à-vis de la sécurité des nageurs.

Fontaine jet d'eau



Figure 5 : Image de la fontaine jet d'eau

Au niveau du bassin fun, des jets d'eau sont installés afin de divertir les enfants. Le jet d'eau sort d'une buse à la verticale d'une fontaine ; cela crée une ambiance aquatique ludique supplémentaire. La puissance hydraulique ne doit pas excéder 1 W.



Figure 6 : Schéma d'un jet d'eau

Question 5.1 En négligeant les pertes par frottement dans l'air, **calculer** la pression, le débit et la puissance hydraulique nécessaire pour alimenter un jet d'eau de diamètre initial 8 mm s'élevant verticalement à une hauteur de 60 cm. **Conclure** quant à la valeur de la puissance hydraulique.

Oscillations verticales d'une bouée

Certains débutants utilisent des bouées afin de mieux appréhender le fait d'être dans l'eau. On considère une bouée de forme cylindrique de hauteur h , de section S et de densité $d_{\text{bouée}} < 1$, flottant à la surface de l'eau. La bouée est considérée pleine comme indiqué sur le schéma de la figure 7.

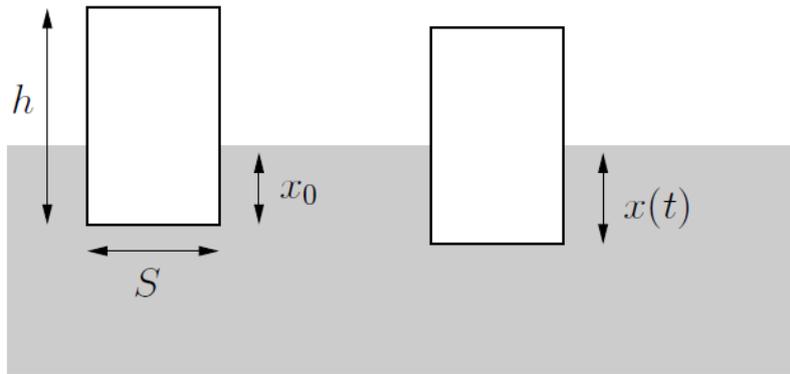


Figure 7 : Schéma de la bouée

Question 5.2 Déterminer la hauteur immergée notée x_0 de la bouée lorsqu'elle est à l'équilibre.

On déplace légèrement la bouée par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche brusquement. On note $x(t)$ la hauteur de bouée immergée variant au cours du temps t . On admet que lors du mouvement de la bouée, celle-ci subit les mêmes forces qu'en statique.

Question 5.3 Établir l'équation différentielle linéaire du second ordre sur $x(t)$ régissant les oscillations de la bouée.

Question 5.4 En déduire l'expression littérale de la période d'oscillation en fonction de h et d .

On donne $h = 80$ cm et $d_{\text{bouée}} = 0,2$. Les conditions de sécurité sont réunies si la période d'oscillation ne dépasse pas 1 s.

Question 5.5 Calculer la valeur numérique de la période d'oscillation. **Conclure** quant au respect des conditions de sécurité.

Flottaison d'une barre creuse en aluminium

Un autre moyen d'apprendre à nager est d'utiliser une barre : soit une barre tenue par le maître-nageur le long du bassin, soit une barre accrochée au mur afin d'apprendre en autonomie. Le centre nautique est équipé de cette dernière solution.

Une barre creuse en aluminium mince de longueur L est accrochée à un mur en un point A, autour duquel elle peut tourner. L'autre extrémité de la barre plonge dans l'eau. Le point A est à une hauteur h par rapport au niveau de l'eau. On note d_{barre} la densité du matériau. La figure 8 illustre la situation utilisée pour cette étude.

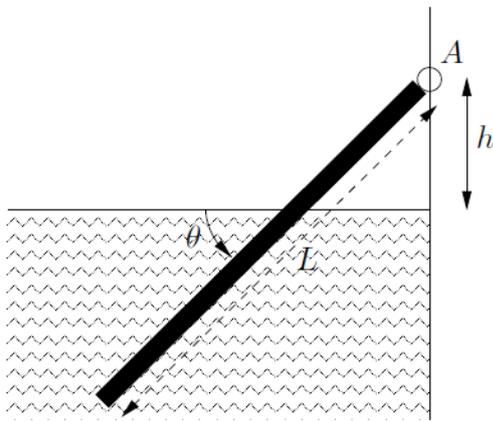


Figure 8 : Schéma de la barre creuse en aluminium

Données :

- diamètre extérieur de la barre : 4 cm
- diamètre intérieur de la barre : 3,4 cm
- masse volumique de l'aluminium :
 $\rho_{\text{aluminium}} = 2\,710 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- masse volumique de l'air :
 $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Question 5.6 Calculer la masse volumique de cette barre. Indiquer si la barre flotte sur l'eau.

Dans la suite de l'étude on considère que la masse volumique de la barre est de $750 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Question 5.7 En écrivant l'équilibre des moments, déterminer littéralement l'inclinaison θ de la barre en fonction de h , L et d_{barre} .

Question 5.8 Déterminer la valeur critique du rapport h/L pour laquelle la barre atteint la position verticale.

L'angle entre la barre et le mur ne doit pas dépasser 45° pour garantir la sécurité des nageurs.

Question 5.9 Calculer la valeur de l'angle θ pour $h=1 \text{ m}$ et $L=3\text{m}$. Conclure quant à la sécurité des nageurs.

Étude 6 : étude d'un dissipateur thermique

Un dissipateur thermique est constitué d'ailettes longues et étroites montées sur une base située à proximité d'une source de chaleur. La chaleur de la source est conduite dans la base du dissipateur thermique et se dissipe ensuite à travers les ailettes. L'air se déplace sur les ailettes du dissipateur thermique pour évacuer la chaleur par convection et par rayonnement.

Les ordinateurs de l'accueil du centre nautique sont encrassés et les processeurs de ces ordinateurs génèrent beaucoup de bruit suite à la dissipation de la chaleur faite par ventilation mécanique. Dans cette partie, nous allons étudier le remplacement des dissipateurs à ventilation mécanique par des dissipateurs thermiques à ailettes.



