

**SESSION 2025**

---

**AGRÉGATION  
CONCOURS EXTERNE**

**Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR**

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR  
ET INGÉNIERIE MÉCANIQUE**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ  
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

---

*Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier. Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire**

**Tournez la page S.V.P.**

A

### INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1414A	102	2680





## Modélisation d'une plate-forme de rééducation vestibulaire

### 1. Contexte

#### a. Présentation générale

Chez certaines personnes, les troubles de la fonction vestibulaire peuvent entraîner des sensations de pertes d'équilibre. En effet, le système vestibulaire de l'oreille interne est responsable de l'équilibre et de l'orientation dans l'espace. Un dysfonctionnement de cet organe sensoriel provoque des vertiges incontrôlables et parfois lourds de conséquences pour les personnes qui en souffrent.

Afin de soigner ces troubles, l'entreprise Grassoise Framiral a développé et breveté la plateforme **Multitest Balance Control**. Elle est utilisée par le personnel médical pour effectuer des bilans vestibulaires et des exercices ciblés de rééducation.

Les bilans vestibulaires consistent à analyser l'équilibre du patient quand la vue et/ou la sensation de stabilité du sol sont modifiés. Ainsi, la plateforme **Multitest Balance Control** permet de réaliser des tests faisant varier la stabilité du sol afin de diagnostiquer les troubles de l'oreille interne (Figure1).

La plateforme permet également, par des mouvements contrôlés du plateau, de réaliser des exercices de rééducation.

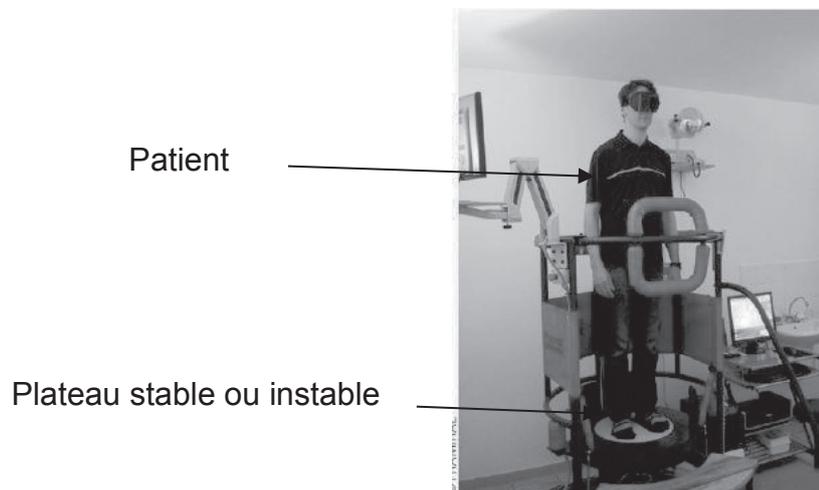


Figure 1 - exemple de test en vue occultée

#### b. Exigence globale du système

Les principales exigences de ce système pour un usage en test ou en rééducation sont définies sur la Figure 2.

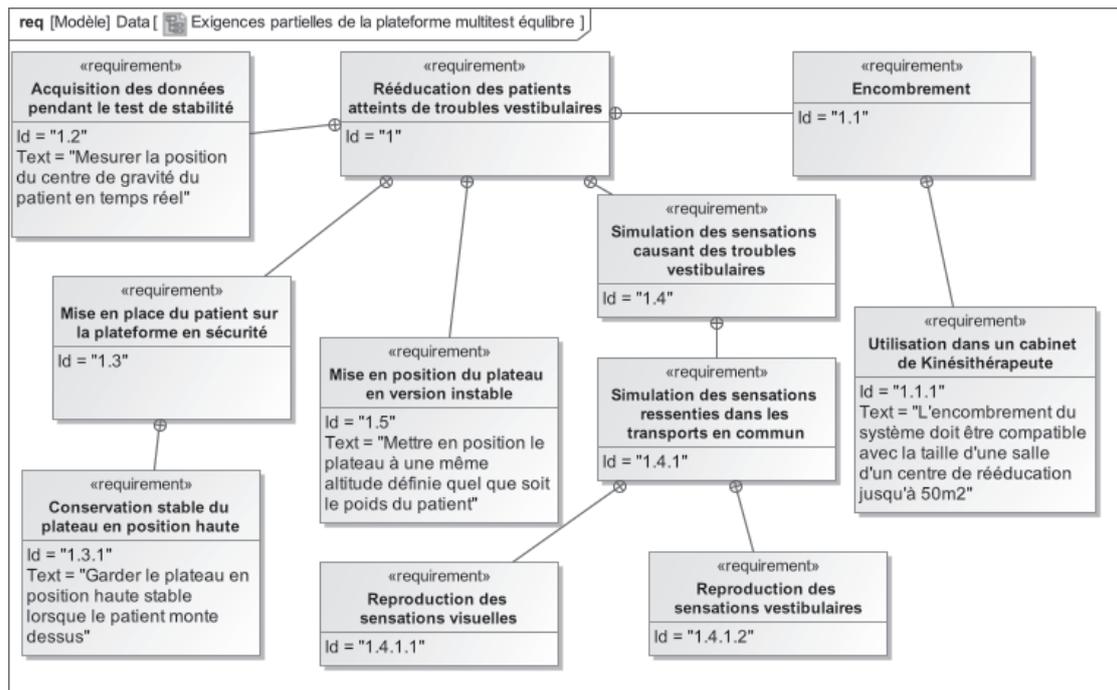


Figure 2 - Diagramme partiel des exigences de la plateforme Multitest Balance Control

### c. Architecture globale du système

La plateforme Multitest Balance Control est composée de six sous-ensembles (Figure 3) :

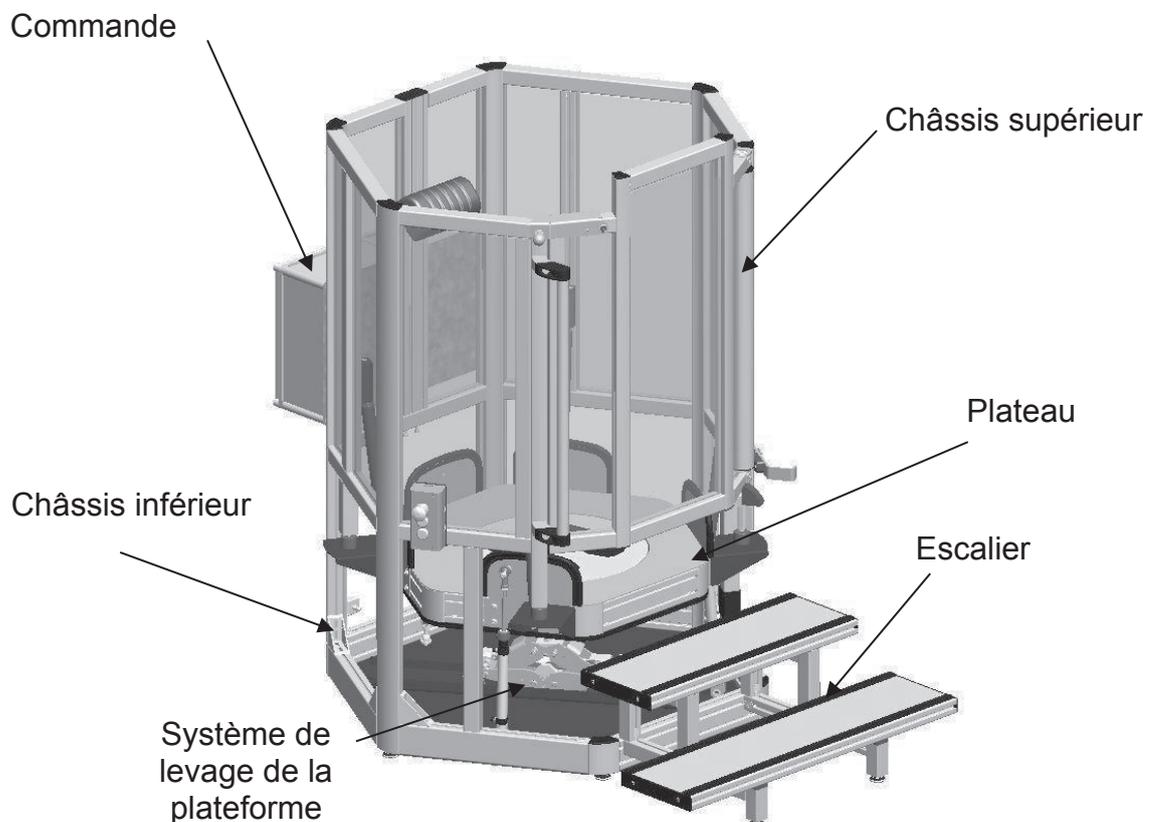


Figure 3 - Plateforme Multitest Balance Control

Pour permettre au patient de monter sur le système, le plateau est maintenu en position haute et stable par le système de levage. Le patient accède ensuite au plateau par l'escalier. Le châssis supérieur le protège des chutes. Au cours des phases de test, le plateau est suspendu par des ressorts et peut être mis en mouvement par l'intermédiaire de vérins pneumatiques verticaux et horizontaux.

#### **d. Présentation des problématiques et de l'objectif général du sujet**

Le sujet porte sur l'étude des performances de la plateforme de rééducation vestibulaire respectant les exigences données par le diagramme en Figure 2.

Les parties composant ce sujet ont pour objectif de valider la structure retenue pour la plateforme **Multitest Balance Control** au regard des exigences suivantes décrites sur la Figure 2.

- Maintenir le plateau en position haute stable sans détérioration du système (exigence 1.3.1, Partie 2).
- Atteindre toutes les positions verticales du plateau quel que soit le poids du patient (Exigence 1.5 : Partie 3). La pression pneumatique des vérins verticaux sera notamment étudiée.
- Acquérir les mesures du test de stabilité (Exigence 1.2 : Partie 4).
- Vérifier le dimensionnement du support du vérin électrique (Exigence 1.3.1 : Partie 5).
- Mettre en œuvre un test de reproduction des sensations vestibulaires ressenties dans les transports en commun (Exigence 1.4.1.2). Pour cela on conduira :
  - une étude dynamique pour prévoir le comportement mécanique de la plate-forme capable de restituer les sensations dans les transports en commun (Partie 6) ;
  - une étude de l'asservissement du système pour contrôler la dynamique de la plateforme dans le cadre de cet essai (Partie 7).
- Synthétiser les résultats pour conclure vis-à-vis des différentes études menées (Partie 8).

## 2. Immobilisation du plateau

### a. Présentation globale du système de levage (exigence 1.3.1)

Pour tout bilan ou soin médical, l'accueil du patient dans la machine doit se faire avec le plateau en position haute et stable. Cette position est conservée pour tous les tests à plateau stable, elle est atteinte grâce à un système de levage.

Plusieurs versions de ce système de levage ont été développées par l'entreprise Framiral. La Figure 4 présente la première version de la plateforme Multitest équipée d'un système de levage appelé "quatre barres".

Lors de la mise en position haute, le plateau soulevé par un vérin électrique vient en butée sur quatre plots antivibratoires appelés silent blocs (Figure 4).

L'étude consiste, ici, à analyser cette solution de levage suivant deux problématiques correspondant à la vérification de l'exigence 1.3.1.

- Vérification du dimensionnement du vérin électrique.
- Vérification du dimensionnement de la liaison entre le système de levage et le plateau.

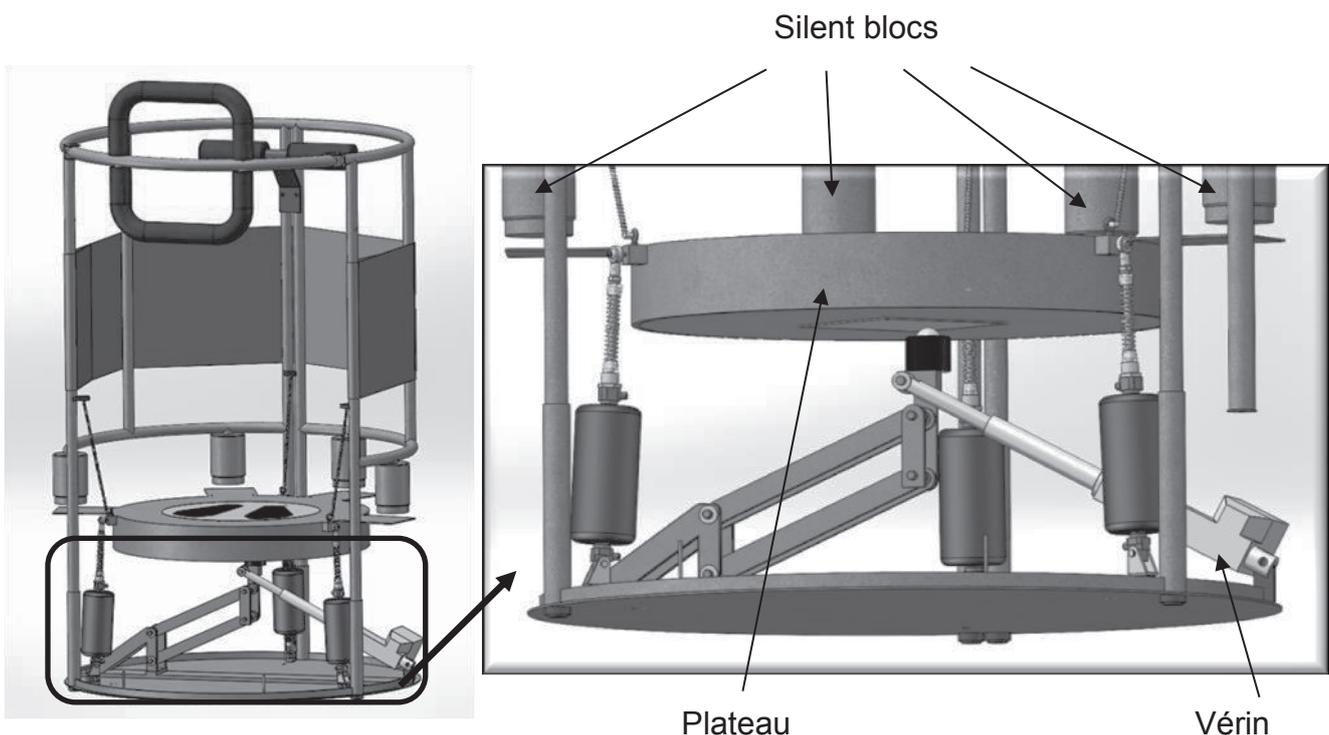
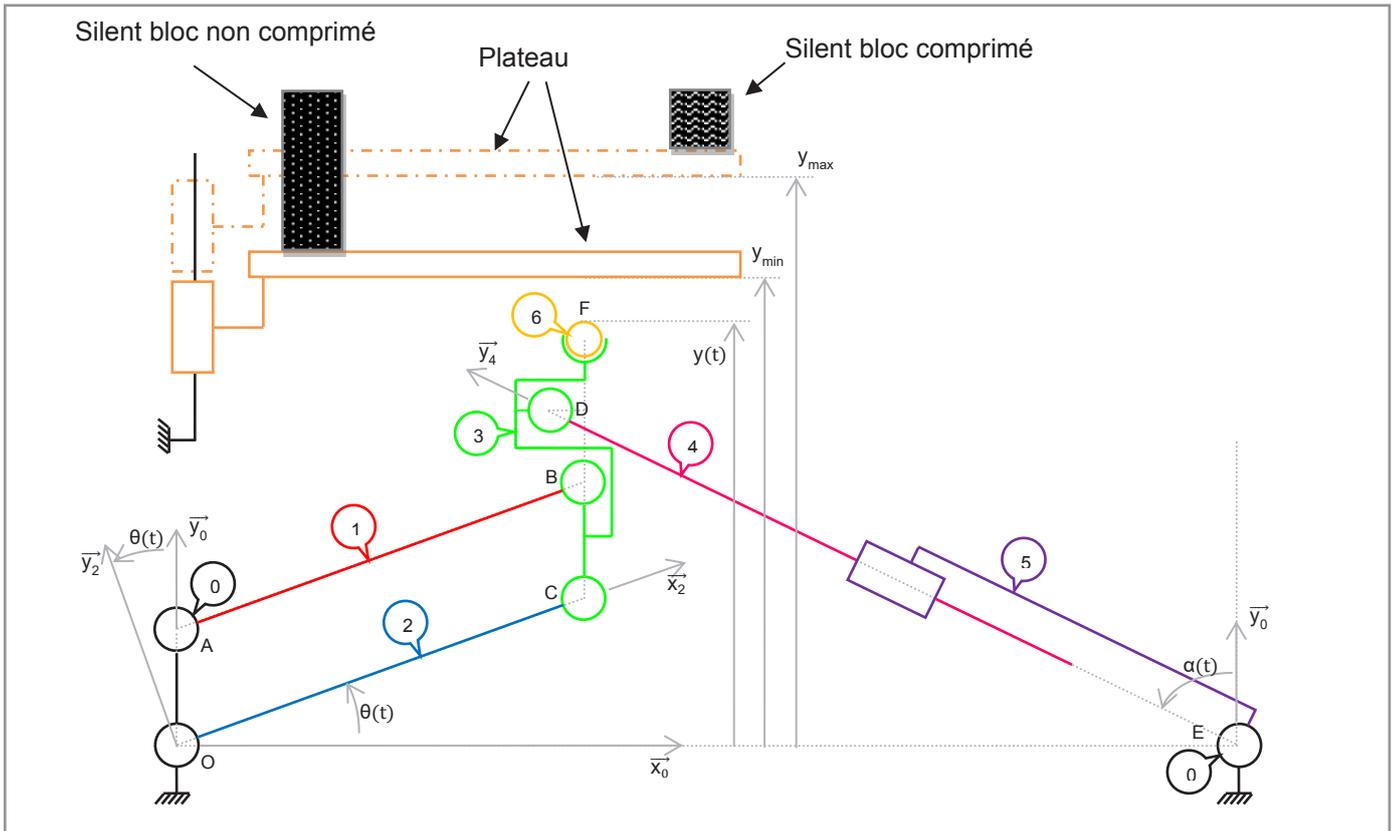


