

SESSION 2022

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE DES CONSTRUCTIONS**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1416A	102	2680

Sujet d'agrégation externe SII option IC : Modélisation

Toutes les parties sont indépendantes les unes des autres. En outre, au sein d'une même partie, un grand nombre de questions peuvent être traitées de manière indépendante. Pour chaque question, en complément des résultats de calculs proprement dits, il conviendra de justifier les choix effectués et les calculs réalisés ainsi que de commenter les résultats obtenus. Une attention sera apportée à la présentation et à la clarté des explications

Partie 1 : Campagne de reconnaissance du sol (4.5 points).....	4
Partie 2 : Etude de l'arche en pisé (3.5 points)	14
Partie 3 : Etude d'une poutre en flexion (2 points)	21
Partie 4 : Etude thermique du mur en pisé (7 points).....	24
Partie 5 : Etude de la perméabilité intrinsèque (3 points).....	31
ANNEXE : Classification française du GTR (d'après NF P 11-300).....	37
Document réponse.....	39

ILOT B2 – YDEAL – BATIMENT B05 – LYON CONFLUENCE

Ce sujet porte sur l'étude du bâtiment 05 de l'îlot B2 à Lyon confluence (69) réalisé en 2020-2021. Ce bâtiment R+2 est implanté en limite parcellaire Sud tel que représenté en Figure 0.1.