Figure 9 : Photo d'un dissipateur thermique refroidissant le processeur d'un ordinateur.

Dans cette partie, les ailettes métalliques de ce dispositif sont modélisées par un pavé droit de longueur L , de largeur d et d'épaisseur e (voir figure 10). L'ailette repose orthogonalement sur l'élément à refroidir de surface $d \times E$ de température T_m et de même matière (fer) que l'ailette. Cette dernière échange par convection et par rayonnement avec l'air ambiant à température T_∞ .

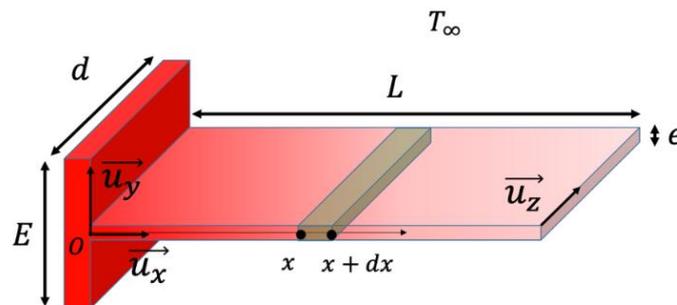


Figure 10 : Schéma de l'ailette modélisée

L'objectif de cette partie consiste à montrer l'intérêt d'utiliser un dissipateur thermique avec des ailettes plutôt qu'un dissipateur à ventilation mécanique. Dans un premier temps l'étude porte sur la détermination du profil thermique au sein d'une ailette. Dans un second temps, l'étude porte sur l'évaluation de l'efficacité de l'utilisation d'une telle ailette.

Données numériques de l'étude :

Pour le fer : Conductivité thermique $\lambda_{tr} = 80 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Diffusivité thermique $D = 23\cdot 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
Masse volumique $\rho = 7\,860 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Chaleur massique $C = 452 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Emissivité thermique $\varepsilon = 1$

Autres valeurs : Coefficient de convection thermique $h = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Température de l'air $T_{\infty} = 300 \text{ K}$
Epaisseur de l'ailette $e = 2 \text{ mm}$
Longueur de l'ailette $L = 5 \text{ cm}$
Epaisseur de l'élément à refroidir $d = 3 \text{ cm}$
Hauteur de l'élément à refroidir $E = 1 \text{ cm}$
Température initiale de l'élément à refroidir $T_m = 333 \text{ K}$
Constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,67\cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$

Dans le cadre de cette étude on considère que :

$$\text{si } T_a \approx T_b, \text{ alors } (T_a^4 - T_b^4) \approx (T_a - T_b) \cdot 4 \cdot T_b^3$$

Profil thermique au sein de l'ailette

On fait l'hypothèse que les pertes thermiques se produisant par les bords d'épaisseur e sont négligeables.

Question 6.1 À l'aide des nombres de Biot et de Fourier, **justifier** qu'au bout d'un temps de l'ordre de la dizaine de minutes, le profil de température est stationnaire et ne dépend que de la position x .

Afin de modéliser le profil thermique au sein de l'ailette, on procède à un bilan thermique sur une portion d'ailette d'épaisseur dx située en x (voir figure 10). On note $\Phi_{\text{cond}}(x)$ le flux transmis par conduction dans le sens positif suivant x et $d\Phi_{\text{conv}}(x)$ le flux élémentaire s'échappant dans la direction y (par les faces supérieures et inférieures).

Question 6.2 Montrer que ce bilan mène à l'équation $\frac{d\Phi_{\text{cond}}(x)}{dx} \cdot dx + d\Phi_{\text{conv}}(x) = 0$.

Question 6.3 Expliciter $\Phi_{\text{cond}}(x)$ en fonction de λ_{tr} , d , e et $T(x)$, la température de l'ailette en x .

Question 6.4 Expliciter $d\Phi_{\text{conv}}(x)$ en fonction de h , d , $T(x)$, T_{∞} et dx en négligeant, dans un premier temps, les échanges radiatifs.

On note $d\Phi_{C-R}$ le flux élémentaire transmis par conduction et par rayonnement.

Question 6.5 Reprendre la question 6.4 en ajoutant les pertes radiatives. **Linéariser** le résultat obtenu de façon à obtenir un résultat de la forme : $d\Phi_{C-R}(x) = \Gamma \cdot [T(x) - T_{\infty}] \cdot dx$. **Donner** l'expression littérale obtenue pour la constante Γ .

Question 6.6 Déduire des réponses aux questions 6.2, 6.3 et 6.5 une équation différentielle régissant le profil de température $T(x)$ au sein de l'ailette.

On émet l'hypothèse que l'ailette est semi-infinie (qu'elle s'équilibre au loin avec la température ambiante). On suppose que cela conduit à une décroissance exponentielle de la forme $T(x) = T_{\infty} + A \cdot e^{-\frac{x}{\chi}}$ où χ est une échelle de longueur caractéristique de la dissipation thermique au sein de l'ailette.

Question 6.7 Déterminer l'expression de χ en fonction de λ_{tr} , d , e et Γ puis en fonction de λ_{tr} , e , h , σ et T_{∞} puis **réaliser** l'application numérique.

Question 6.8 En supposant la continuité des températures au sein de l'ailette et de son support, **proposer** une expression analytique de la constante A . **En déduire** l'expression littérale de la température à l'extrémité de l'ailette, **faire** l'application numérique. **Commenter** l'hypothèse d'ailette semi-infinie faite dans le cadre de cette étude.

Efficacité du dispositif

Question 6.9 Exprimer analytiquement le flux thermique P_{avec}^b évacué par l'ailette par sa base en fonction de λ_{tr} , χ , d , e , T_m et T_{∞} .

Question 6.10 En déduire l'expression analytique du flux thermique P_{avec} globalement évacué par le dispositif à refroidir de surface $E \times d$ (avec l'hypothèse que les flux radiatifs peuvent être linéarisés). **Exprimer** le résultat en fonction de P_{avec}^b , h , σ , T_m , T_{∞} , d , E et e .