Figure 4 - Système de levage type "quatre barres"



**Figure 5 - Schéma cinématique du système de levage (non représenté à l'échelle)**

Le schéma cinématique du système de levage est donné sur la Figure 5. Il est constitué d'un vérin électrique (4+5) et d'un système "quatre barres" (0+1+2+3). La tige du vérin 4 est reliée au système "quatre barres" au point D. La sortie de la tige 4 permet ainsi de positionner le point F, sommet de la sphère 6, en contact avec le plateau pour le soulever. Le plateau translate verticalement jusqu'à entrer en contact avec les silent blocs. On définit alors deux positions particulières du plateau :

- $y_{min}$  : le plateau touche les silent blocs et ceux-ci ne sont pas comprimés.
- $y_{max}$  : le plateau comprime les silent blocs au maximum.

Hypothèses et paramétrage du système :

- On note  $B_i$  les bases  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  attachées aux solides  $i$  avec  $i \in [1, 2, 3, 4, 5]$  et  $B_0 = B_3$ ,  $B_1 = B_2$ ,  $B_4 = B_5$  ;
- Le paramétrage angulaire est :  
 $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = \theta(t)$  ;  $(\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4) = \alpha(t)$ .
- Le paramétrage dimensionnel est:  
 $\vec{AB} = L_1 \cdot \vec{x}_1$  ;  $\vec{OC} = L_2 \cdot \vec{x}_2$  ;  $\vec{OA} = L_3 \cdot \vec{y}_0$  ;  $\vec{CB} = L_3 \cdot \vec{y}_0$  ;  $\vec{CF} = H \cdot \vec{y}_0$  ;  $\vec{ED} = \lambda \cdot \vec{y}_4$  ;  
 $\vec{OE} = L_0 \cdot \vec{x}_0$  ;  $\vec{DC} = a \cdot \vec{x}_0 - b \cdot \vec{y}_0$  ;  
avec  $a = 25$  mm ;  $b = 130$  mm ;  $L_0 = 736$  mm ;  $H = 200$  mm ;  $y_{min} = 330$  mm ;  
 $L_1 = L_2 = 304$  mm ;  $L_3 = 80$  mm
- La longueur limite supérieure du vérin est de  $\lambda_{lim} = 560$  mm.
- Le problème est considéré comme plan. Les poids propres des solides du système de levage sont négligés devant les efforts mis en jeu. La masse du plateau est de  $M = 50,7$  kg. On néglige l'action des ressorts verticaux (non représentés sur le schéma cinématique Figure 5).
- L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup>.

## b. Modélisation des actions mécaniques nécessaires au dimensionnement du vérin

**Objectif de l'étude** : déterminer l'action mécanique que doit fournir le vérin au système "quatre barres" dans le cas le plus défavorable (exigence 1.3.1).

### Question 1

Réaliser le graphe des liaisons du système de levage seul, c'est à dire sans le contact avec le plateau.

### Question 2

Indiquer, sans calcul, le mouvement du solide 3 par rapport au bâti 0.

### Question 3

Déterminer les coordonnées  $x_F(t)$  et  $y_F(t)$  de la trajectoire du point F par rapport au repère  $R_0$  en fonction de  $\theta(t)$  et des autres paramètres géométriques du système. Quelle est la nature de la trajectoire suivie par le point F ?

### Question 4

Déterminer littéralement et numériquement la valeur de  $\theta$  appelée  $\theta_{\min}$  pour laquelle le point F entre en contact avec le plateau lorsqu'il est à la position  $y(t)=y_{\min}$ .

### Question 5

À partir de la documentation technique des silent blocs fournie en annexe a, déterminer l'écrasement (ou flèche) maximal admissible d'un silent bloc référencé 511157. En déduire la valeur numérique de  $y_{\max}$ .

### Question 6

Calculer la valeur numérique de l'angle  $\theta_{\max}$  correspondant à la position  $y_{\max}$ .

### Question 7

Exprimer la loi entrée-sortie entre les paramètres  $\lambda$  et  $\theta$ , sous la forme  $\lambda=f(\theta)$ .

### Question 8

Déterminer la longueur du vérin  $\lambda_{\max}$ . Conclure quant à la capacité du vérin à atteindre  $\lambda_{\max}$ .

### Question 9

Calculer la résultante de l'action mécanique globale maximale créée par l'ensemble des quatre silent blocs dont les caractéristiques techniques sont fournies en annexe a. Cette résultante est appelée  $F_{sb}$ .

Pour les questions 10 et 11, l'action mécanique d'un solide i sur un solide j au point K

est notée :  $\{T_{i \rightarrow j}\}_K = \left\{ \begin{array}{l} \vec{K}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{K,i \rightarrow j} \end{array} \right\}_K$

### Question 10

Proposer, sans faire les calculs, une stratégie d'isolement permettant de calculer l'effort généré par le vérin lorsque le solide 6 est en contact avec le plateau.

### Question 11

Déterminer l'effort maximum généré par le vérin, appelé  $F_v$ , en fonction de  $\theta_{max}$ ,  $\alpha_{max}$  et des autres données de l'étude. Calculer numériquement cet effort pour la valeur de  $\alpha_{max}$  égale à 1,07 rad. Conclure quant à l'exigence 1.3.1. La poussée maximale du vérin étant de 6000 N.

### c. Dimensionnement du contact entre le système de levage et le plateau

**Objectif de l'étude:** vérifier le dimensionnement du contact par l'étude de la pression de contact (exigence 1.3.1).

### Question 12

Déterminer la pression maximale de contact au niveau de la liaison sphère-plan au point F (Figure 6). La théorie de Hertz sur les contacts est rappelée dans la documentation technique en annexe b. Conclure quant à l'exigence de non matage.

Données :

la sphère et la plaque d'usure sont en acier EN 100 Cr 6

- Module de Young  $E=200$  GPa
- Coefficient de poisson  $\nu=0,3$
- Limite élastique  $Re=300$  MPa
- Diamètre de la sphère  $D=40$  mm

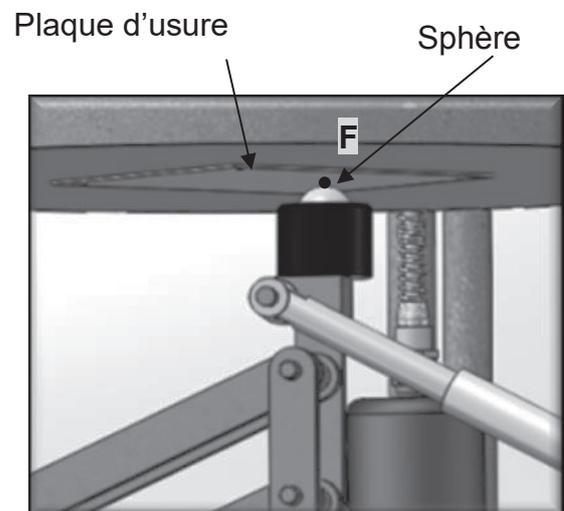


Figure 6 - Agrandissement du contact au point F

Les études précédentes ne permettant pas de pérenniser la solution du système de levage "quatre barres", l'entreprise Framiral développe la solution présentée sur la Figure 7. Cette solution est, au regard de l'exigence 1.3.1, validée par un bureau d'études et équipe la version actuelle de la plateforme.

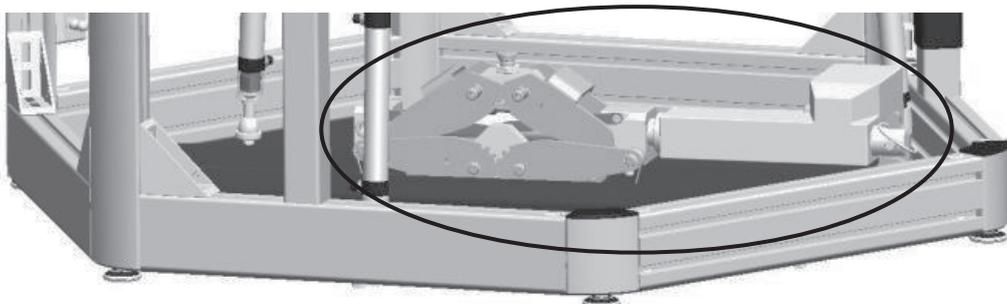
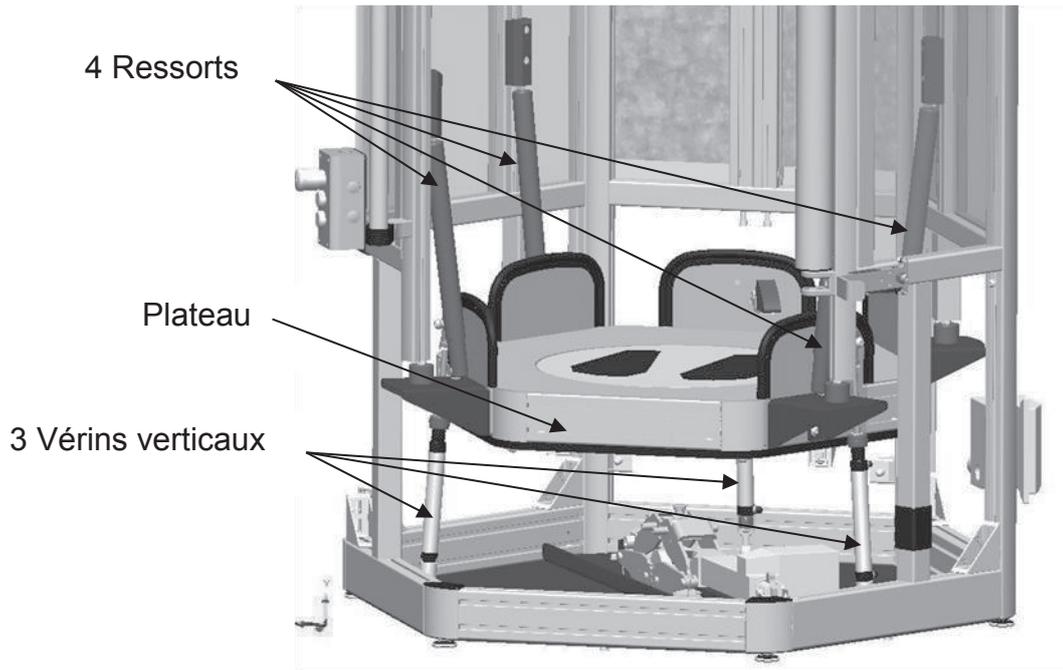


Figure 7 - Solution de levage validée

### 3. Réglage du plateau en position instable

**Objectif de l'étude** : établir la loi de commande des vérins pneumatiques verticaux pour atteindre les positions verticales définies quel que soit le poids des patients (exigence 1.5).

Le plateau peut être utilisé en version stable ou instable. Pour libérer le plateau, le système de levage s'abaisse. La position instable est atteinte lorsque le plateau, suspendu aux ressorts et sous l'effet de trois vérins verticaux, est à mi-course des vérins quel que soit le poids du patient (exigence 1.5) (Figure 8).



**Figure 8 - Mécanisme avec le plateau en version instable**

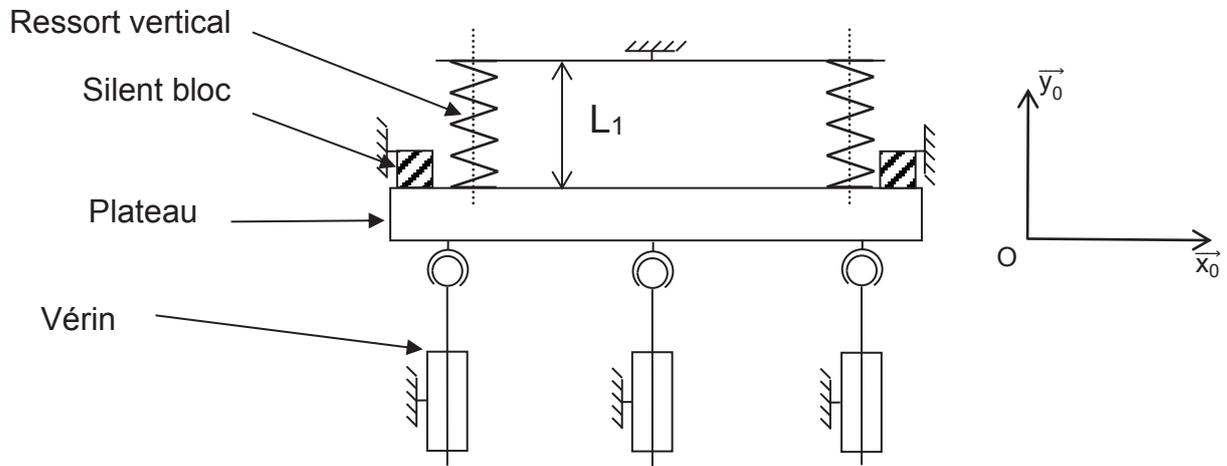
Afin d'atteindre cette position, les différentes étapes de dimensionnement suivantes sont nécessaires.

- Étape 1 : les vérins verticaux ne sont pas alimentés.  
Sous l'effet des quatre ressorts verticaux, le plateau se positionne en contact avec les quatre silent blocs. C'est la position initiale, modélisée sur la Figure 9.
- Étape 2 : les vérins verticaux sont alimentés.  
Le plateau est chargé d'une masse  $M_{\text{moy}}$  représentant la masse moyenne d'un patient, les tiges des vérins doivent être sorties à mi-course notée  $C_{\text{moy}}$ . C'est la position moyenne, modélisée sur la Figure 10.
- Étape 3 : les vérins verticaux sont alimentés.  
Le plateau est chargé d'un patient de poids  $P_{\text{patient}}$  quelconque. Les tiges des vérins doivent être sorties grâce à une pression définie. C'est la position quelconque, modélisée sur la Figure 11.

Dans l'étude proposée, on suppose le problème plan. Ainsi, les ressorts et vérins sont ramenés dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . L'accélération de la pesanteur est  $g=9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

Étape 1 : étude de la position initiale (Figure 9).