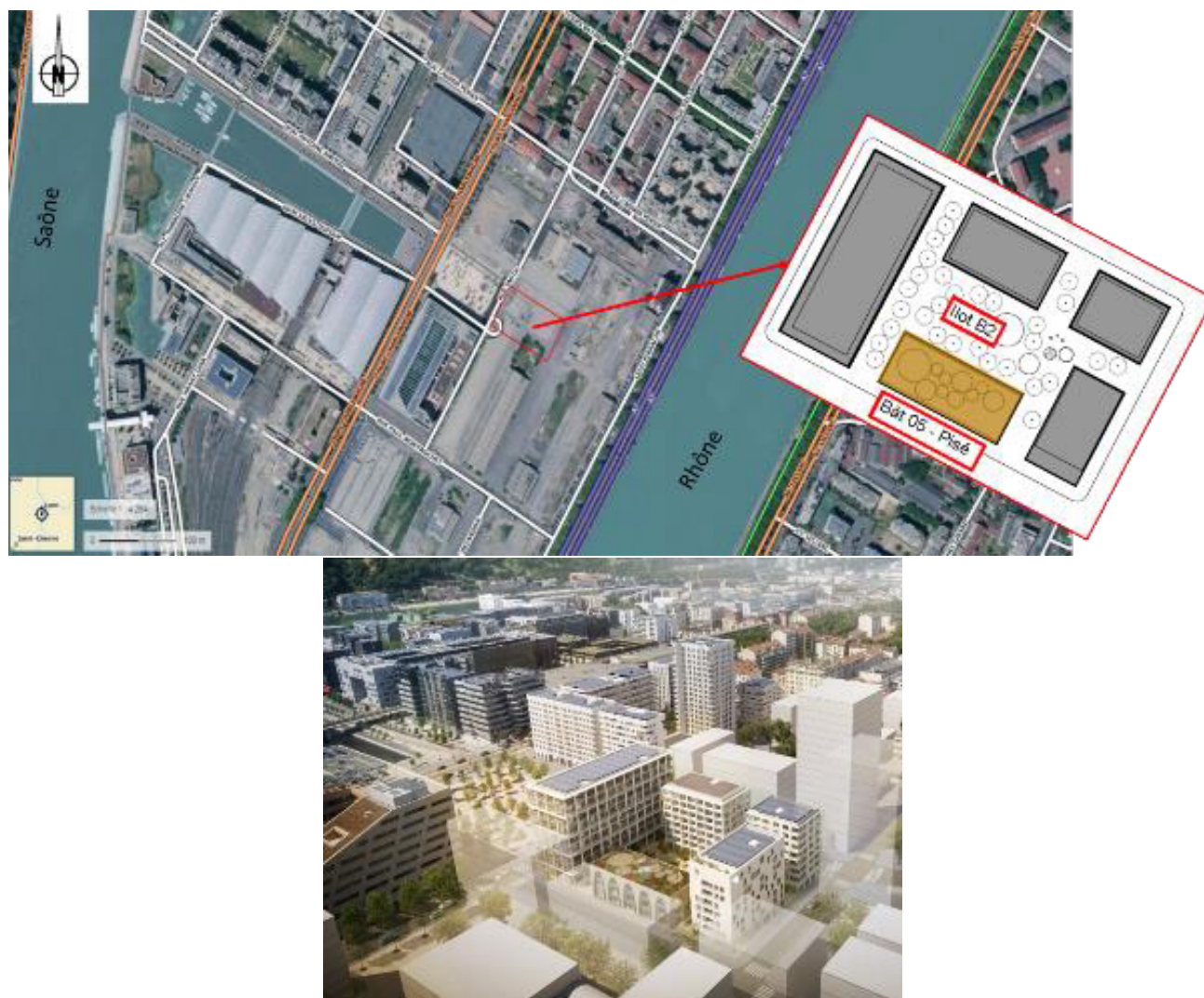


Figure 0.1. Vue aérienne du site (source Géoportail) et plan synthétique de l'îlot B2 (source Batiserf).

Une des particularités de ce bâtiment est la présence de façades porteuses constituées de plusieurs arches à base d'éléments préfabriqués en pisé (voir Figure 0.2 ci-dessous). La structure intérieure est quant à elle entièrement réalisée en bois.

Le pisé est une technique de construction qui consiste à superposer à l'intérieur d'un coffrage des couches de terre crue compactées et damées. La première couche repose sur un soubassement, généralement en pierres galets ou béton, d'une hauteur allant de 50 cm à environ 2 m de manière à protéger le matériau des projections d'eau, des remontées capillaires, ainsi que des animaux. Dans les constructions modernes, la maçonnerie en pierre est souvent remplacée par du béton. La partie supérieure du mur est également protégée de la pluie par un toit débordant.



Figure 0.2. Photographie d'une des façades en pisé du bâtiment étudié.

Pour ce projet, la technique du pisé préfabriqué sur site a été utilisée. Des blocs ont ainsi été réalisés directement sur le chantier avec de la terre provenant d'un site à 30 km environ de l'ouvrage. Ceux-ci seront ensuite assemblés les uns avec les autres avec un mortier de terre.

Remarque générale importante : Pour l'établissement de ce sujet le projet réel a été fortement simplifié. Ainsi, bien que les ordres de grandeur aient été globalement respectés, les valeurs données dans ce sujet ne sont pas directement celles qui ont été utilisées pour le dimensionnement du lot B05. En outre, certaines des solutions technologiques proposées dans ce sujet ne sont pas celles qui ont été effectivement choisies pour la construction réelle.

Partie 1 : Campagne de reconnaissance du sol (4,5 points)

Remarque importante : Pour cette partie, la convention de signe retenue est celle de la mécanique des sols, à savoir : contraintes normales positives en compression et déformations positives en contraction.

La campagne de reconnaissance de la mission G2 AVP a consisté en l'exécution de sondages pressiométriques, sondages carottés, essais de type Lefranc, piézomètres, et essais de pénétromètres dynamiques. Elle a été complétée par des essais de laboratoire sur des échantillons de sols prélevés sur site.

Cette campagne de reconnaissance a permis de mettre en évidence les formations suivantes entre le terrain actuel et 20,5m/TA :

- Sol 1 de 0 à 10,5 m/TA.
- Sol 2 au-delà de 10,5.m/TA.

TA étant le terrain actuel.