Question 6.11 De façon similaire à la question 6.10, **préciser** quel aurait été le flux P_{sans} perdu au travers de la surface $E \times d$, en absence d'ailette.

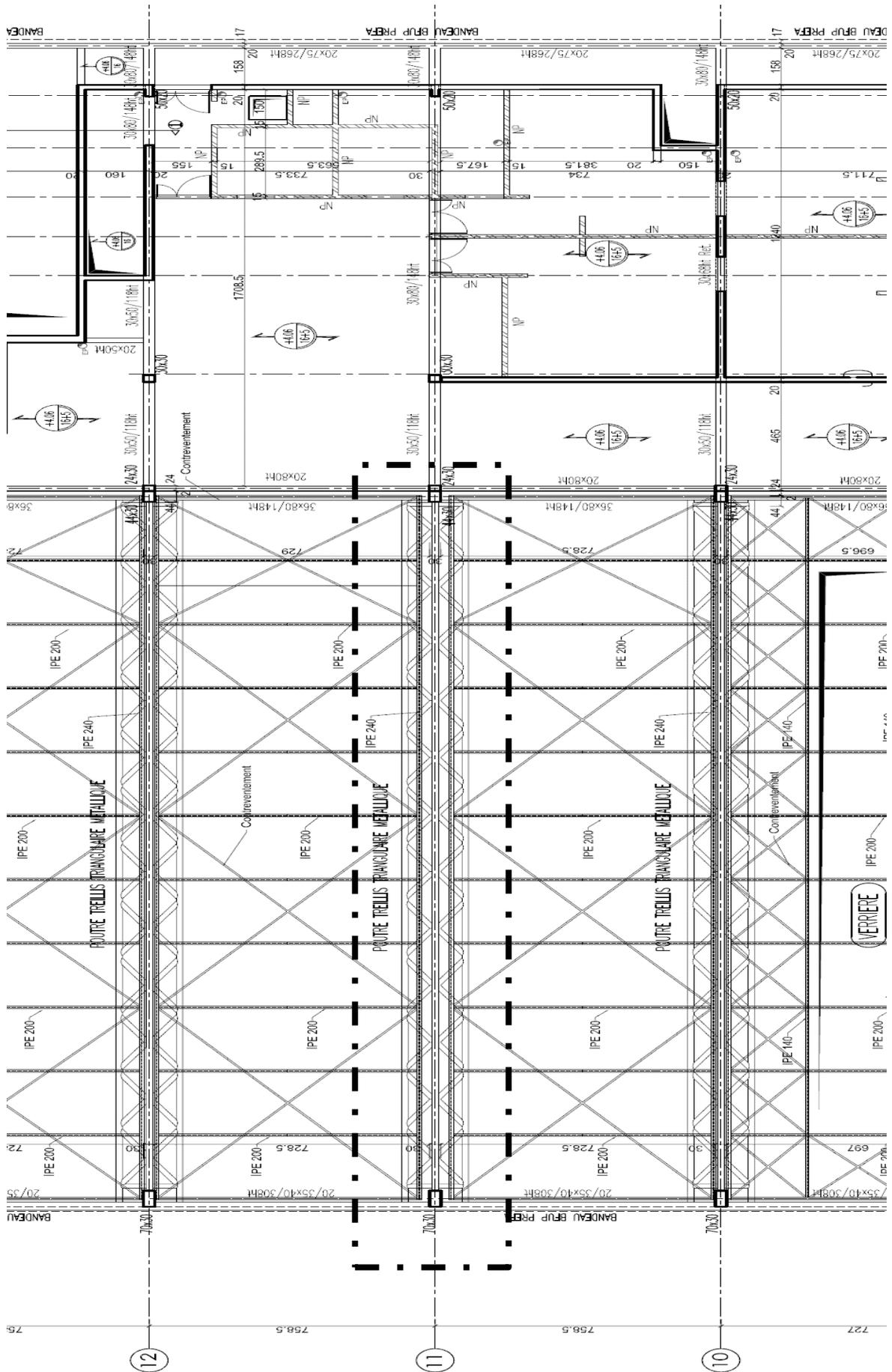
Question 6.12 En déduire l'expression du gain de déperdition thermique apporté par l'ailette. **Faire** l'application numérique avec les données du problème. Sachant qu'un dissipateur à ailettes évacue trois fois plus rapidement la chaleur qu'un dissipateur à ventilation mécanique, **conclure** quantitativement sur l'intérêt d'utiliser des ailettes.