Les questions 13 et 14 portent sur l'étape 1



**Figure 9 – Plateau en position initiale**

Données et hypothèses :

- ressort : raideur  $k=2,04 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$  ; longueur à vide  $L_0=290 \text{ mm}$  ;
- masse du plateau  $m_{\text{plateau}}=50,7 \text{ kg}$  ;
- la répartition des masses est homogène ;
- les silent blocs n'étant pas écrasés ne génèrent pas d'effort.

**Question 13**

Déterminer l'effort  $\vec{F}_r$  exercé par un ressort sur le plateau lors de la configuration correspondant à l'étape 1. Faire l'application numérique.

**Question 14**

Déterminer la longueur du ressort  $L_1$  dans la configuration de l'étape 1 (Figure 9). Faire l'application numérique.

Étape 2 : étude de la position moyenne (Figure 10).

Les questions 15 et 16 portent sur l'étape 2.

Données et hypothèses :

- masse moyenne d'un patient  $M_{\text{moy}}=70 \text{ kg}$  ;
- le plateau est suspendu aux quatre ressorts verticaux ;
- les tiges sont sorties à mi-course  $c_{\text{moy}}=60 \text{ mm}$ .

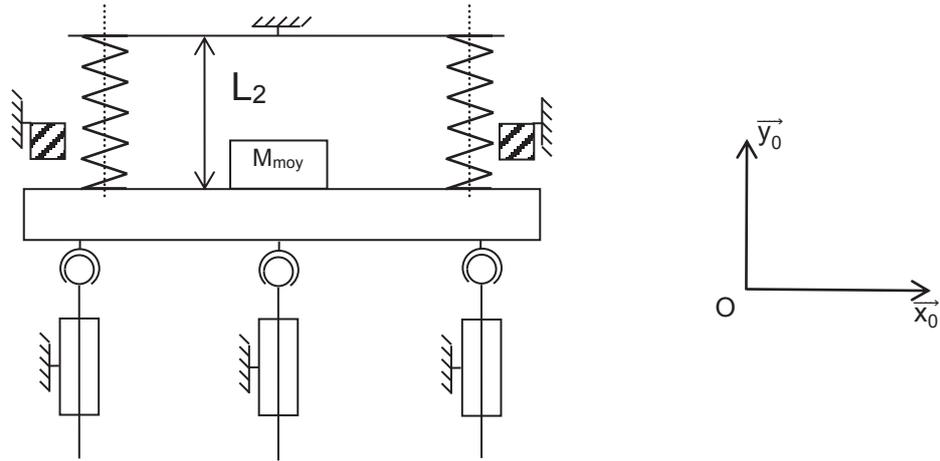


Figure 10 - plateau en position moyenne

**Question 15**

Déterminer l'effort  $\vec{F}_r$  exercé par un ressort sur le plateau lors de la configuration correspondant à l'étape 2, la longueur du ressort est  $L_1 + c_{moy}$ . Faire l'application numérique.

**Question 16**

Déterminer l'effort  $\vec{F}_v$  exercé par un vérin sur le plateau dans la configuration de l'étape 2, le vérin agit-il en poussant ou en tirant ?

Étape 3 : étude de la position quelconque (Figure 11).

Les questions 17 à 20 portent sur l'étape 3.

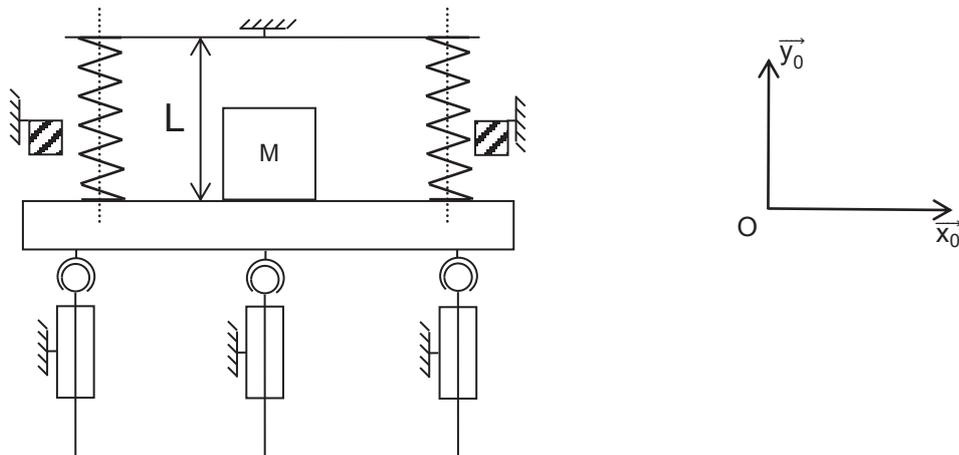


Figure 11 - Plateau en position quelconque

**Question 17**

Déterminer l'effort  $\vec{F}_v$  que doit fournir le vérin pour maintenir le plateau en position moyenne, en fonction du poids patient  $P_{\text{patient}}$ .

**Question 18**

La masse du patient maximale autorisée étant de 135 kg, tracer la courbe  $F_v(M)$ ,  $M$  étant la masse du patient. Placer sur cette courbe le point particulier correspondant au patient de masse moyenne.

**Question 19**

Commenter cette courbe.

**Question 20**

En déduire la pression maximale, en bars, à fournir au vérin dans le cas le plus défavorable. Commenter l'ordre de grandeur trouvé.

Données et hypothèses :

- Diamètre du piston  $D=25$  mm, diamètre de la tige  $d=10$  mm.
- On appliquera un taux de charge  $t_c$  égal à 80%. On rappelle que le taux de charge, en pourcentage, est le rapport entre la charge réelle à déplacer par le vérin et l'effort disponible en bout de tige.

#### 4. Test de stabilité

**Objectif :** extraire des mesures d'effort les mesures stabilométriques en plateau stable (exigence 1.2)

Afin de réaliser des tests de stabilité (stabilométrie), la plateforme **Multitest Balance Control** est équipée d'un système de mesure inséré dans le plateau (Figure 13). Celui-ci permet de déterminer, sur la durée du test :

- la position de la projection du centre de gravité G du patient dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  ;
- la surface maximale dans laquelle cette projection se déplace ;
- la longueur de la trajectoire de cette projection, appelée statokinesigramme (espèce de pelote visible sur la Figure 12).

Pour déterminer en temps réel la position du centre de gravité G du patient, le système est équipé d'un module de mesure d'effort positionné entre le plateau inférieur et le plateau supérieur (Figure 13). La structure du module est constituée de trois capteurs d'effort indépendants (non représentés). Son modèle mécanique est une association de trois liaisons en parallèle à  $120^\circ$  (Figure 14). Les capteurs mesurent les efforts dans les liaisons aux points  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ . Lors du test, le patient se positionne sur le plateau supérieur. Les mesures des capteurs sont relevées par un logiciel d'acquisition puis traitées afin d'obtenir les informations souhaitées par le médecin.

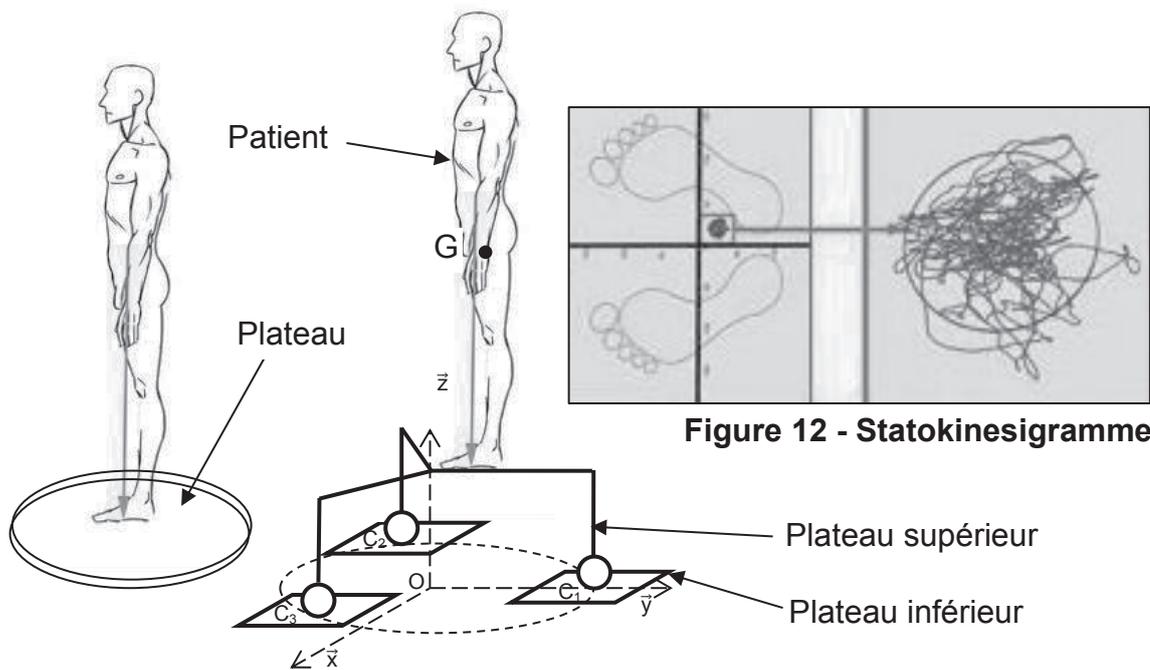


Figure 13 - Système de mesure

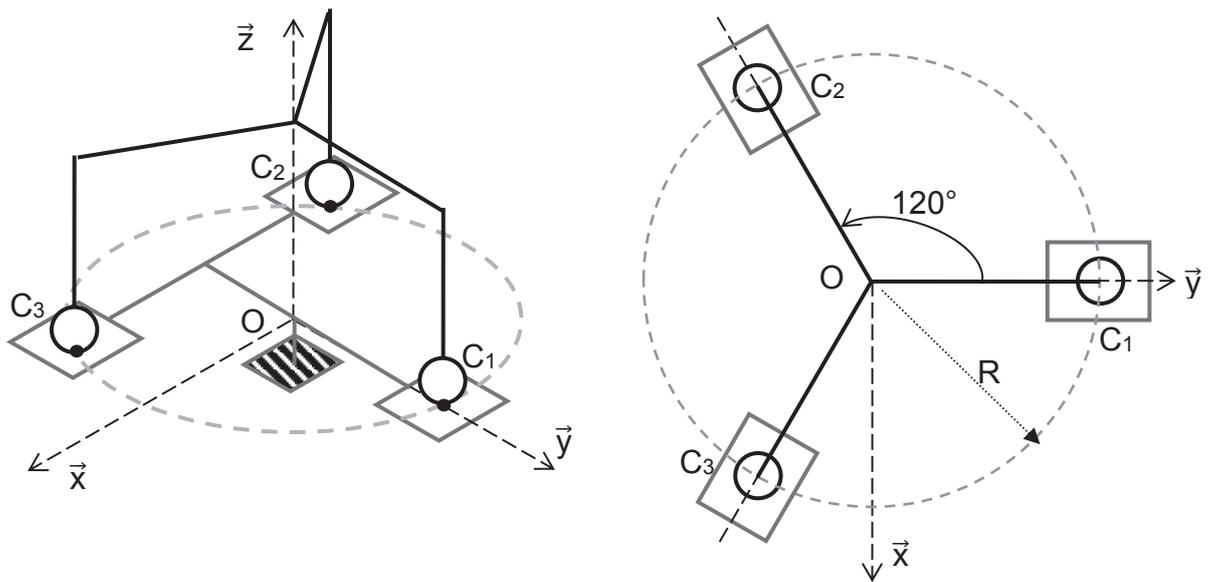


Figure 14 - Schéma cinématique du système de mesure

Hypothèses et données :

- Le plateau inférieur est immobile par rapport au châssis.
- Les liaisons sont supposées parfaites.
- Les actions mécaniques sont exprimées sous la forme suivante, en un point

$$\text{quelconque } D_i : \{T_{\text{solide1} \rightarrow \text{solide2}}\}_{D_i} = \begin{Bmatrix} \vec{D}_i \\ \vec{M}_{D_i} \end{Bmatrix}_{D_i} = \begin{Bmatrix} X_i \vec{x} + Y_i \vec{y} + Z_i \vec{z} \\ L_i \vec{x} + M_i \vec{y} + N_i \vec{z} \end{Bmatrix}_{D_i}, \quad i \in [1, 2, 3]$$

- $\{T_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{patient}}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{P}_{pa} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$ , G étant le centre de gravité du patient.
- $\{T_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{plateau supérieur}}\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{P}_{ps} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$ , O étant le centre de gravité du plateau supérieur.
- Les points  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont disposés sur un rayon R de 200 mm à  $120^\circ$  comme indiqué sur la Figure 14.
- Les coordonnées du centre de gravité du patient sont notées :

$$\vec{OG} = X_G \vec{x} + Y_G \vec{y} + Z_G \vec{z}$$

### Question 21

Exprimer dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  la forme du torseur de l'action mécanique transmissible par chaque liaison en  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .

### Question 22

À partir de l'écriture des équations d'équilibre du système {patient+plateau supérieur}, déterminer les coordonnées  $X_G$  et  $Y_G$  du centre de gravité du patient en fonction des valeurs mesurées par les capteurs  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , du rayon R et du poids du patient  $P_{pa}$ .

### Question 23

Déterminer, dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , la distance notée  $d$  entre l'origine du repère  $O$  et la projection du centre de gravité  $G$ . Le résultat sera exprimé en fonction des valeurs mesurées par les capteurs  $C_1, C_2, C_3$ , du rayon  $R$  et du poids du patient  $P_{pa}$ . Cette longueur permettra de déterminer la surface sur laquelle se déplace le centre de gravité grâce à une étude ultérieure (non traitée ici).

## 5. Étude du support du vérin

**Objectif :** vérifier la résistance et la déformation du support de vérin (exigence 1.3.1).

Le plateau est relevé par le système de levage présenté sur la Figure 15. L'actionneur est un vérin électrique positionné sur un support. Le vérin travaille en tirant à une force maximale de 4000 N. Le bon fonctionnement du système de levage nécessite une rigidité importante du support. La déformation maximale du support ne peut excéder 0,1 mm (exigence 1.3.1). On réalise une étude à partir d'un premier prototype d'après le modèle de la Figure 15.