Le bâtiment présente un sous-sol partiel d'environ 110m², induisant la nécessité de réaliser un terrassement de l'ordre de 3 à 4m/TA. Les terrassements seront réalisés à l'abri d'un soutènement périmétrique. Le niveau de nappe impactant les niveaux bas, un rabattement est effectué pour réaliser le projet.

Les poids volumiques moyens (γ_d étant le poids volumique du sol sec et γ_{sat} le poids volumique du sol saturé en eau) ainsi que le coefficient K_0 (traduisant le coefficient des terres au repos) sont reportés dans le tableau ci-dessous :

Lithologie	γ_d (kN/m ³)	γ_{sat} (kN/m ³)	K_0
Sol 1	16	20	0,6
Sol 2	19	22	0,5

Les relevés piézométriques ont révélé un niveau d'eau à 4 m/TA.

Question 1 :

Calculer l'indice des vides (noté e) et la porosité (notée n) des sols saturés en place. On posera que le poids volumique de l'eau est égal à 10kN/m³.

Question 2 :

Etablir les diagrammes des contraintes totales et effectives verticales et horizontales, en considérant le sol au repos, jusqu'à une profondeur de 20m/TA. Nous supposerons, pour simplifier les calculs, que le sol 1 a un poids volumique homogène égal à 18kN/m³ au-dessus du niveau de la nappe et saturé en dessous du niveau de la nappe.

Analyse de la nature du sol 1

Question 3 :

La courbe granulométrique du sol 1 a été réalisée suivant la norme NF P 94-057. Les résultats obtenus pour 12kg de sol sont reportés dans le tableau ci-dessous :

Tamis (mm)	50	40	20	5	2	0.5	0.2	0.08
Refus cumulés (kg)	0	0,7	3,4	6,2	6,8	7,8	9,3	10,8

Tracer la courbe granulométrique sur le document réponse DR1.

Faire une première analyse de cette courbe quant à la composition du sol 1.

Question 4 :

Calculer le coefficient d'uniformité (C_u) et le coefficient de courbure (C_c). Pour rappel, $C_u = D_{60}/D_{10}$ et $C_c = D_{30}^2/(D_{10}D_{60})$, D_x étant la dimension des particules correspondant au passant cumulé à $x\%$. Utiliser les valeurs obtenues pour qualifier la granularité étudiée.

Question 5 :

Un essai au bleu de Méthylène a été réalisé et a donné une valeur de $V_{BS}=0,23$.

(a) **Expliquer** brièvement le principe de l'essai au bleu.

(b) **Donner** alors la classification GTR du sol A. Un extrait de la classification est donné en annexe.

Etude de la perméabilité du sol 1

Question 6 :

En préambule, nous vous proposons de calculer le débit d'eau passant au travers d'une cavité sphérique de diamètre B , maintenue à une charge hydraulique H , au sein d'un sol infini homogène, isotrope et saturé de perméabilité k (voir Figure 1.1 ci-dessous).

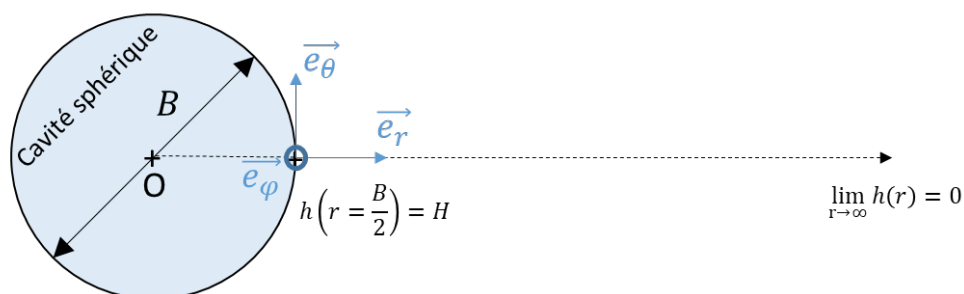


Figure 1.1. Représentation schématique d'une cavité sphérique dans un massif de sol infini.