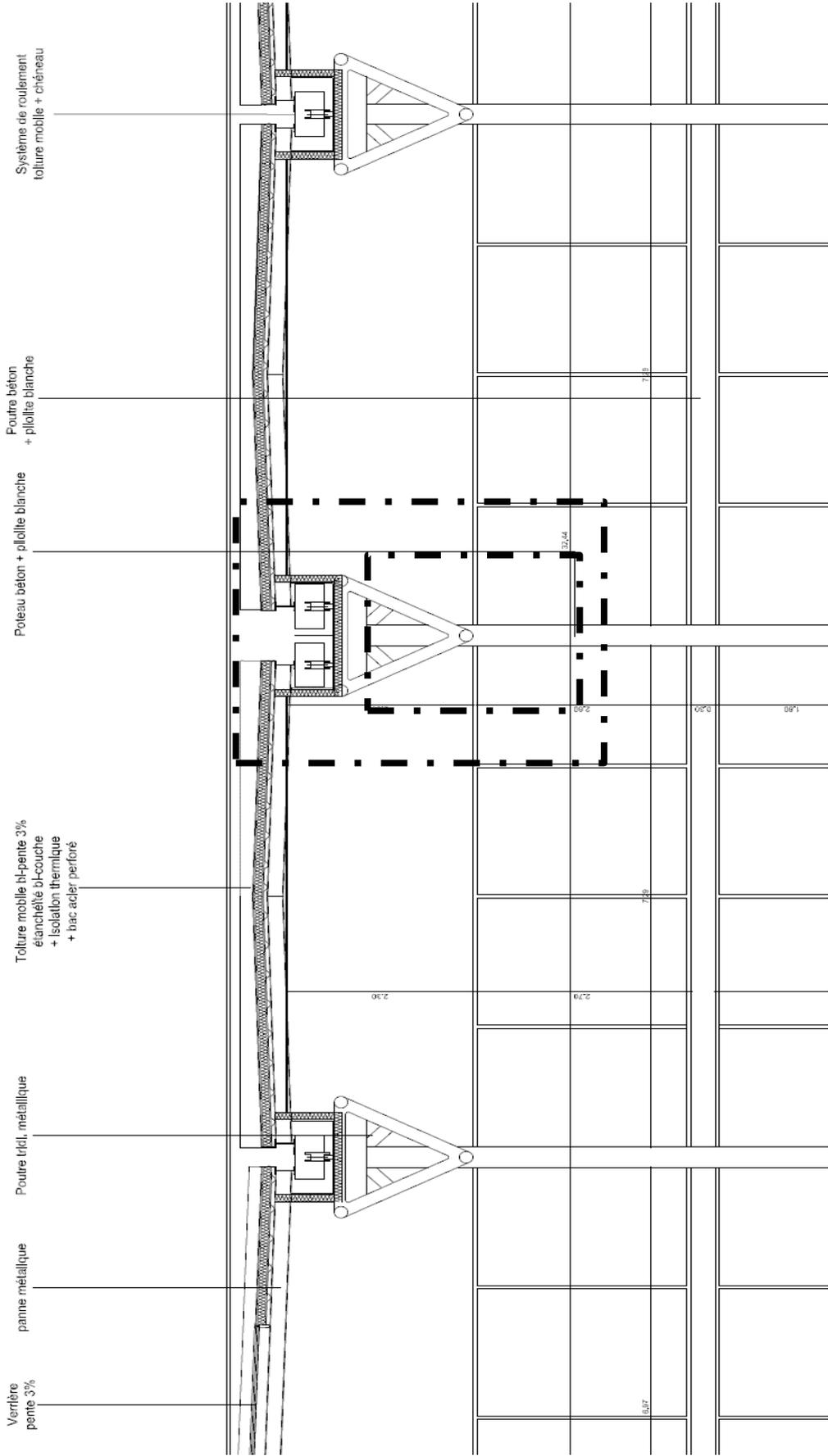
Document technique DT1

Repérage de la poutre métallique en treillis 3D dans son environnement



Document technique DT1 - suite





Document technique DT2

Caractéristiques mécaniques de l'acier

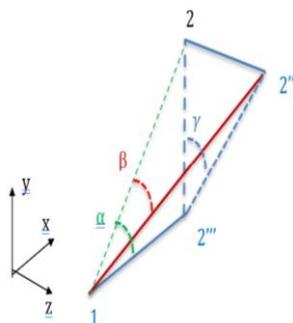
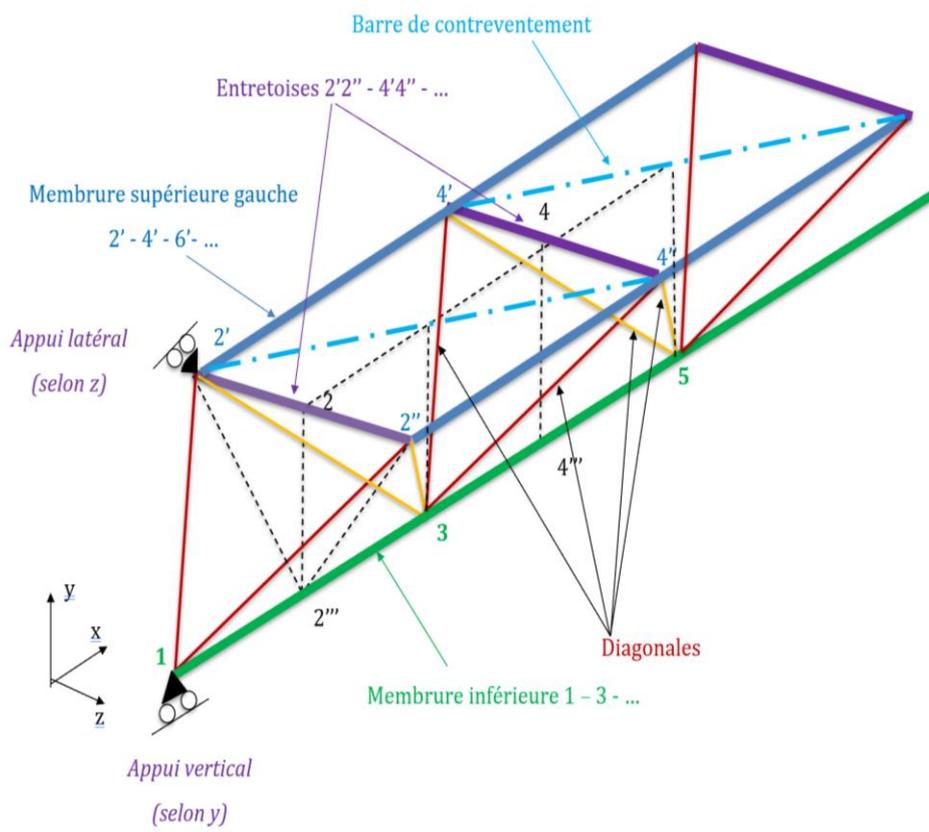
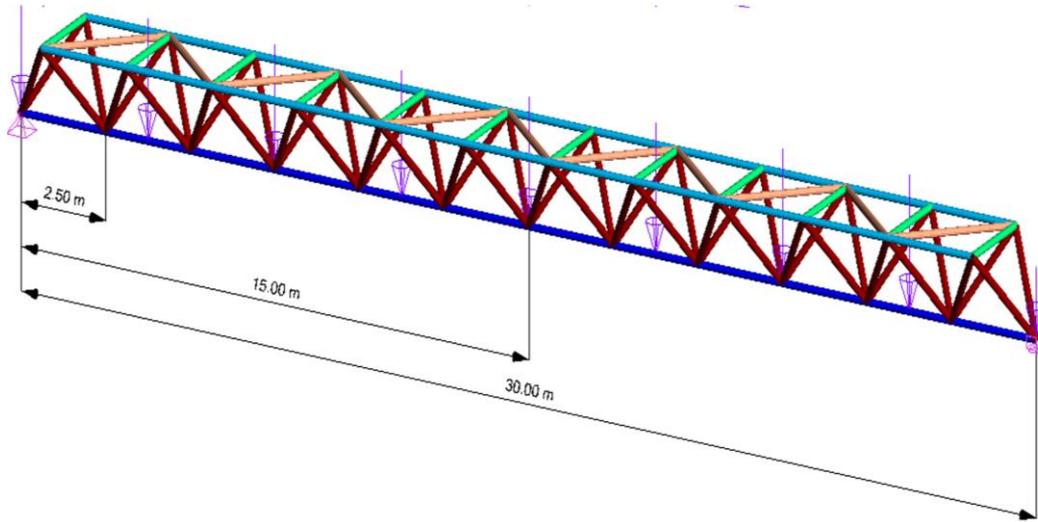
- Aucun coefficient partiel de sécurité ne sera pris en compte.
- Limite d'élasticité de l'acier : $f_y = 235 \text{ MPa}$
- Module de Young de l'acier : $E = 210\,000 \text{ MPa}$
- Module de cisaillement de l'acier : $G = 80\,000 \text{ MPa}$