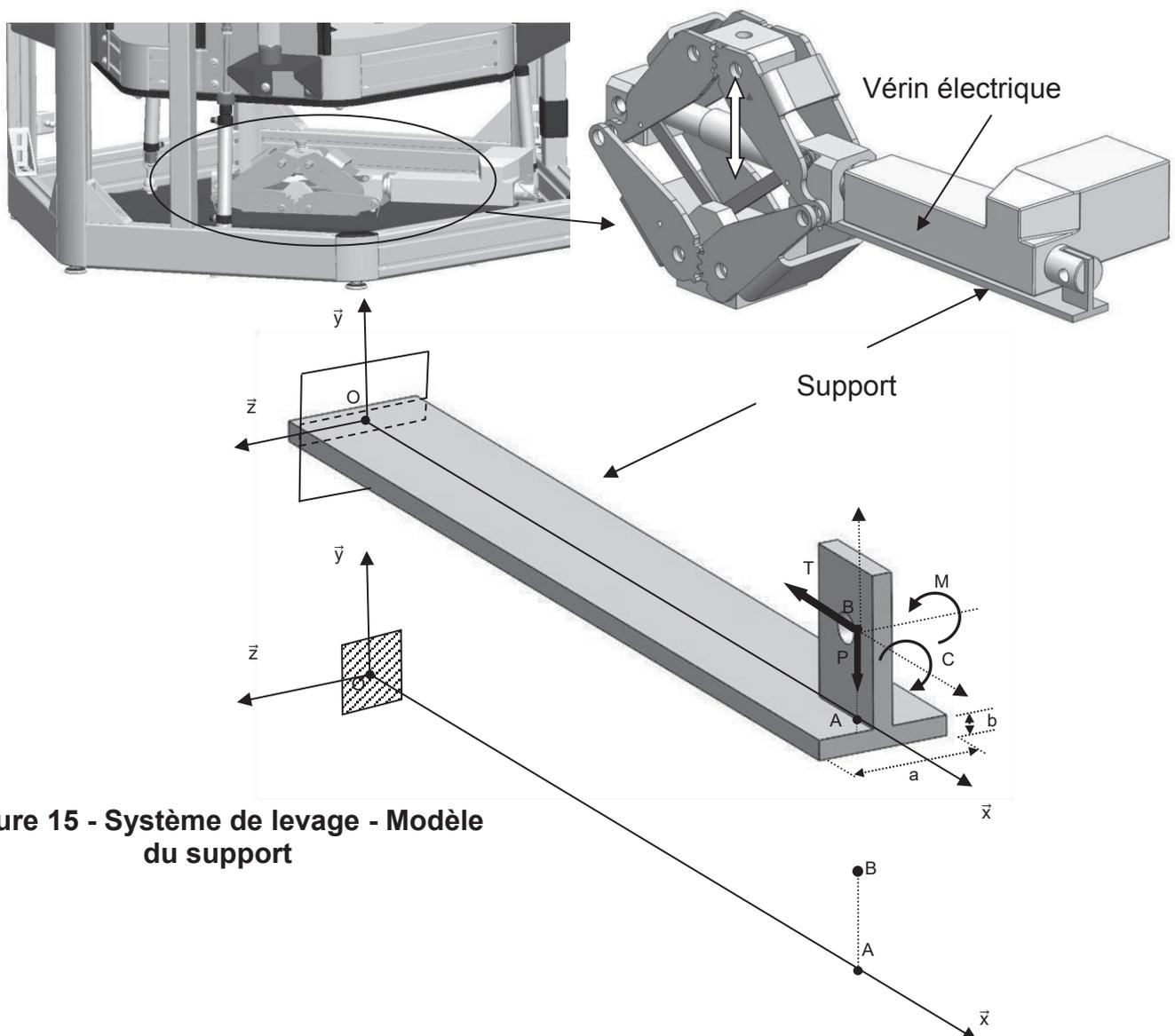


Figure 15 - Système de levage - Modèle du support

Hypothèses et données :

- Unités N et mm.
- Le support est assimilé à une poutre [OA] de section pleine rectangulaire qui présente les caractéristiques suivantes :
  - longueur :  $OA = L = 250 \text{ mm}$  ;
  - section rectangulaire :  $a \times b$ ,  $a = 40 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$  ;
  - matériau de la poutre : acier S355, limite à la rupture  $R_r = 490 \text{ MPa}$  et module de Young  $E = 210000 \text{ MPa}$ .
- On considère que la languette (située au-dessus) AB est rigide, on étudie donc uniquement la déformation de la poutre [OA],  $AB = e = 33 \text{ mm}$  ;
- Le support est encasté en O. Les actions mécaniques exercées par le vérin sur le support sont appliquées au point B et modélisées par le torseur :

$$\{T_{\text{vérin} \rightarrow \text{support}}\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = T\vec{x} + P\vec{y} \\ \vec{M}_B = C\vec{x} + M\vec{z} \end{array} \right\}_B$$

avec  $T = -4000 \text{ N}$ ,  $P = -200 \text{ N}$ ,  $C = -14000 \text{ N}\cdot\text{mm}$  ;  $M = 24000 \text{ N}\cdot\text{mm}$ .

- Le poids du support est négligé.

#### Question 24

En fonction des données du problème, exprimer le torseur des actions mécaniques exercées par le vérin sur le support au point A.

#### Question 25

Déterminer l'expression du torseur des actions mécaniques de cohésion en tout point  $G(x)$  de la fibre moyenne du support. Nommer les sollicitations que subit le support.

#### Question 26

Tracer à main levée l'évolution des composantes de l'effort tranchant  $T_y$  et du moment fléchissant  $M_z$  de ce torseur en fonction de  $x$ .

Compte tenu des valeurs numériques du moment de torsion, on ne s'intéressera, dans la suite, qu'à la contrainte normale.

#### Question 27

Dans la section la plus sollicitée, calculer la contrainte normale maximale, nommée  $\sigma_{\max}$ . Représenter, sur un dessin à main levée, la répartition des contraintes dans cette section.

#### Question 28

Déterminer l'équation de la déformée due à la flexion simple et en déduire la flèche  $f$  en A.

#### Question 29

Conclure sur le respect de l'exigence 1.3.1.

#### Question 30

Proposer une modification du prototype du support afin de respecter l'exigence 1.3.1.

## 6. Modélisation dynamique

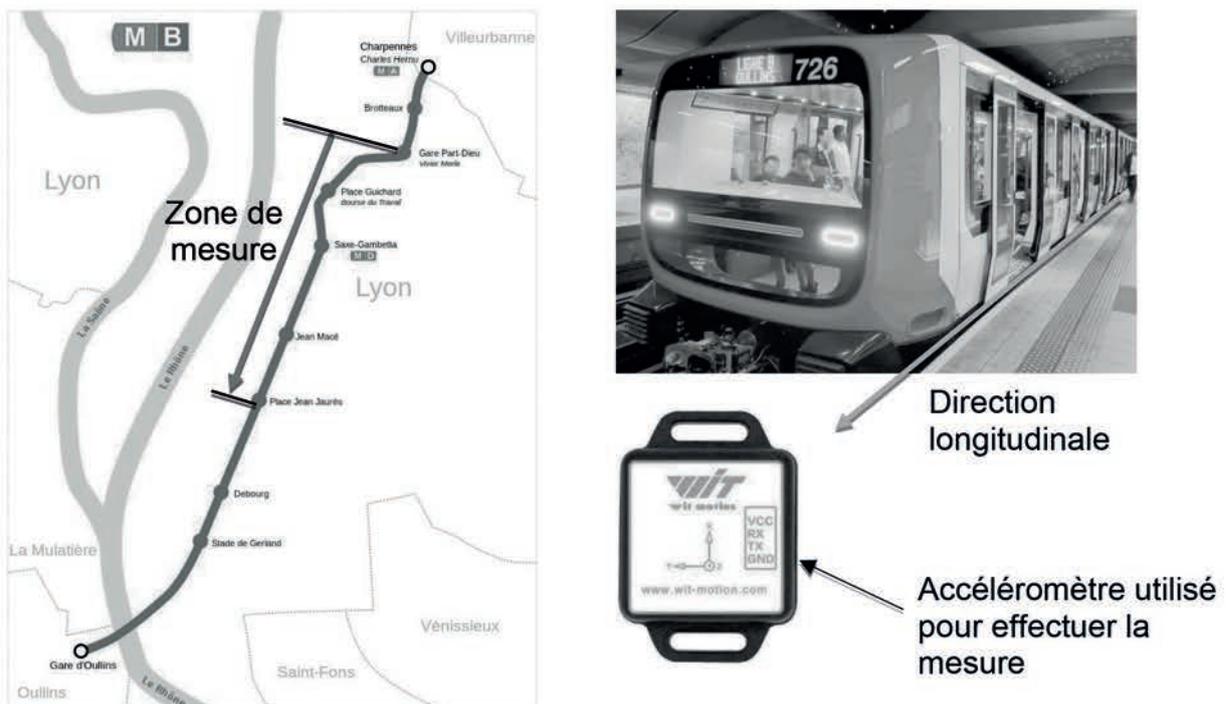
**Objectif** : déterminer le comportement dynamique de la plate-forme dans le cadre d'un test simulant les phases de démarrage dans les transports en commun

### a. Présentation du test

**Objectif** : justifier l'architecture de la plate-forme d'essai pour simuler le comportement dynamique (exigence d'encombrement Id 1.1)

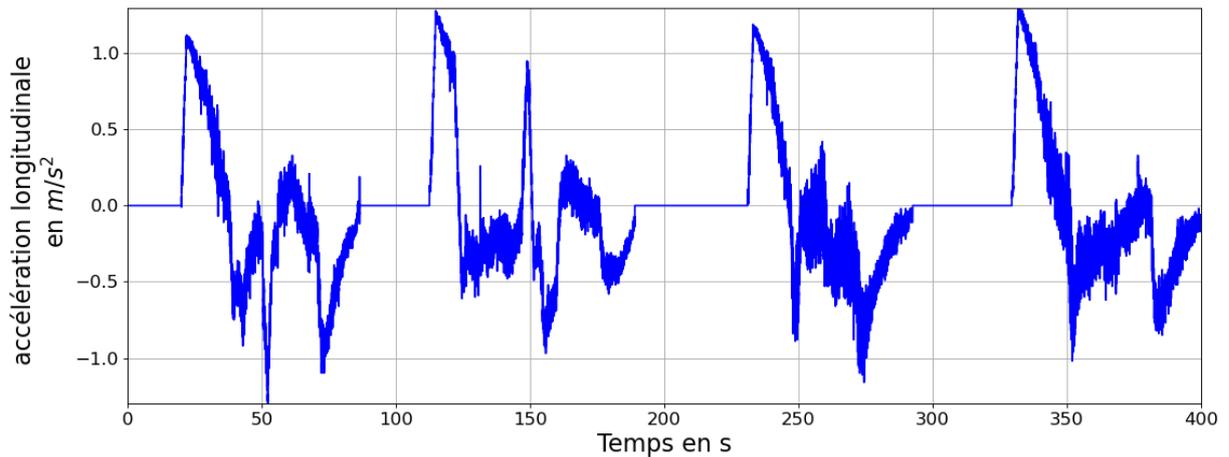
Ce test a pour but de reproduire les sensations auxquelles sera confronté un patient dans les transports en commun. Les phases critiques se produisent lors du démarrage (mise en mouvement) ou du freinage (mise à l'arrêt). On choisit ici de se focaliser sur un trajet en métro en particulier celui de la nouvelle ligne de métro (B) automatisée de la ville de Lyon (mise en service en mars 2023).

Des mesures ont été effectuées sur un trajet de métro reliant cinq stations successives (Gare de la Part-Dieu-Place Guichard-Saxe Gambetta - Place Jean Macé - Place Jean Jaurès) (Figure 16). Les accélérations longitudinales du métro au cours du temps ont été mesurées à l'aide d'un accéléromètre.



**Figure 16 - Présentation des essais réalisés sur la nouvelle ligne de métro (B) automatisée de la ville de Lyon**

Les mesures effectuées dans le métro sont données par la Figure 17.

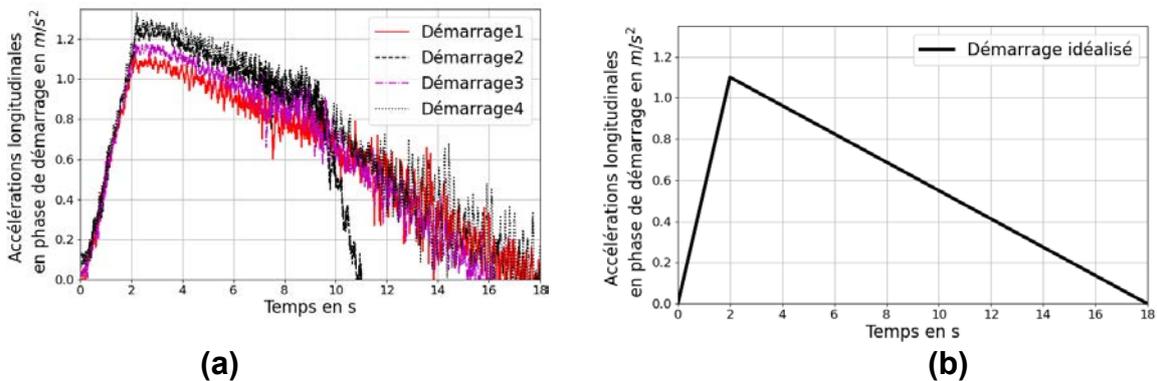


**Figure 17 - Accélération longitudinale mesurée pendant un trajet en métro entre les stations « gare de la Part-Dieu » et « place Jean Jaurès »**

**Question 31**

Décrire la courbe d'accélération longitudinale et justifier sa cohérence vis-à-vis du trajet. Relever les durées de la phase de démarrage, de freinage et d'arrêt du métro.

On se focalise dorénavant sur les phases de démarrage du métro à chaque station du trajet. Les mesures sont données par la Figure 18(a). Ces courbes sont très reproductibles et nous décidons de modéliser l'évolution de l'accélération longitudinale par deux droites définies par la Figure 18(b).



**Figure 18 - Accélération longitudinale mesurée (a) pendant les différentes phases de démarrage d'un trajet en métro entre les stations « gare de la Part-Dieu » et « place Jean Jaurès » et courbe de démarrage idéalisée (b)**

**Question 32**

Calculer la distance parcourue lors de la phase d'accélération présentée en figure 18. Conclure sur la possibilité d'utiliser un dispositif architectural avec une plate-forme en translation (exigence " Système utilisable dans un cabinet de Kinésithérapie ").

Pour pallier ce problème on peut utiliser une accélération ressentie (notée  $a_r(t)$ ). Elle peut se définir par la somme de l'accélération due au mouvement en un point proche de l'oreille interne du patient et à l'accélération de la pesanteur ( $g=9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ) selon la direction de déplacement éventuelle du patient sur la plate-forme :

$$a_r(t) = (\vec{a}(O_1, 1/0) - \vec{g}) \cdot \vec{x}_1$$

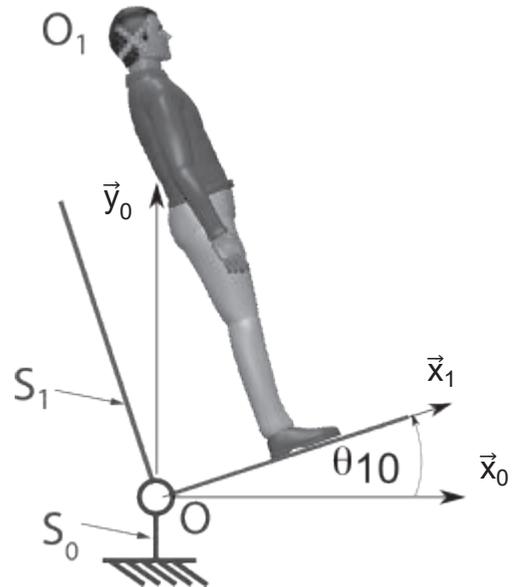
$$\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$$

Un système pendulaire, pouvant s'incliner, peut alors être utilisé. La modélisation d'un système comportant une plateforme articulée est fournie sur la Figure 19.

On suppose le patient et la plateforme comme appartenant à la même classe d'équivalence S1. On donne le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  associé au sol supposé galiléen (figure 19).

On note :

- le repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0 = \vec{z}_1)$  associé à l'ensemble  $S1 = \{\text{Plateforme} + \text{patient}\}$ .
- $\theta(t) = \theta_{10}(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- le vecteur position  $\overrightarrow{OO_1} = X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1$
- avec  $X_1 = 0,1 \text{ m}$  et  $Y_1 = 1,8 \text{ m}$



**Figure 19 - Modélisation simplifiée d'une plateforme articulée pour restituer les sensations de mouvement**

### Question 33

Déterminer l'expression de l'accélération ressentie  $a_r(t)$  en fonction de  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $\dot{\theta}_{10}(t)$  et  $\ddot{\theta}_{10}(t)$ .

On propose de tester la solution consistant à imposer une vitesse angulaire d'inclinaison de la plateforme constante sur chaque phase de démarrage. On pose alors :

$$t \in [0s, 2s] \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = \theta_{p1} \text{ et } \frac{da_r(t)}{dt} = a_{rp1} \\ t \in [2s, 18s] \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = \theta_{p2} \text{ et } \frac{da_r(t)}{dt} = a_{rp2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On pourra aussi supposer que  $\theta(t)$  va rester faible et on pourra donc faire l'hypothèse que  $\sin\theta(t) \approx \theta(t)$ .

### Question 34

En prenant en compte cette dernière hypothèse pour chaque phase du démarrage donnée par le profil de la Figure 18(b), exprimer littéralement l'accélération ressentie  $a_r(t)$  en fonction de  $X_1$ ,  $\theta_{p1}$ ,  $\theta_{p2}$ ,  $g$  et  $\theta(t)$ . Déterminer alors l'expression de sa variation

$\left(\frac{da_r(t)}{dt}\right)$  en fonction de  $\theta_{p1}$ ,  $\theta_{p2}$  et  $g$ . En déduire l'expression de  $a_{rp1}$  et  $a_{rp2}$  en fonction de  $\theta_{p1}$ ,  $\theta_{p2}$  et  $g$ .