(a) **Rappeler** brièvement ce que représente physiquement la charge hydraulique et donner son expression pour des vitesses d'écoulement faibles en fonction de la pression d'eau u_w , du poids volumique de l'eau γ_w et de l'altitude z par rapport à une côte de référence.

(b) En supposant l'eau incompressible, **montrer** par application de l'équation de conservation de la masse d'eau dans le sol que le débit au travers de la cavité peut s'écrire sous la forme : $Q(t) = m k B H$ avec k le coefficient de perméabilité (en m/s) et m un facteur adimensionnel dont vous donnerez l'expression.

Nous rappelons que le flux au travers d'une surface S d'un milieu poreux est égal à $Q(t) = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ avec $\vec{v} = -k \overrightarrow{\text{grad}}(h)$ la vitesse de Darcy et \vec{n} le vecteur unitaire normal à la surface élémentaire dS .

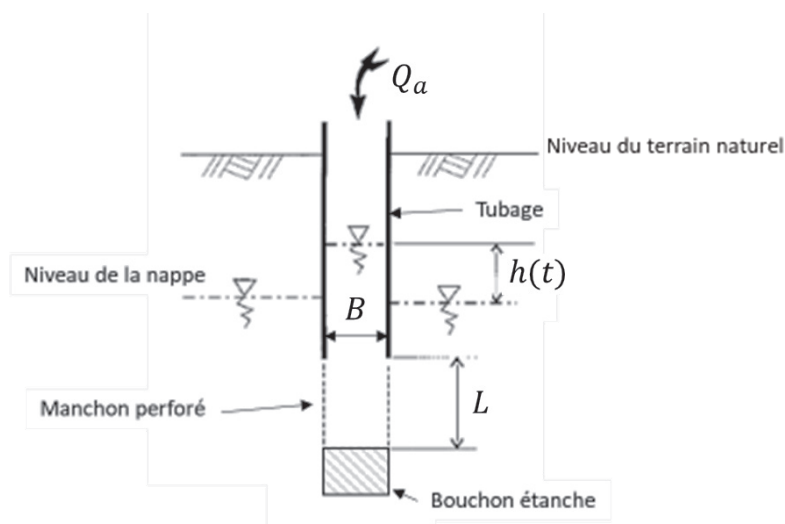
Nous rappelons également qu'en coordonnées sphériques, le gradient ($\overrightarrow{\text{grad}}$) et le Laplacien (∇^2) d'une fonction scalaire $f(r, \theta, \varphi)$ s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)$$

Question 7 :

Des essais de perméabilité de type Lefranc ont été réalisés afin de mesurer la perméabilité à l'eau des sols. L'essai réalisé a consisté à injecter une certaine quantité d'eau à débit constant dans le sol à partir d'un forage cylindrique au travers d'un manchon perforé. Une description schématique de l'essai est présentée en Figure 1.2.



B : diamètre intérieur du tubage = 114mm

L : hauteur du manchon perforé = 1m

Q_a : Débit de l'apport d'eau = 75 L/h

Figure 1.2 : Représentation schématique simplifiée de l'essai LEFRANC par apport d'eau

Nous supposons que dans cette configuration d'essai, en notant H la charge hydraulique de l'eau dans le tubage, le débit au travers du manchon cylindrique perforé peut s'écrire sous la forme :

$$Q(t) = m k B H$$

Avec, néanmoins un coefficient de forme m plus complexe que celui trouvé dans la question précédente. Ce dernier dépendant notamment du ratio B/L et de la position de la cavité par rapport aux limites de l'aquifère. Dans le cadre de cette question, une valeur de $m \approx 18$ sera considérée.

(a) En prenant le niveau de la nappe comme côte de référence, **retrouver** que $H = h(t)$ en tout point de l'eau dans le tubage.