Force critique d'Euler

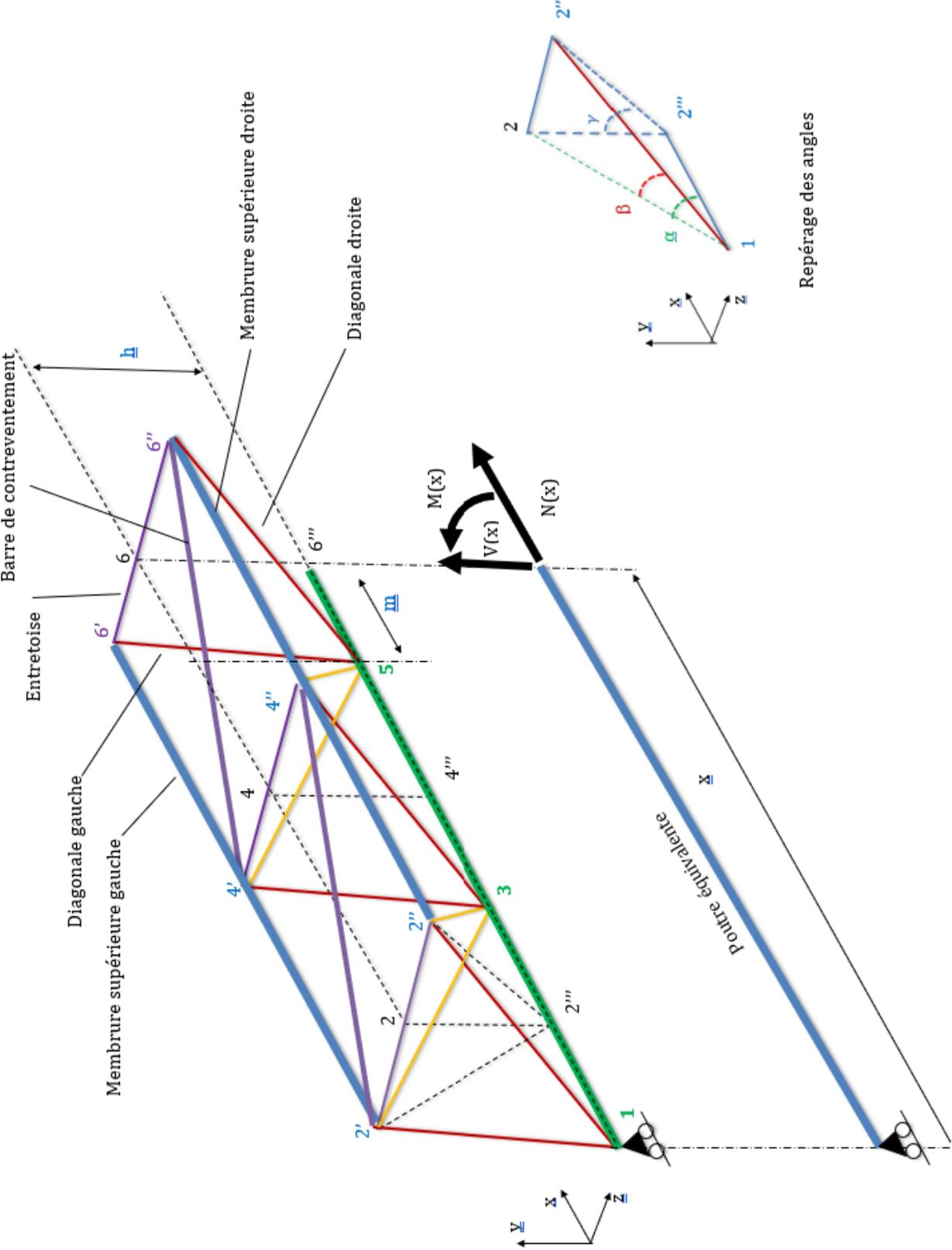
$$P_{cr} = E \cdot I \cdot \left(\frac{\pi}{L_f}\right)^2$$

- Module de cisaillement de l'acier : $G = 80\,000 \text{ MPa}$
- Moment quadratique d'inertie de la section droite : I
- Longueur de flambement : L_f

Repérage des barres et des nœuds la poutre métallique en treillis 3 D



α	0,675 rad
β	0,346 rad
γ	0,524 rad



Théorème de Pasternak

$$\delta_i = \int_0^L \left\{ \frac{N \cdot \bar{N}^*}{E \cdot A} + \frac{V \cdot \bar{V}^*}{G \cdot A'} + \frac{M \cdot \bar{M}^*}{E \cdot I} \right\} \cdot dx$$

Où :

- N, V, M sont les sollicitations générées par le chargement ;
- $\bar{N}^*, \bar{V}^*, \bar{M}^*$ sont les sollicitations générées par la force fictive unitaire F^* appliquée au point i dans la direction du déplacement δ_i sur une structure isostatique associée ;
- E est le module de Young ;
- G est le module de cisaillement ;
- A est l'aire de la section droite ;
- I est le moment quadratique de la section ;
- A' est la section réduite de la section droite.