### Question 35

À partir des résultats des deux questions précédentes, exprimer l'angle d'inclinaison de la plateforme  $\theta(t)$  en fonction de  $a_{rp1}$ ,  $a_{rp2}$ ,  $X_1$ ,  $g$  et  $t$ .

Les applications numériques ont conduit à :

pour  $t = t_1$ ,  $\theta(t_1) = 6,4^\circ$  et  $a_r(t) = -3,1 \times 10^{-4} + g \cdot \theta(t_1)$  avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

L'accélération ressentie est la somme de deux termes. Le premier provient du mouvement de la plateforme et le deuxième de l'effet de la pesanteur.

### Question 36

Comparer l'influence sur l'accélération ressentie de ces deux termes.

### Question 37

Conclure sur la méthode retenue pour piloter la plateforme afin d'assurer une restitution des sensations de démarrage du métro. Proposer une expression de  $\theta(t)$  au cours du temps et proposer la grandeur à asservir pour garantir l'exigence "Simulation des sensations causant les troubles vestibulaires" (exigence 1.4).

#### **b. Analyse de l'architecture de la plate-forme pour le test de démarrage de métro**

**Objectif** : à l'aide de l'analyse de l'architecture de la plateforme d'essai, formuler des hypothèses pour l'étude dynamique.

La Figure 20 décrit les différents composants de la plateforme intervenant dans la loi de mouvement de cette dernière.

La plateforme est composée de trois vérins pneumatiques dits « verticaux » et de deux vérins pneumatiques dits « horizontaux ». À noter que les trois vérins « verticaux » sont en fait quasi verticaux car la distance entre les points d'accroche à la plate-forme est légèrement plus petite que celle entre les points d'accroche au bâti.

Après une phase de mise en position avec le système de levage étudié par ailleurs (partie 2), et une fois le patient sur la plate-forme, les trois vérins verticaux sont alimentés à pression constante pour les maintenir à mi-course.

Les vérins horizontaux sont alors pilotés pour imposer un mouvement à la plateforme permettant de solliciter le système vestibulaire du patient.

Le patient doit alors chercher à maintenir la position de son centre de gravité la plus constante possible sur la plateforme. La projection du centre de gravité du patient est alors mesurée par le dispositif présenté dans la partie 4.

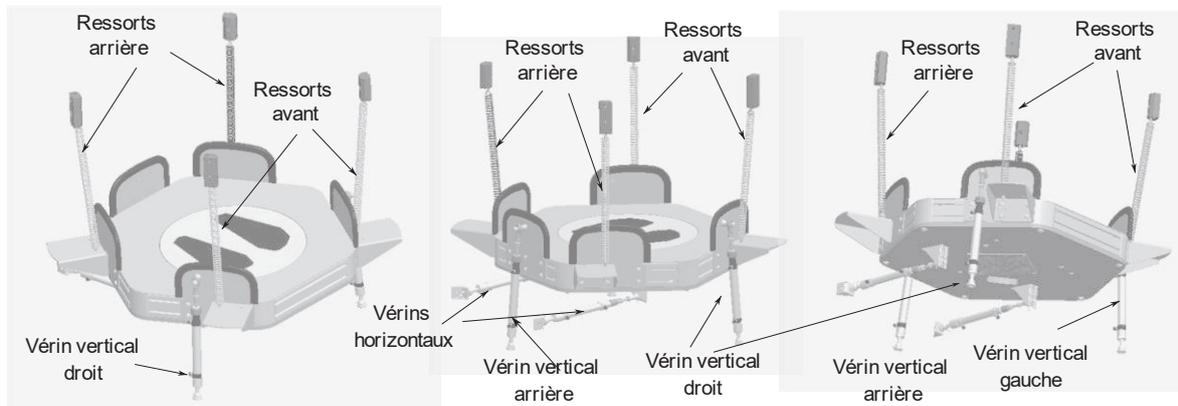
Une centrale inertielle, composée d'un accéléromètre et d'un gyromètre, permet de mesurer le comportement mécanique de la plateforme.

Les vérins sont pilotés par des servo-distributeurs et sont régulés en pression.

Un ordinateur et une interface logicielle de commande permettent de traiter les données des différents capteurs et de générer une commande aux différents vérins pneumatiques.

Quatre ressorts sont présents et sont reliés d'une part au bâti et d'autre part à la plateforme.

Un groupe pneumatique permet d'alimenter le système.



**Figure 20 - Description de certains composants de la plateforme**

### Question 38

Sur le document réponse 1, compléter la chaîne fonctionnelle décrivant le test de simulation des sensations de démarrage dans le métro de la plateforme.

### Question 39

Déterminer les degrés de mobilité utile (sans développer les calculs) en supposant que les vérins quasi verticaux et horizontaux peuvent fonctionner indépendamment.

Dans le cadre du test de simulation des sensations de démarrage dans le métro, les vérins verticaux sont supposés bloqués en déplacement. Un effort constant garantissant l'équilibre statique de la plateforme avec la présence d'un patient est imposé sur chacun de ces vérins. On pilote alors simultanément les deux vérins horizontaux avec une pression constante.

### Question 40

Dans le cadre du test de simulation des sensations de démarrage dans le métro, déterminer le nombre de mobilités restantes et justifier la pertinence d'une modélisation plane.

#### c. Modélisation cinématique du tangage de la plateforme

**Objectif** : étudier les paramètres cinématiques dans le cadre du comportement mécanique relatif au test de démarrage de métro et conclure sur une approche pertinente pour l'étude dynamique.

Dans cette partie on considère le modèle 2D décrit par la Figure 21 composé :

- du bâti  $S_0$  avec pour repère associé  $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  supposé galiléen ;

- de la plateforme  $S_1$  avec une charge embarquée de repère associé  $R_1(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0 = \vec{z}_1)$  ;  
on note  $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  ;
- du vérin vertical  $S_2$  d'inertie négligeable composé du corps  $S_2^a$  et de la tige  $S_2^b$  de repère associé  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0 = \vec{z}_2)$  ,  
on note  $\theta_{20} = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$  ;
- du vérin horizontal  $S_3$  composé du corps  $S_3^a$  et de la tige  $S_3^b$  de repère associé  $R_3(E, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0 = \vec{z}_3)$  ,  
on note  $\theta_{30} = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$  ;
- du vérin vertical  $S_4$  composé du corps  $S_4^a$  et de la tige  $S_4^b$  de repère associé  $R_4(D, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0 = \vec{z}_4)$  ;  
on note  $\theta_{40} = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$  .

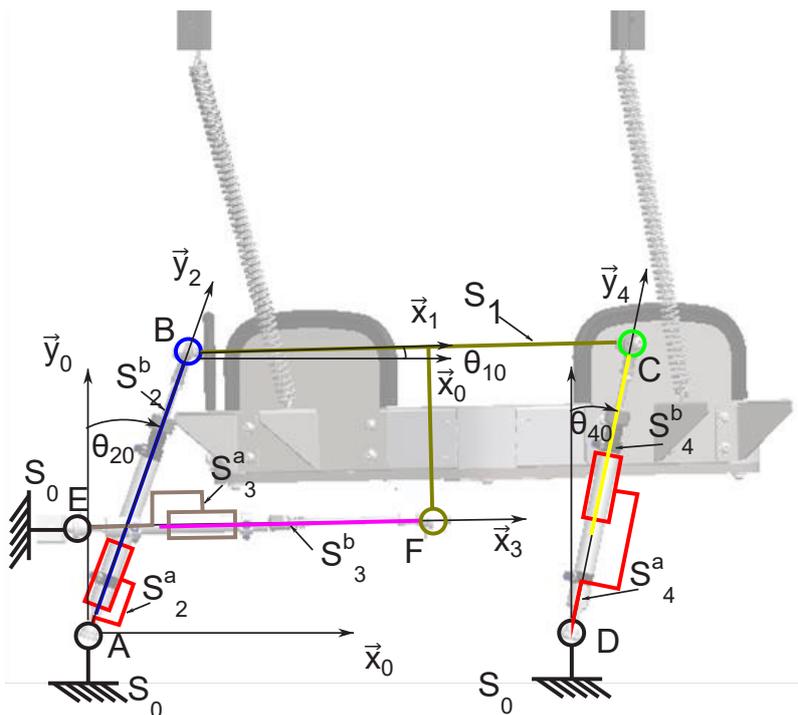


Figure 21- Paramétrage cinématique du mode de tangage.

On pose

$\overline{AB} = \lambda_2 \vec{y}_2$  ;  $\lambda_2$  supposé constant

$\overline{DC} = \lambda_4 \vec{y}_4$  ;  $\lambda_4$  supposé constant (projections des vérins dans le plan d'étude)

$\overline{EF} = \lambda_3(t) \vec{x}_3$  ;

$\overline{AD} = L \vec{x}_0$  ;

$\overline{BC} = l \vec{x}_1$  ;

$\overline{AE} = x_{AE} \vec{x}_0 + y_{AE} \vec{y}_0$  ;

$\overline{BF} = x_{BF} \vec{x}_1 + y_{BF} \vec{y}_1$  ;

#### Question 41

Traduire la fermeture géométrique A-B-C-D-A et la projeter dans le repère  $R_0$ . En déduire l'expression de  $\lambda_4$  en fonction de  $l$ ,  $L$ ,  $\lambda_2$ ,  $\theta_{10}$  et  $\theta_{20}$  que l'on notera

$$\lambda_4 = f_1(l, L, \lambda_2, \theta_{10}, \theta_{20}).$$

Avec cette même fermeture on peut également obtenir une expression de  $\lambda_2$  en fonction de  $l$ ,  $L$ ,  $\lambda_4$ ,  $\theta_{10}$  et  $\theta_{40}$  (calculs non demandés ici) que l'on notera :

$$\lambda_2 = f_2(l, L, \lambda_4, \theta_{10}, \theta_{40}).$$

De la même manière, par la traduction de la fermeture géométrique A-B-F-E-A, on peut en déduire une expression de  $\lambda_3$  en fonction de  $x_{BF}$ ,  $y_{BF}$ ,  $\lambda_2$ ,  $x_{AE}$ ,  $y_{AE}$ ,  $\theta_{10}$  et  $\theta_{20}$  que l'on notera :

$$\lambda_3 = f_3(x_{BF}, y_{BF}, \lambda_2, x_{AE}, y_{AE}, \theta_{10}, \theta_{20}).$$

Dans la configuration d'étude, on rappelle que les longueurs de vérins verticaux sont imposées et donc  $\lambda_4$  et  $\lambda_2$  sont supposés connus.

On souhaite exprimer les paramètres  $\lambda_3$ ,  $\theta_{20}$  et  $\theta_{40}$  en fonction de  $\theta_{10}$  sur l'intervalle  $[0^\circ, 5^\circ]$ .

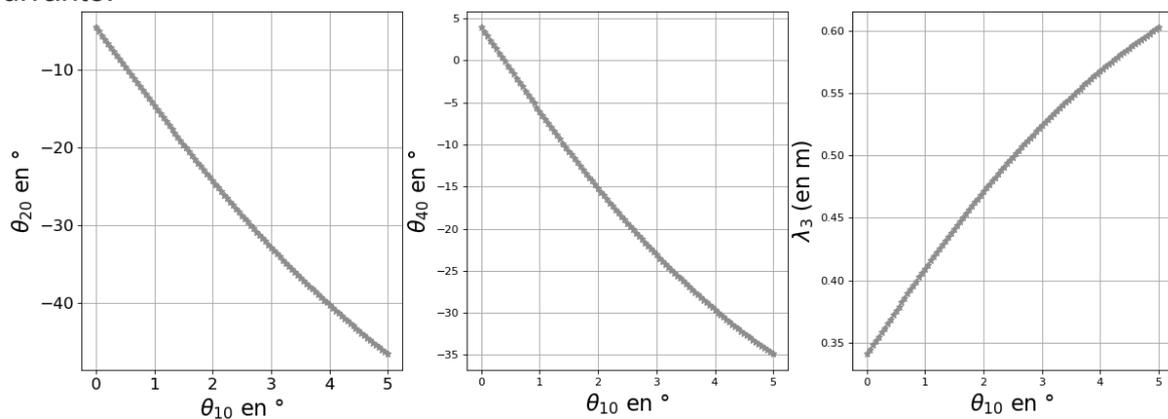
### Question 42

Proposer une méthode numérique (sans la développer) permettant de résoudre les équations obtenues précédemment et de tracer  $\lambda_3$ ,  $\theta_{20}$  et  $\theta_{40}$  en fonction de  $\theta_{10}$ .

On donne sur la Figure 22 les résultats de la méthode de résolution numérique utilisée permettant d'estimer  $\lambda_3$ ,  $\theta_{20}$  et  $\theta_{40}$  en fonction de  $\theta_{10}$ .

### Question 43

Sur une plage de  $\theta_{10} \in [0^\circ, 3^\circ]$ , proposer un modèle permettant d'approximer  $\lambda_3$ ,  $\theta_{20}$  et  $\theta_{40}$  en fonction de  $\theta_{10}$ . En déduire le nombre de mobilités cinématiques restantes dans le cas d'une modélisation plane. En déduire une méthode pertinente à appliquer pour modéliser le comportement dynamique du système. Ce sera l'objet de la partie suivante.



**Figure 22 - Détermination numérique des paramètres cinématiques  $\theta_{20}$ ,  $\theta_{40}$  et  $\lambda_3$  en fonction de  $\theta_{10}$ .**

#### d. Modélisation dynamique du tangage de la plateforme

**Objectif** : obtenir l'équation de mouvement traduisant la dynamique de la plateforme avec une sollicitation des vérins horizontaux.

Dans cette étude on simulera la présence d'un patient sur la plateforme par six masses additionnelles de 10 kg chacune (Figure 23). On suppose toujours que l'ensemble  $S_1$  est indéformable.

- Le référentiel  $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen.
- On note  $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$  l'accélération de la pesanteur avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- On considère l'ensemble  $S_1 = \{\text{plateforme (a)} + \text{masse (b)}\} = S_{1a} + S_{1b}$  qui a une masse notée  $m_1 = m_{1a} + m_{1b}$ , un centre d'inertie  $G_1$ , un repère associé  $R_1(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et une matrice d'inertie :

$$I(G_1, S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$$

- Les autres grandeurs de géométrie de masse sont définies en annexe c Figures 31 et 32.
- Quatre ressorts sont présents entre la plateforme  $S_1$  et le bâti  $S_0$ .



**Figure 23 - Présentation de la configuration de la plateforme pour le test**

#### Question 44

Proposer une simplification des opérateurs d'inertie  $I(G_{1a}, S_{1a})$  et  $I(G_1, S_1)$  en considérant la configuration présentée sur la Figure 31 en annexe c.

#### Question 45

Déterminer l'expression de l'opérateur d'inertie  $I(G_{1b}, S_{1b})$  en considérant la configuration présentée sur la Figure 32 en annexe c en fonction des différents paramètres définis dans cette annexe.

#### Question 46

En déduire l'expression de  $C_1$  (terme de l'opérateur d'inertie  $I(G_1, S_1)$ ) et du vecteur  $\vec{BG}_1 = x_{G_1} \vec{x}_1 + y_{G_1} \vec{y}_1 + z_{G_1} \vec{z}_1$  en fonction des termes de  $I(G_{1a}, S_{1a})$  et des constantes données en annexe c.

#### Question 47

En considérant le mouvement de tangage seul, déterminer les torseurs cinématique et cinétique en  $G_1$  de  $S_1/R_0$  en fonction des dimensions caractéristiques du problème (données en Figure 21 et en annexe c) de  $\dot{\theta}_{10}$  et de  $\dot{\theta}_{20}$ .