(b) Compte tenu de ces hypothèses, **montrer** que le bilan de volume d'eau dans le tubage conduit à la relation :

$$h(t) = -\frac{\pi B}{4mk} \frac{dh}{dt} + \frac{Q_a}{mkB}$$

Question 8 :

Les résultats obtenus sont les suivants :

t [s]	120	480	1200	1800	2100
h [cm]	22	63	92	99	100
dh/dt [cm/s] *	0,160	0,078	0,018	0,005	0,003

* *prendre les valeurs de dh/dt données dans le tableau qui sont calculées avec plus de valeurs de $h(t)$ que celles données ici.*

(a) **Tracer** la relation entre $h(t)$ et dh/dt .

(b) La relation obtenue est-elle cohérente avec le débit d'apport d'eau imposé lors de l'essai ? **Expliquer** pourquoi ?

(c) **Utiliser** la courbe tracée en question 8-(a) afin d'estimer le coefficient de perméabilité. Comment qualifieriez-vous la perméabilité du matériau ?

Question 9 :

Un essai du même type a été réalisé pour le sol 2 et a donné un coefficient de perméabilité supérieur à 10^{-4} m/s. En outre, un essai œdométrique a été réalisé sur un échantillon de sol 1 et il a donné une valeur de module œdométrique égal à $E_{oed} = 5$ MPa.

Nous rappelons que l'équation de consolidation d'un sol s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial(\Delta u_w)}{\partial t} = \frac{k E_{oed}}{\gamma_w} \frac{\partial^2(\Delta u_w)}{\partial z^2} = C_v \frac{\partial^2(\Delta u_w)}{\partial z^2}$$

Avec

Δu_w : Différence entre la pression d'eau dans le sol à l'instant t et celle à l'instant t_0

E_{oed} : module œdométrique du sol

γ_w : poids volumique de l'eau

k : coefficient de perméabilité

C_v : coefficient de consolidation

t : variable de temps et z : variable d'espace.

Cette équation est classiquement adimensionnalisée sous la forme :

$$\frac{\partial(\Delta u_w)}{\partial T_v} = \frac{\partial^2(\Delta u_w)}{\partial Z^2}$$

(a) **Exprimer** les variables adimensionnelles T_v et Z en fonction de C_v, H, t et z , avec H la distance maximale de drainage.

(b) **Justifier**, en expliquant physiquement le phénomène de consolidation d'un sol, le fait que l'inconnue de l'équation de consolidation soit la pression d'eau dans le sol.

Question 10 :

(a) A partir de l'expression du tassement du sol $s(t)$ supposé élastique sous un supplément de contrainte, **démontrer** que le degré de consolidation peut s'écrire sous la forme :

$$U(T_v) = 1 - \frac{\int_0^1 \Delta u_w(T_v, Z) dZ}{\int_0^1 \Delta u_w(0, Z) dZ}$$

(b) La résolution de l'équation adimensionnalisée permet d'obtenir la relation reportée en Figure 1.3 entre le degré de consolidation U et T_v .

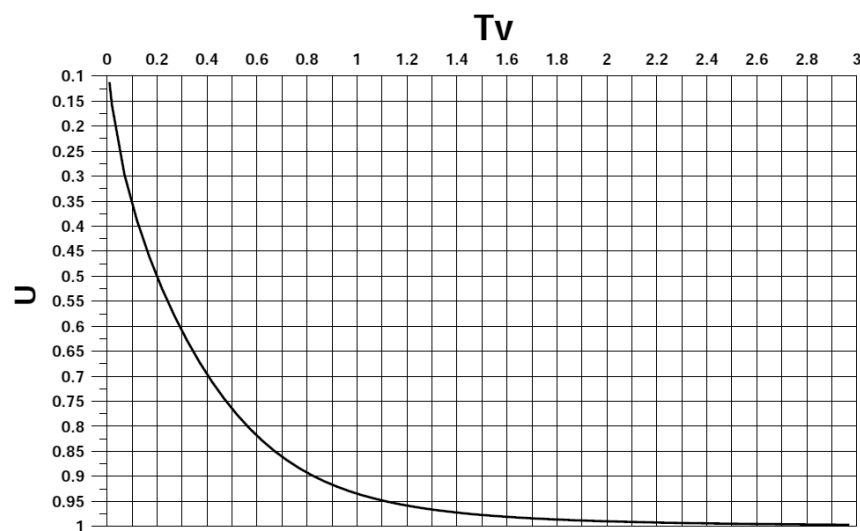


Figure 1.3. Représentation graphique de la fonction $U=f(T_v)$

Déduire le temps que mettra le sol 1 pour atteindre 90% de son tassement final après chargement.