La section réduite de la section droite est déterminée par la formule :

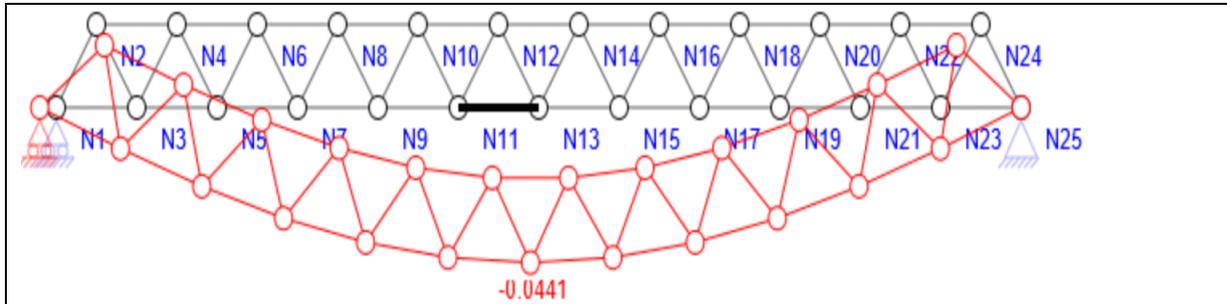
$$A' = \frac{I^2}{\iint_A \frac{S^2}{b^2} \cdot dA} = \frac{I^2}{\int_y \frac{S^2}{b} \cdot dy} = \frac{A}{\kappa}$$

Où κ est le facteur de cisaillement :

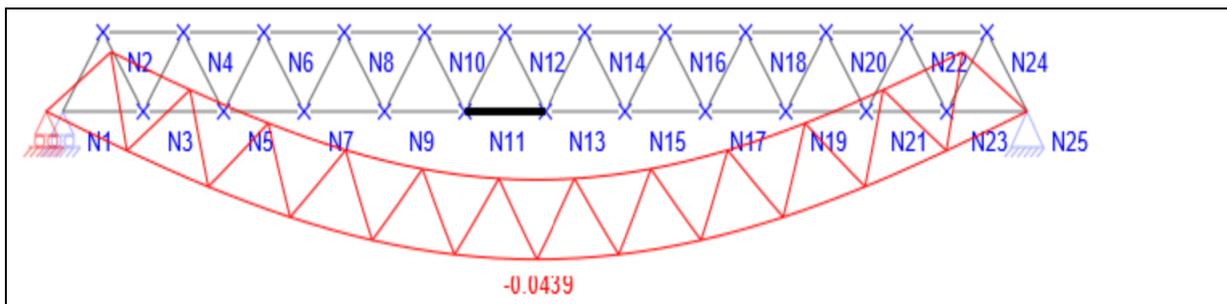
- $\kappa = 1,2$ pour une section rectangulaire,
- $\kappa = 2$ pour un tube circulaire creux,
- $\kappa \approx 2,5$ pour une section en I.

Résultats de logiciels de calcul de structure

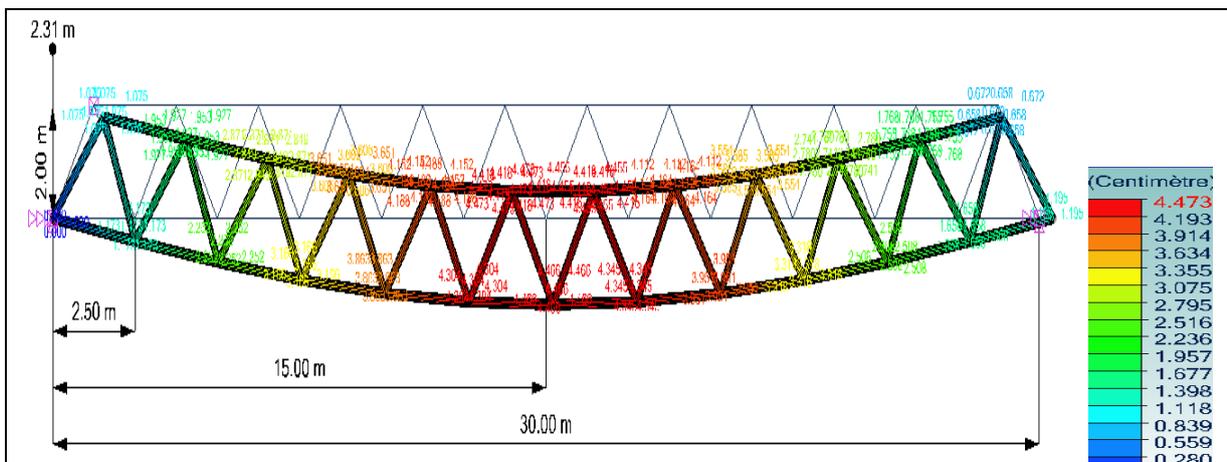
Un calcul sur le modèle poutre en treillis 2D avec introduction de rotules internes aux nœuds (les diagonales ont une section 2A en première approximation) donne une flèche de 44,12 mm.