On se place dans le cas des petites variations de  $\theta_{10}$ . On peut alors exprimer  $\lambda_3$ ,  $\theta_{20}$  et  $\theta_{40}$  sous la forme :

$$\begin{cases} \theta_{20}(t) = a_2 \theta_{10}(t) + b_2 \\ \theta_{40}(t) = a_4 \theta_{10}(t) + b_4 \\ \lambda_3(t) = a_3 \theta_{10}(t) + b_3 \end{cases}$$

### Question 48

En considérant des petites variations de  $\theta_{10}$ , déterminer les approximations linéarisées de  $\dot{\theta}_{20}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{40}(t)$ ,  $\dot{\lambda}_3(t)$ ,  $\ddot{\theta}_{20}(t)$ ,  $\ddot{\theta}_{40}(t)$ ,  $\ddot{\lambda}_3(t)$ ,  $\sin\theta_{10}$  et  $\cos\theta_{10}$  en fonction de  $\theta_{10}$ , de ses dérivées successives et des grandeurs  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $a_4$  et  $b_4$ .

On rappelle la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 permettant d'approximer une fonction  $f(x)$  autour de l'abscisse  $a$  pour une faible variation de  $x$  :

$$f(a+x) \approx f(a) + x \cdot f'(a).$$

On peut alors également linéariser les expressions de  $\sin\theta_{21}$ ,  $\cos\theta_{21}$  en fonction de  $\theta_{10}$  et des grandeurs  $a_2$ ,  $b_2$ . On admettra les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \sin\theta_{21} &\approx \sin b_2 \\ \cos\theta_{21} &\approx \cos b_2 \end{aligned}$$

### Question 49

En considérant les masses et inerties de  $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$  négligeables devant celles de  $S_1$ , déterminer l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $\Sigma = \{S_1 + S_2 + S_3 + S_4\}$ . Simplifier son expression en la linéarisant pour des petites variations de  $\theta_{10}$ . Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme  $E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}_{10}^2(t)$ . Donner l'expression de  $J_{eq}$  en fonction de  $m_1$ ,  $C_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $x_{G1}$  et  $y_{G1}$ .

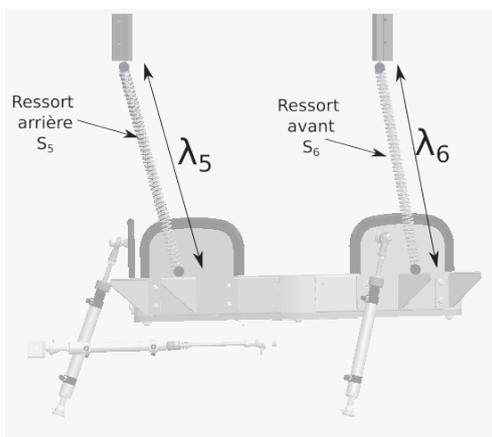


Figure 24 - Modélisation des ressorts

La modélisation plane permet de regrouper les deux ressorts arrière en un seul ressort équivalent arrière et les deux ressorts avant en un seul ressort équivalent avant.

On rappelle la raideur et la longueur à vide de chacun des 4 ressorts (Figure 24).

- $k = 2,04 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$
- $L_0 = 290 \text{ mm}$

### Question 50

Déterminer la raideur du ressort équivalent avant et celle du ressort équivalent arrière pour la modélisation plane. On les notera respectivement  $k_{2av}$  et  $k_{2ar}$ .

On note  $\lambda_5$  et  $\lambda_6$  les longueurs respectives des ressorts arrière et avant. Une étude géométrique ainsi qu'une résolution numérique similaire à celles effectuées dans la partie 6.c permettent de montrer que pour des petites variations de  $\theta_{10}(t)$  :

$$\begin{cases} \lambda_5(t) \approx a_5 \cdot \theta_{10}(t) + b_5 \\ \lambda_6(t) \approx a_6 \cdot \theta_{10}(t) + b_6 \end{cases}$$

Avec  $a_5$ ,  $a_6$ ,  $b_5$  et  $b_6$  des constantes déterminées numériquement.

### Question 51

Déterminer l'énergie potentielle des ressorts équivalents avant et arrière (notées  $E_p(av)$  et  $E_p(ar)$ ) en fonction de  $\theta_{10}$ ,  $k_2$ ,  $a_5$ ,  $a_6$ ,  $b_5$ ,  $b_6$  et  $L_0$ .

Par une étude géométrique similaire à ce qui a été proposé précédemment, on peut montrer que

$$\overrightarrow{AG_1} \cdot \vec{y}_0 \approx a_{G1} \cdot \theta_{10}(t) + b_{G1}$$

Avec  $a_{G1}$ ,  $b_{G1}$  des constantes déterminées numériquement.

### Question 52

Déterminer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de  $m_1$ ,  $g$ ,  $a_{G1}$ ,  $b_{G1}$  et  $\theta_{10}$ .

Les vérins horizontaux sont alimentés avec une pression notée  $p_h(t)$ . Ils possèdent une section notée  $S_h$ . La modélisation plane considère qu'on peut se ramener à un seul vérin horizontal avec une section équivalente  $S_{h2}$ .

### Question 53

Déterminer l'expression de la section équivalente  $S_{h2}$  en fonction de  $S_h$ .

L'action mécanique du corps du vérin horizontal  $S_3^a$  sur la tige  $S_3^b$  est supposée être un glisseur d'axe central  $(F, \vec{x}_3)$  (Figure 21).

### Question 54

Déterminer l'expression du torseur de l'action mécanique de  $S_3^a$  sur  $S_3^b$  (corps sur tige) du vérin horizontal en fonction de  $p_h(t)$  au point F. En déduire l'expression de la force généralisée  $Q_{\theta_{10}}$  due à l'action mécanique du vérin horizontal.

### Question 55

À l'aide du formalisme de Lagrange, montrer que l'équation de mouvement traduisant le comportement dynamique de la plateforme reliant les variables  $\theta_{10}(t)$  et  $p_h(t)$  peut s'exprimer sous la forme

$$A \cdot \ddot{\theta}_{10} + B \cdot \dot{\theta}_{10} = C \cdot p_h(t) + D$$

Déterminer alors l'expression des grandeurs A, B, C et D en fonction des différentes constantes du problème.

## 7. Mise en place d'un asservissement du système

**Objectif** : mettre en place un asservissement du système pour simuler un comportement réaliste et optimisé de la plateforme pour réaliser un test de restitution des sensations lors d'un démarrage de métro.

### a. Analyse et modélisation du comportement dynamique de la plateforme

**Objectif** : analyser le comportement dynamique de la plateforme et proposer un modèle de comportement réaliste.

Pour valider le modèle de comportement de l'équation de mouvement un essai a été réalisé. Il a consisté à imposer une variation supposée instantanée de la pression  $p_h(t)$  (échelon) à 2,5 bar. Une centrale inertielle a permis de relever  $\theta_{10}(t)$  au cours du temps. La courbe obtenue est proposée sur la Figure 25.

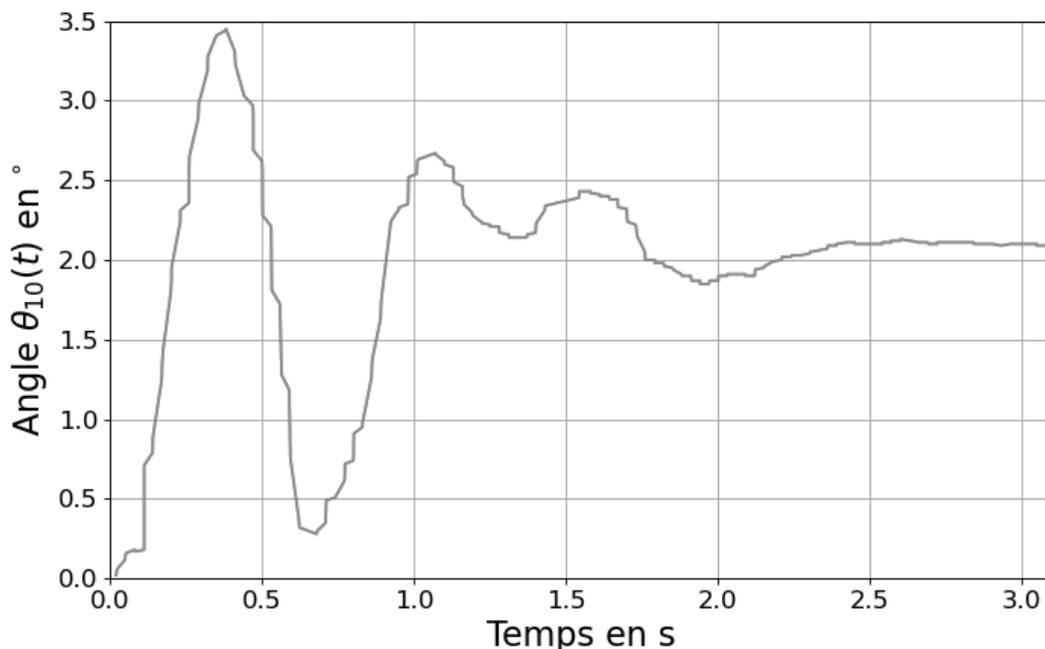


Figure 25 - Relevé expérimental de l'angle  $\theta_{10}(t)$  de tangage de la plateforme

#### Question 56

Décrire le fonctionnement de la centrale inertielle composée d'un accéléromètre et d'un gyromètre. Décrire comment ce composant permet de mesurer la position angulaire  $\theta_{10}(t)$ .

#### Question 57

Justifier un modèle de comportement de la plateforme sous la forme d'une fonction de transfert  $H_{\text{dyn}}(p) = \frac{\theta_{10}(p)}{P_h(p)} = \frac{K}{1+a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}$ .

À l'aide de la Figure 25 et des courbes des Figures 34 et 35 en annexe d, déterminer les valeurs de K,  $a_1$  et  $a_2$ .

#### Question 58

Analyser qualitativement les différences entre le modèle de comportement donné à la question précédente et le comportement dynamique obtenu à la fin de la partie 6.

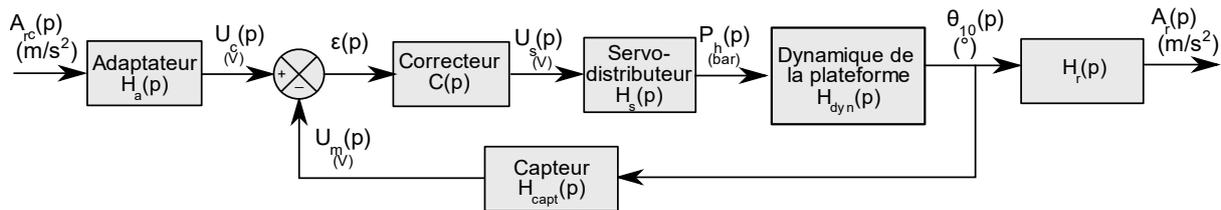
## b. Modélisation de la structure d'asservissement

**Objectif** : modéliser l'asservissement de la plateforme

Dans cette partie, on supposera que la fonction de transfert reliant  $p_h(t)$  à  $\theta_{10}(t)$  s'exprime sous la forme :

$$H_{\text{dyn}}(p) = \frac{\theta_{10}(p)}{P_h(p)} = \frac{K}{1+a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}$$

Avec  $a_1 = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$ ,  $a_2 = 1,21 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-2}$  et  $K = 0,84^\circ \cdot \text{bar}^{-1}$ .



**Figure 26 - Modélisation de la structure de l'asservissement**

- La grandeur asservie est l'accélération ressentie  $a_r(t)$  (transformée de Laplace  $A_r(p)$ ) qui correspond au terme dû à la pesanteur définie dans la partie 6.a) avec la relation suivante :  $a_r(t) = -\vec{g} \cdot \vec{x}_1$ .
- L'accélération ressentie de consigne est notée  $A_{rc}(p)$  dans le domaine de Laplace.
- L'accélération ressentie de consigne est convertie en une tension de consigne noté  $U_c(p)$  dans le domaine de Laplace via un adaptateur de fonction de transfert  $H_a(p)$ . Le gain associé est noté  $K_a$ . ( $H_a(p) = K_a$ )
- L'angle d'orientation de la plateforme en tangage (noté  $\theta_{10}(p)$  dans le domaine de Laplace) est mesuré par une centrale inertielle et traduit la mesure d'angle par une tension notée  $U_m(p)$  dans le domaine de Laplace. Le capteur délivre une tension de 5V pour  $360^\circ$  de variation angulaire et est représenté par le capteur de fonction de transfert  $H_{\text{capt}}(p)$ , dont le gain associé est noté  $K_{\text{capt}}$ . ( $H_{\text{capt}}(p) = K_{\text{capt}}$ )
- Les tensions  $U_c(p)$  et  $U_m(p)$  sont alors comparées pour donner l'écart  $\epsilon(p)$  qui est ensuite traité par le correcteur de fonction de transfert  $C(p)$ .
- Le correcteur délivre alors une tension de commande au servo-distributeur noté  $U_s(p)$ .
- Cette tension est alors convertie en pression dans le vérin horizontal (noté  $P_h(p)$ ) et définie dans la partie 6.d). On supposera ici que la relation entre la tension d'alimentation du servo-distributeur ( $U_s(p)$ ) et la pression  $P_h(p)$  est linéaire, 10V correspondant à 2,5 bar. On note le gain associé à  $H_s(p)$   $K_s$ . ( $H_s(p) = K_s$ )

### Question 59

Calculer les gains  $K_s$  et  $K_{\text{capt}}$ .

Exprimer la fonction de transfert  $H_r(p)$  (après linéarisation en considérant que  $\theta_{10}(t)$  restera faible).

En déduire l'expression de la fonction de transfert du gain d'adaptation  $H_a(p) = K_a$  pour garantir un bon asservissement du système en accélération ressentie.

### Question 60

Montrer que le schéma bloc de la Figure 26 peut se mettre sous la forme donnée par la Figure 27 et exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée notée  $H_{BO}^{nc}(p)$  en fonction de  $K_a$ ,  $K_s$ ,  $H_{dyn}(p)$  et  $g$ .

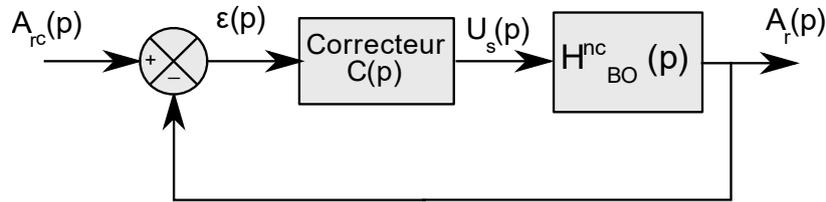


Figure 27- Modélisation simplifiée de la structure de l'asservissement

### c. Conception du correcteur du système pour optimiser les performances

**Objectif** : optimiser les performances de l'asservissement de la plateforme pour répondre au cahier des charges.

Le cahier des charges relatif au diagramme partiel des exigences de la figure 2 impose les critères suivants.

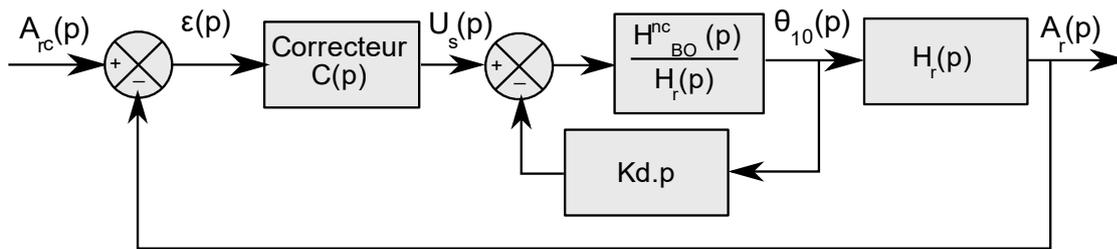
Exigence	Critère d'appréciation	Niveau
Id = « 1.4.1.2 » Reproduction des sensations vestibulaires	Précision statique	<10%
	Précision dynamique (erreur de traînage)	<0,2 m·s <sup>-2</sup>
	Bande passante	> 10 rad·s <sup>-1</sup>
	Stabilité Marge de gain	>10 dB
	Stabilité Marge de phase	>45°

### Question 61

En prenant une correction proportionnelle, déterminer la valeur de  $K_p$  tel que  $C(p)=K_p$  pour garantir le critère de précision statique. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de  $C(p) \cdot H_{BO}^{nc}(p)$  correspondant sur le document réponse 2 en justifiant votre réponse.

On donne le tracé du diagramme de Bode réel en phase, proposer une allure la plus précise possible du diagramme réel en gain et conclure quant aux critères de stabilité. Conclure également sur le respect du critère de précision dynamique.

Pour améliorer les propriétés de stabilité du système on décide de mettre en place une boucle interne en vitesse de  $\theta_{10}$  réalisée par l'utilisation d'un gyromètre. On introduit alors un gain  $K_d$  qui amplifie la mesure de  $\dot{\theta}_{10}(p)$  pour la réinjecter dans la commande (Figure 28). On garde un correcteur proportionnel pour  $C(p)$  ( $C(p)=K_p$ ).



**Figure 28- Modélisation de la structure de l'asservissement avec la présence d'une boucle interne en « vitesse »**

**Question 62**

Exprimer la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}^1(p) = \frac{A_r(p)}{\varepsilon(p)}$  en fonction de  $K_p$ ,  $K_d$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $K$ ,  $g$ ,  $K_s$  et  $K_a$ .

Rechercher une condition sur  $K_d$  pour que le coefficient d'amortissement de la boucle ouverte soit égal à 1.

Représenter, sur le document réponse 3, l'allure du diagramme de Bode réel et asymptotique obtenu (sachant que l'on donne le tracé du diagramme de Bode réel en phase).

Conclure quant au respect des exigences de stabilité.

On propose d'utiliser un correcteur de type Proportionnel Intégral donné par la fonction de transfert suivante :

$$C(p) = K_p \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$$

**Question 63**

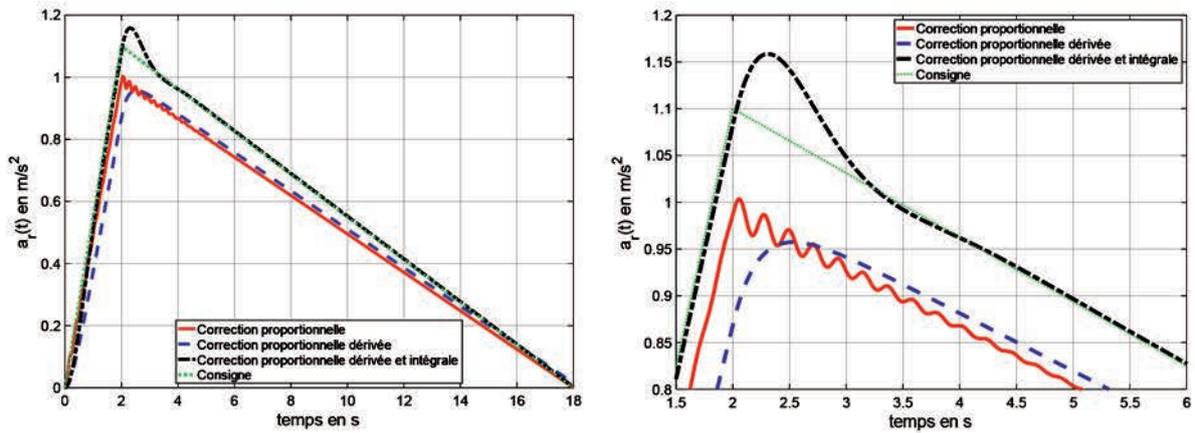
Évaluer alors la capacité de la structure d'asservissement à respecter le cahier des charges.

En s'appuyant sur le diagramme de Bode du document réponse 3 proposer un réglage des paramètres  $K_p$  et  $T_i$ .

**8. Synthèse des résultats**

**Objectif :** synthétiser les études menées et conclure sur le respect du cahier des charges fonctionnel.

Les résultats de la simulation sont donnés sur la Figure 29 et ont été obtenus à partir du modèle construit à partir des essais expérimentaux présenté dans la partie.



**Figure 29- Résultats de la simulation de l'asservissement de la plateforme dans le cas d'un test de simulation de démarrage de métro. Le graphique de droite est un zoom de celui de gauche.**

**Question 64**

Conclure quant à la capacité du système à obtenir des résultats conformes au cahier des charges.

En réalité, on souhaite que le système puisse fonctionner avec un patient qui peut réagir pendant l'essai et qui peut posséder des caractéristiques mécaniques différentes.

**Question 65**

En s'appuyant sur les Figures 32 et 33 données en annexes c, proposer une démarche pour modéliser plus précisément l'asservissement de la plateforme en conditions réelles.

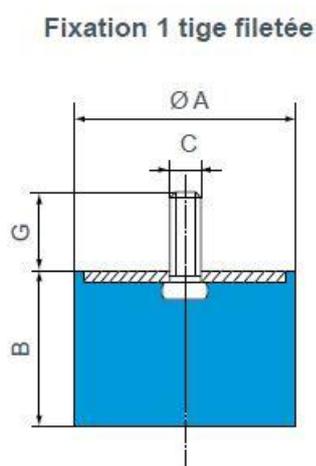
**Question 66**

Conclure sur le travail mené dans les différentes parties de ce sujet vis-à-vis du respect des différentes exigences présentées sur la Figure 2 et proposer d'autres études pouvant être menées afin de vérifier totalement ces dernières.

# DOCUMENTATION TECHNIQUE



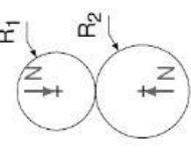
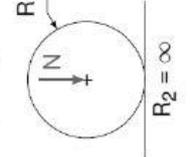
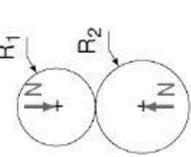
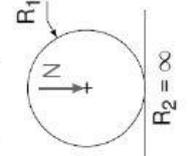
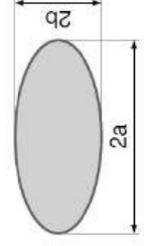
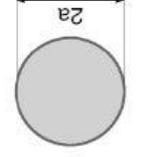
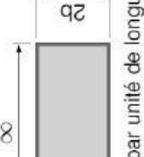
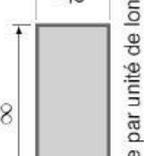
## Annexe a. Silent Bloc



Ø A (mm)	B (mm)	C	G (mm)	Compression		Réf.	
				Charge Maxi (daN)	Flèche (mm)		
12,5	10	M5	10	12	2	511110	
	13,5			11	2,5	511128	
	15			10	3	511115	
	20			8	3,5	511125	
16	10	M4	10	20	2	511150	
	15			3	511151		
	10	M5	12	20	2	511292	
	15			20	3	511294	
20	15			4	511296		
20	25	M6	16,5	15	5	511298	
	5			77	0,6	511206	
	8,5			40	1,5	51120011	
	8,5			40	1,5	511200	
	15			35	4	511215	
	20			30	5	511220	
25,5	25	M6	18	30	5,5	511225	
	30			25	7	511230	
	10			80	2	511158	
	15	60	3,5	511155			
	20	50	5	511159			
	30	50	8	511160			
	5	M8	20	82	0,6	51126550	
	10			80	2	511265	
	15			60	3,5	511270	
	30	15	M8	25	60	3,5	51127013
		19			55	4,5	511251
		22			50	5,5	511275
25		50	6	511280			
30		50	8	511285			
40		50	10	511290			
40	20	M8	20	90	3,5	511308	
	30			80	6	511310	
	40			70	8	511312	
	40	60	9	511314			
50	20	M8	25	160	5	511411	
	30			120	7	511157	
	40			120	10	511161	
	20	M10	25	160	5	511450	
	25			150	6	511401	
	35			120	8	511452	
60	40	M10	25	120	10	511454	
	45			120	11	511456	
	25			300	6	511525	
60	35	M10	25	250	9	511535	
	45			190	11	511545	
	22			350	3	513601	
	25			400	6	511625	
60	36	M10	25	300	9	511635	
	45			250	11	511645	

Figure 30- Extrait de catalogue : plot antivibratoire mâle Paulstra Hutchinson, Silent Bloc

## Annexe b. Pression de Hertz

		Contact ponctuel		Contact linéique	
		Sphère/sphère	Sphère/plan	Cylindre/cylindre	Cylindre/plan
Types de contacts	Solides quelconques				
Surface de contact	Forme	Ellipse (a, b) 	Cercle (a) 	Rectangle (∞, b) 	Rectangle (∞, b) 
	Dimensions	$a = m \sqrt{\frac{3\pi}{2} \frac{k_1 + k_2}{C_1 + C_1' + C_2 + C_2'}} N$ $b = \frac{n}{m} a$	$a = \sqrt{\frac{3\pi}{4} (k_1 + k_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} N}$	$b = 2\sqrt{(k_1 + k_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} q}$	$b = 2\sqrt{(k_1 + k_2) q R}$
Rapprochement $\delta$		$\delta = \sqrt{\frac{9\pi^2}{16} (k_1 + k_2)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} N^2}$	$\delta = \sqrt{\frac{9\pi^2}{16} (k_1 + k_2)^2 \frac{N^2}{R}}$	$\delta = 3,84 \cdot 10^{-5} \frac{N^{0,9}}{L^{0,8}}$ ( $\delta$ et L en mm, N en N)	
Pression max $p_{max}$		$p_{max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a^2}$	$p_{max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a^2}$	$p_{max} = 0,59 \sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} q}$ Si $\nu = 0,3$ : $p_{max} = \frac{2N}{\pi L b} = \frac{2q}{\pi b}$ $p_{max} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{k_1 + k_2} \frac{1}{R_1 R_2} q}$	$p_{max} = 0,59 \sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{1}{R} q}$ Si $\nu = 0,3$ : $p_{max} = \frac{2N}{\pi L b} = \frac{2q}{\pi b}$ $p_{max} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{k_1 + k_2} \frac{1}{R} q}$
Profondeur pour $\tau_{max}$ (pour $\nu = 0,3$ )	Fonction de l'excentration de l'ellipse	$h = 0,5a$	$h = 0,5a$	$h = \frac{\pi}{4} b$	$h \approx 0,78b$

\* avec :  $k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$

### Annexe c. Géométrie de masse de la plate-forme

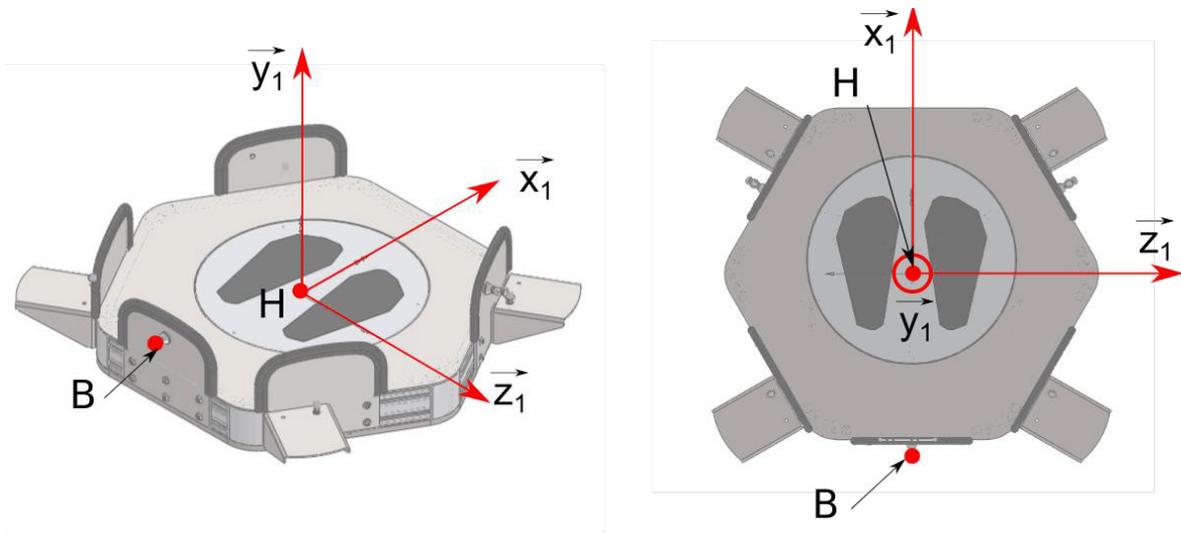


Figure 31 - Géométrie de la plateforme seule  $S_{1a}$

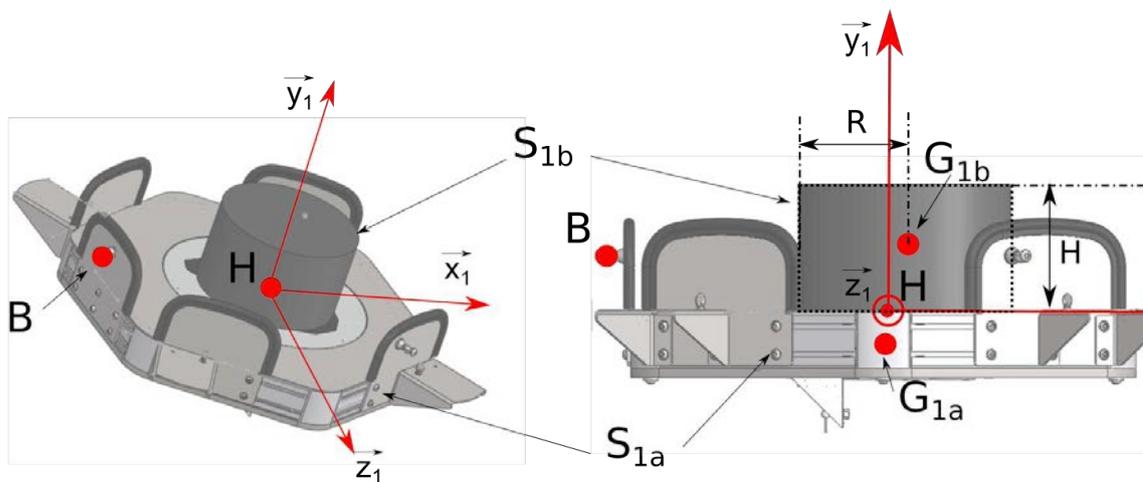


Figure 32- Géométrie de la plateforme  $S_{1a}$  et de la masse supplémentaire  $S_{1b}$

on note

- $R_1(H, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère associé à la plateforme  $S_1$ .
- $S_{1a}$ , la plateforme seule :
  - de masse  $m_{1a}=57$  kg
  - de centre d'inertie  $G_{1a}$  tel que  $\overline{BG_{1a}} = x_{G_{1a}}\vec{x}_1 + y_{G_{1a}}\vec{y}_1$
  - $(x_{G_{1a}}; y_{G_{1a}}) = (380 \text{ mm}; -100 \text{ mm})$