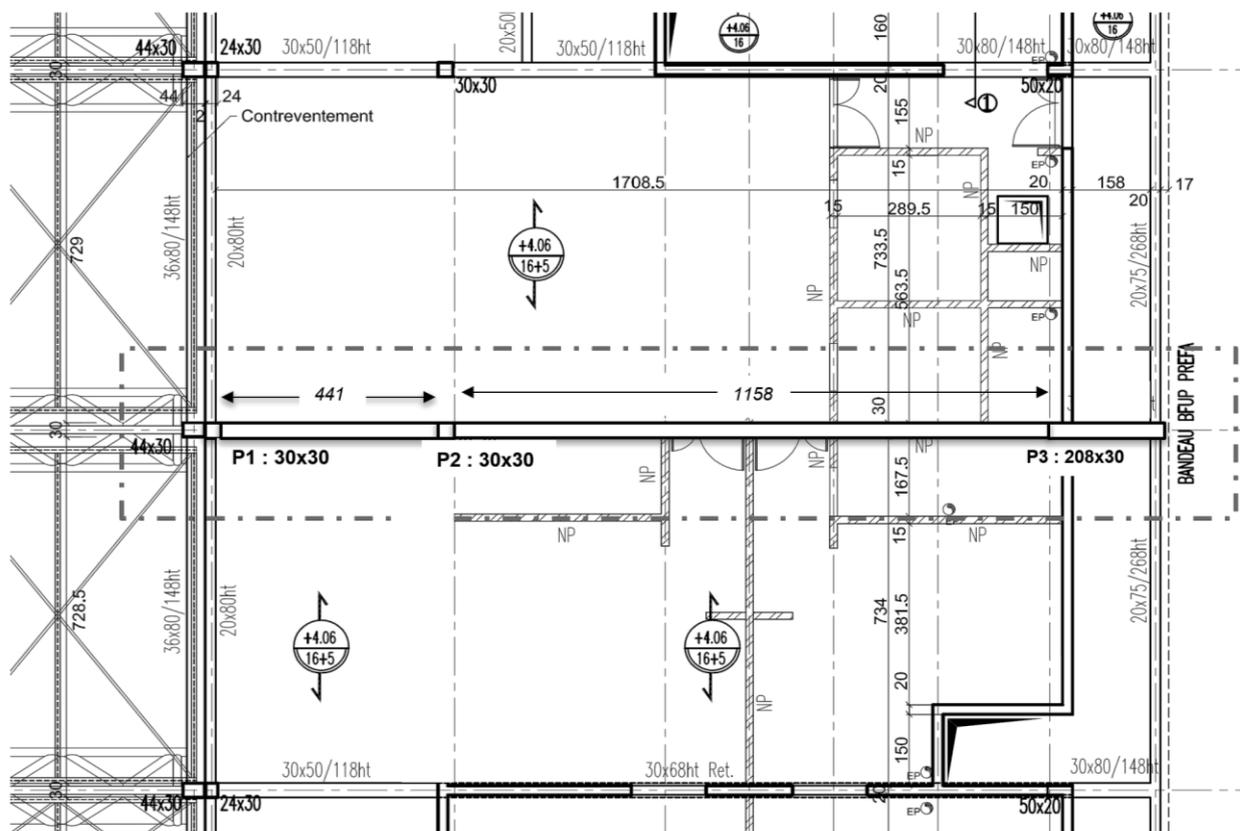
Un calcul sur le modèle poutre en treillis 2D (les diagonales ont une section 2A en première approximation) donne une flèche de 43,9 mm.



Un calcul sur le modèle poutre en treillis 3D donne une flèche à mi travée de 44,73 mm.



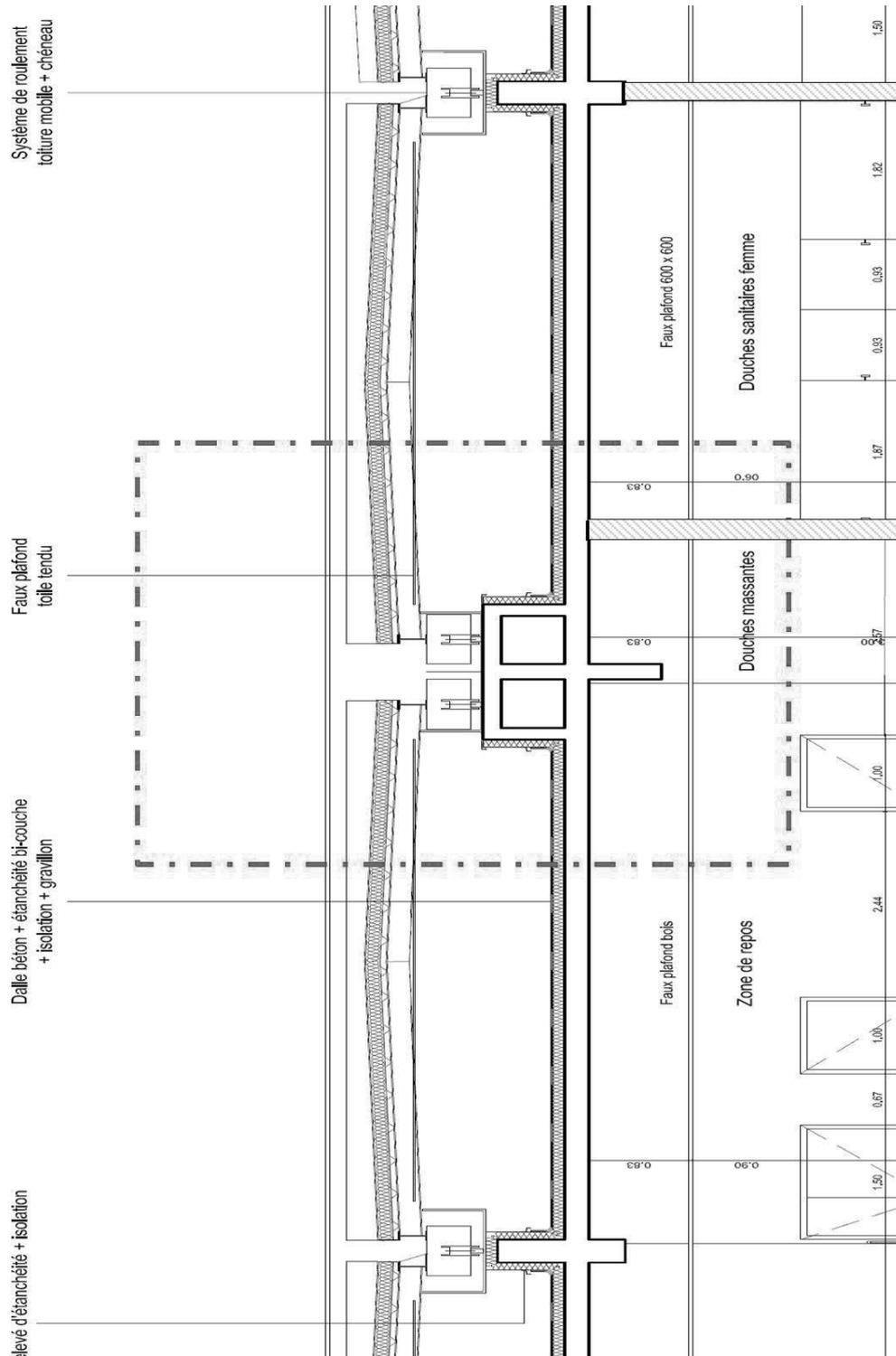
Repérage de la poutre continue en béton armé