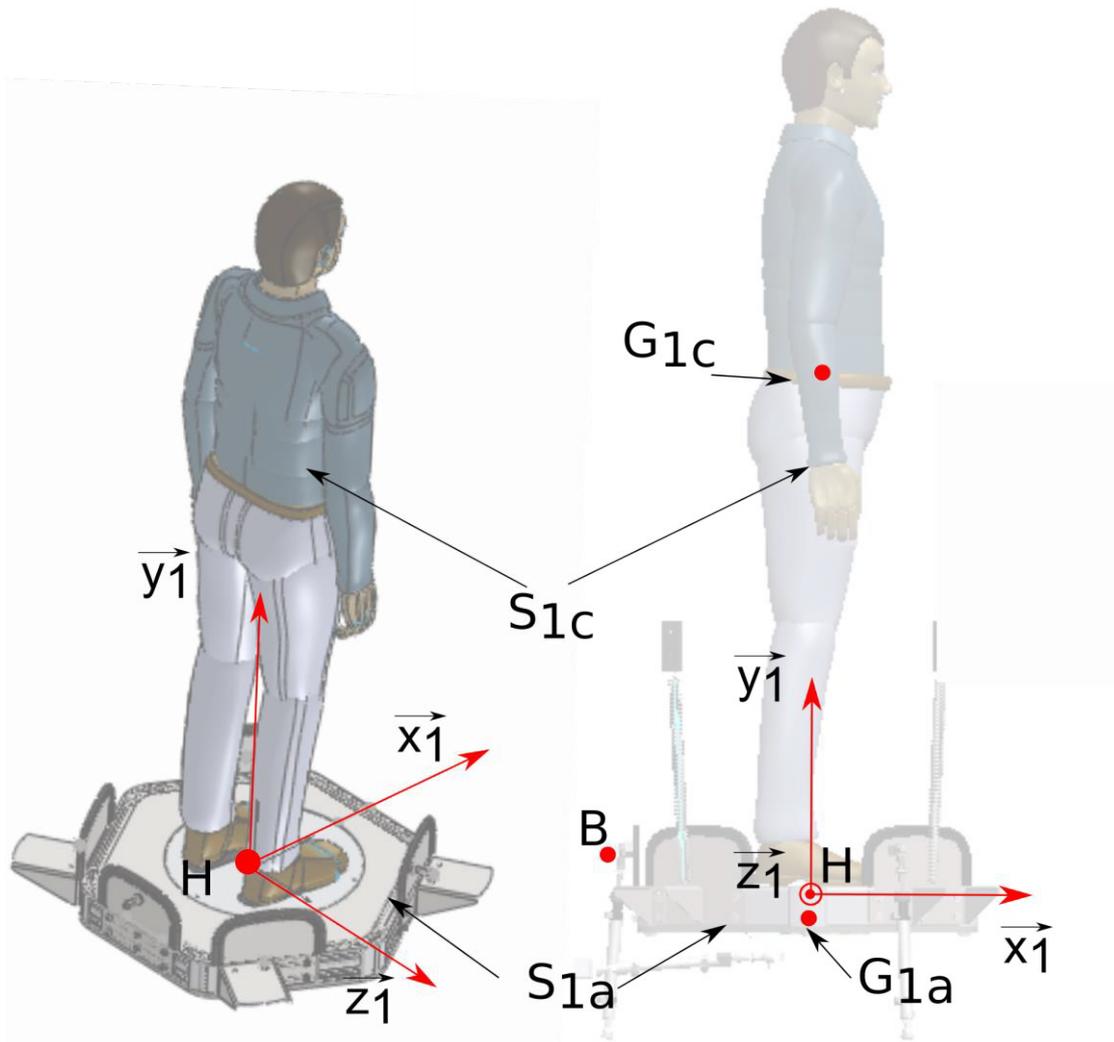
- Matrice d'inertie notée

$$I(G_{1a}, S_{1a}) = \begin{pmatrix} A_{1a} & -F_{1a} & -E_{1a} \\ -F_{1a} & B_{1a} & -D_{1a} \\ -E_{1a} & -D_{1a} & C_{1a} \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$$

- $S_{1b}$ , l'ensemble des masses additionnelles supposé comme étant un cylindre de révolution homogène de rayon  $R=150\text{mm}$  et de hauteur  $H=18\text{mm}$  :

- de masse  $m_{1b}=60\text{ kg}$
- de centre d'inertie  $G_{1b}$  tel que  $\overrightarrow{BG_{1b}} = x_{G_{1b}}\vec{x}_1 + y_{G_{1b}}\vec{y}_1$
- $(x_{G_{1b}}; y_{G_{1b}}) = (410\text{ mm}; 11\text{ mm})$
- matrice d'inertie notée

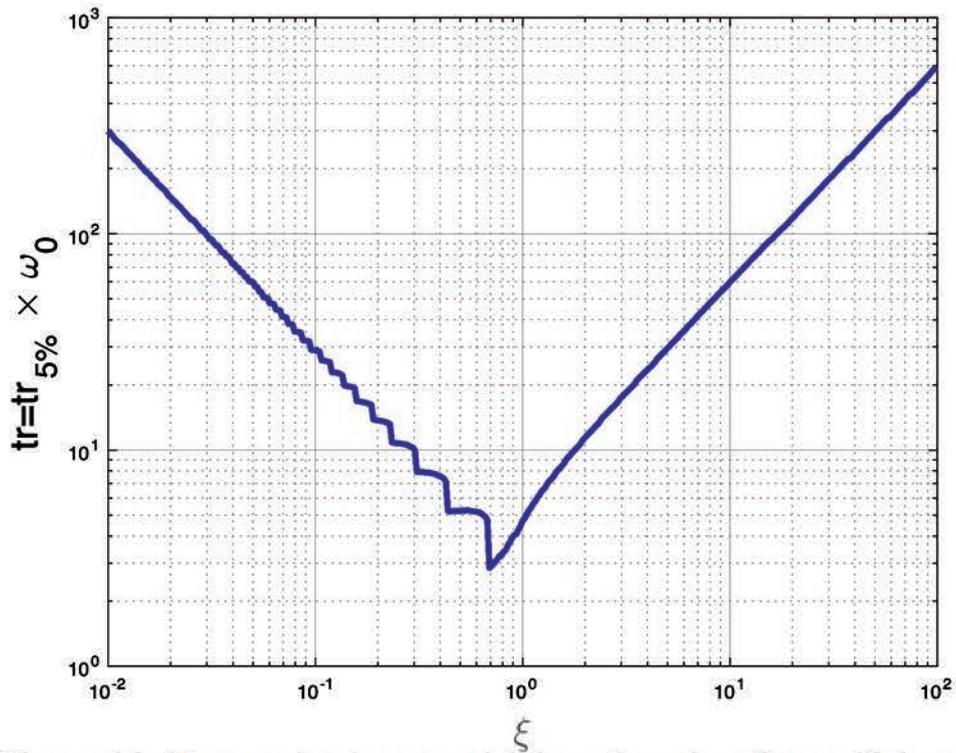
$$I(G_{1b}, S_{1b}) = \begin{pmatrix} A_{1b} & -F_{1b} & -E_{1b} \\ -F_{1b} & B_{1b} & -D_{1b} \\ -E_{1b} & -D_{1b} & C_{1b} \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$$



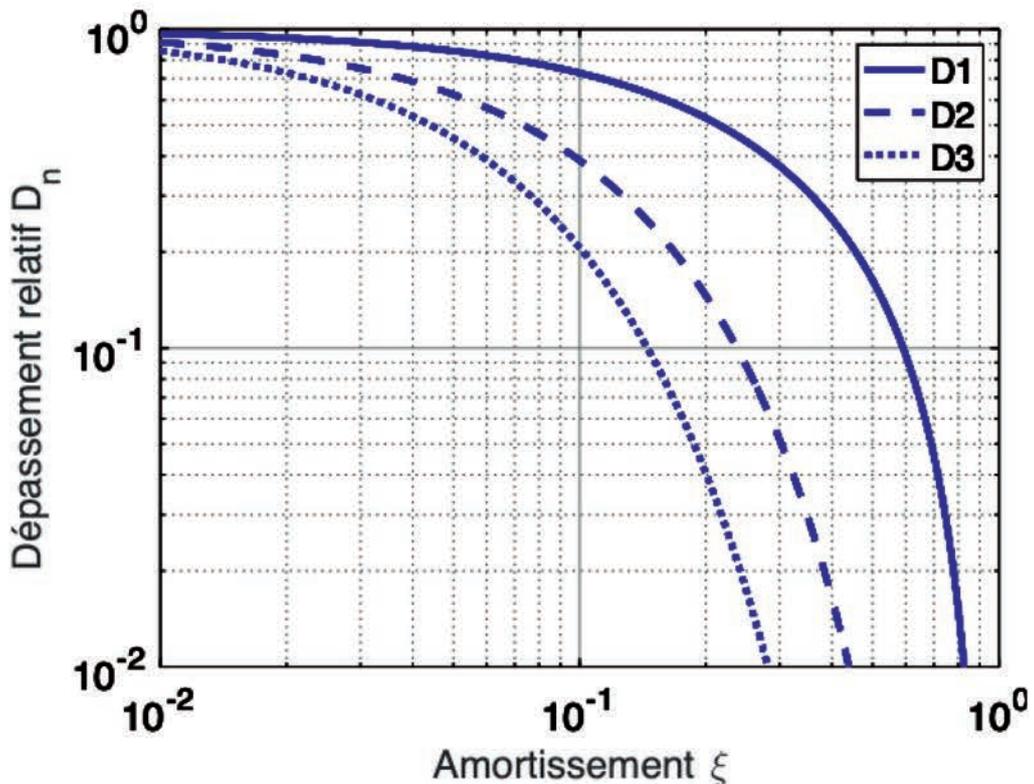
**Figure 33 - Géométrie de la plateforme  $S_{1a}$  avec un patient  $S_{1c}$**

On note  $S_{1c}$  le patient que l'on pourra supposer comme étant un cylindre de révolution homogène de hauteur 170 cm et de rayon 10 cm et de masse  $m_{1c}=60$  kg.  
 On supposera également que  $S_{1c}$  se situe à la même position horizontale que le solide  $S_{1b}$  défini préalablement.

**Annexe d. Abaques reliant les caractéristiques des systèmes du deuxième ordre et leurs réponses temporelles indicielles.**



**Figure 34 - Temps de réponse réduit en fonction du coefficient d'amortissement pour un système du deuxième ordre**

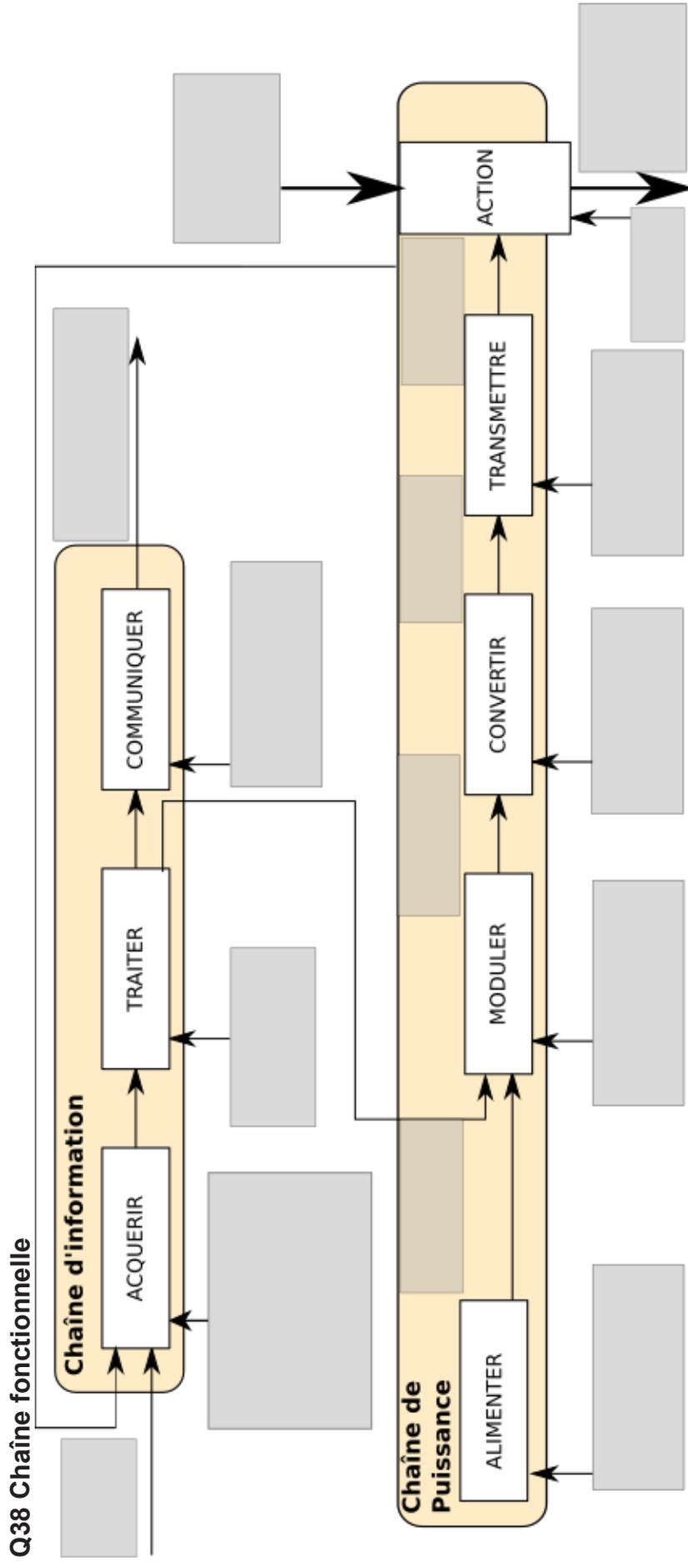


**Figure 35 - Dépassement relatif en fonction du coefficient d'amortissement pour un système du deuxième ordre**



**NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE**

Document réponse 1



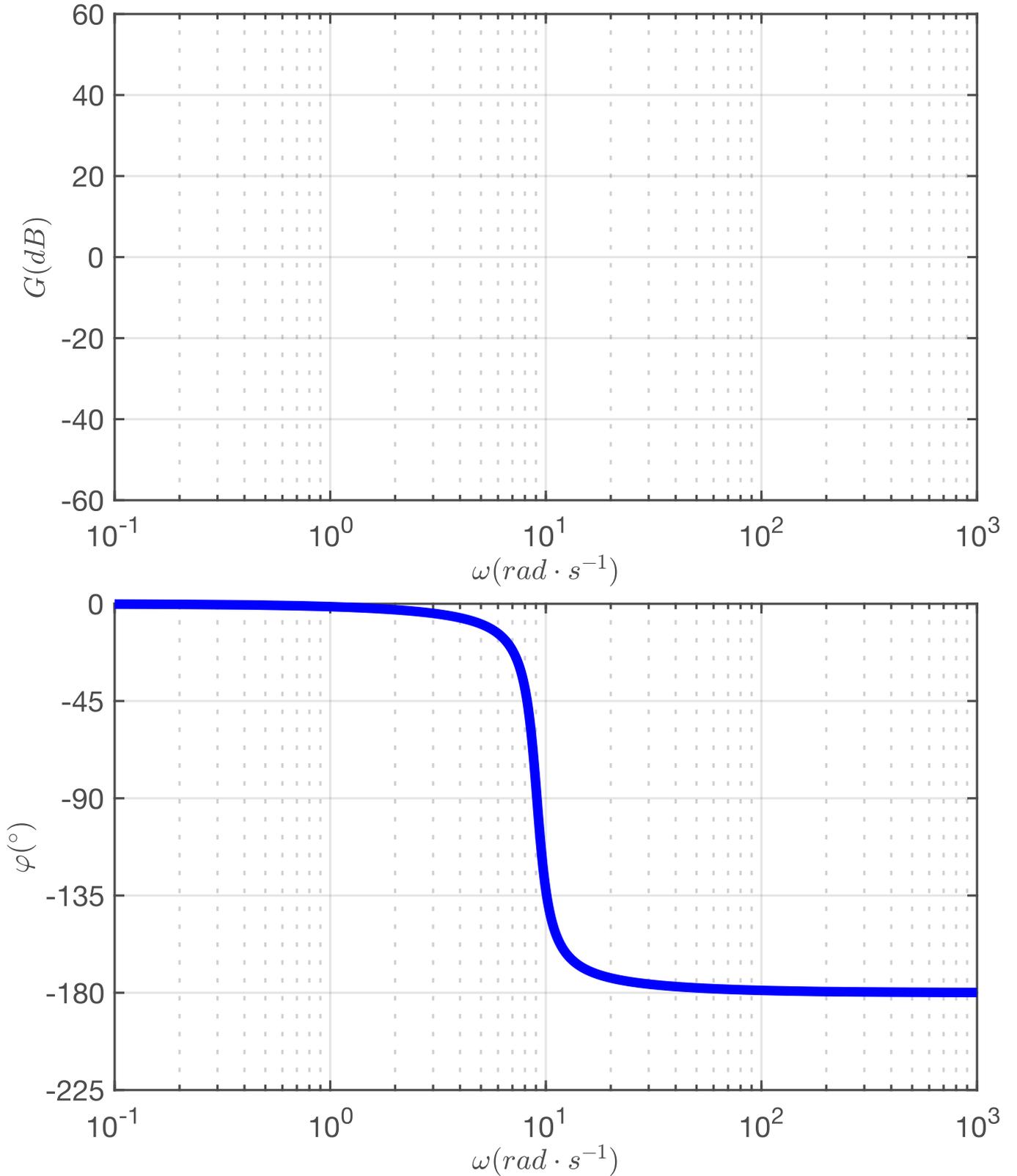




**NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE**

Document réponse 2

Q61 Diagrammes de Bode



### Document réponse 3

Q62 Diagrammes de Bode