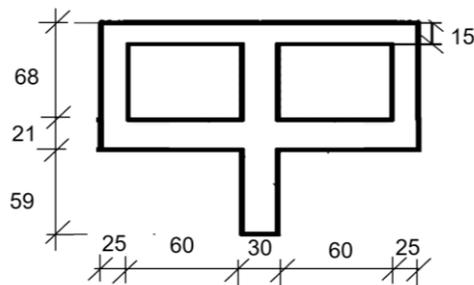
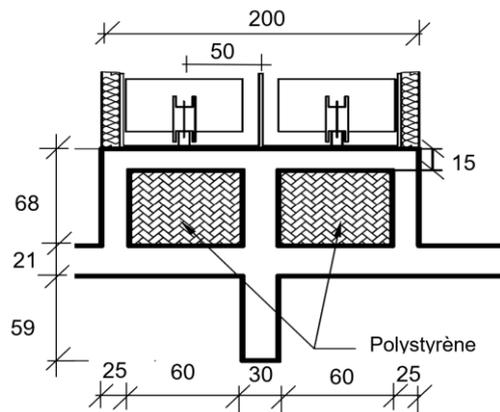
Portées de calcul de la poutre continue en béton armé

Hauteur de poutre	h	148 cm
Profondeur appui	t1	30 cm
Profondeur appui	t2	30 cm
Profondeur appui	t3	208 cm
Portée en nus	Ln1	441 cm
Portée en nus	Ln2	1 158 cm
Portée de calcul	L1	471 cm
Portée de calcul	L2	1 247 cm

Repérage et caractéristiques de la section de poutre en béton armé



Section droite de la poutre continue en béton armé



Aire	A	1,160 m ²
Distance à la fibre supérieure	v	0,559 m
Distance à la fibre inférieure	v'	0,921 m
Moment quadratique	I	0,180 m ⁴

Caractéristiques mécaniques du béton et de l'acier

- Aucun coefficient partiel de sécurité n'est pris en compte.
- Limite d'élasticité de l'acier : $f_y = 500$ MPa
- Module de Young de l'acier : $E_s = 200\,000$ MPa
- Résistance du béton en compression : $f_c = 30$ MPa
- Résistance du béton en traction : $f_{ct} = 2$ MPa
- Coefficient d'équivalence entre l'acier et le béton : $n = E_c/E_s = 15$

Document technique DT10

Formule des trois moments dans le cas d'une poutre à EI constante chargée uniformément

$$L_{AB} \cdot M_A + 2(L_{AB} + L_{BC}) \cdot M_B + L_{BC} \cdot M_C = 6 \cdot EI \cdot (\theta_{Bd} - \theta_{Bg}) + 6 \cdot EI \cdot (\Omega_{BC} - \Omega_{AB})$$

- L_{BC} (respectivement L_{AB}) : longueur de la travée BC (respectivement AB)
- $\theta_{Bd} = -\frac{p_{BC} \cdot L_{BC}^3}{24 \cdot EI}$: rotation de la travée isostatique à droite de l'appui B
- $\theta_{Bg} = \frac{p_{AB} \cdot L_{AB}^3}{24 \cdot EI}$: rotation de la travée isostatique à gauche de l'appui B
- p_{BC} (respectivement p_{AB}) : charge linéique uniforme (vers le bas) sur la travée BC (respectivement AB)
- $\Omega_{BC} = \frac{v_C - v_B}{L_{BC}}$ et $\Omega_{AB} = \frac{v_B - v_A}{L_{AB}}$
- v_A (respectivement v_B et v_C) : tassement de l'appui A (respectivement B et C)

Document technique DT11

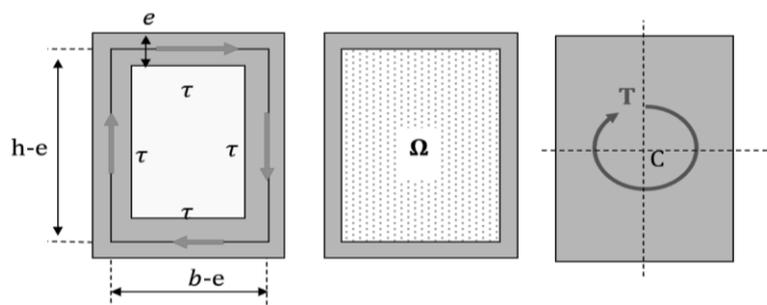
Formule de Jouravski

$$\tau(x, y) = \frac{S(x, y)}{b(x, y) \cdot I(x)} \cdot V(x)$$

- $\tau(x, y)$: contrainte de cisaillement
- $b(x, y)$: largeur de la section
- $I(x)$: moment quadratique d'inertie de la section
- $S(x, y) = \iint y \cdot dA$: moment statique de la section

Document technique DT12

Formule du flux de cisaillement de torsion



$$\tau \cdot e = \frac{T}{2 \cdot \Omega}$$

- C : centre de torsion
- T : moment de torsion
- Ω : aire de la section « pleine » à mi-feuillet = $(b - e) \cdot (h - e)$
- L : périmètre de la cellule
- e : épaisseur de la section creuse
- τ : cisaillement

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