Que pouvez-vous en conclure ?

Expliquer si ce résultat était prévisible au regard de la nature du sol ?

Comportement au cisaillement

Les essais de caractérisation des sols ont été complétés par des essais triaxiaux. Un schéma de principe est reporté en Figure 1.4 :

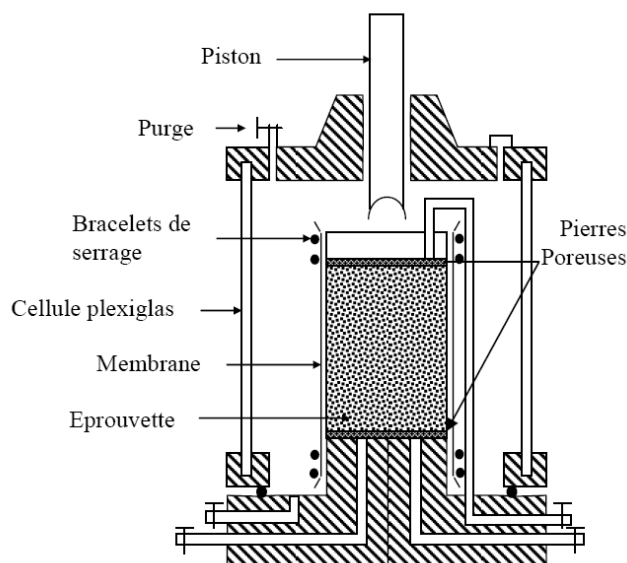


Figure 1.4. Schéma d'une cellule triaxiale

L'échantillon sur lequel l'essai s'effectue est cylindrique, d'élançement deux. Il est soumis à deux étapes de chargement. La première consiste à lui appliquer une pression de confinement, notée p , par le biais du fluide mis sous pression dans la cellule (phase de consolidation). Une fois l'échantillon de sol consolidé, l'essai consiste à faire croître la charge axiale jusqu'à la rupture, en maintenant p constante (phase de chargement déviatorique).

En théorie, l'essai triaxial est supposé homogène. Autrement dit, les tenseurs de contraintes $\underline{\sigma}$ et de déformation $\underline{\epsilon}$ sont considérés uniformes en tout point de l'échantillon. Ainsi, le tenseur des contraintes au sein de l'échantillon s'écrit de la manière suivante dans le repère cylindrique $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, P étant un point quelconque de l'échantillon (suffisamment loin des embases) et \vec{e}_z étant l'axe vertical :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta = \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

En fonction des conditions de drainage du fluide interstitiel de l'échantillon lors de la consolidation et lors du chargement déviatorique, il est possible de distinguer trois principaux types d'essai triaxiaux normalisés (norme NF P 94-074) :

- l'essai C.D : drainé durant les phases de consolidation et de chargement déviatorique
- l'essai U.U : non drainé durant les phases de consolidation et de chargement déviatorique
- l'essai C.U : drainé durant la phase de consolidation et non drainé durant la phase de chargement déviatorique, et avec possiblement mesure de la pression interstitielle dans le cas de l'essai C.U+u.

L'appareil triaxial est un essai de référence pour la détermination de la résistance des sols, à savoir la cohésion c et l'angle de frottement interne φ . Dans le cadre de l'hypothèse d'un critère de rupture de type Mohr-Coulomb, τ_n , la norme de la contrainte de cisaillement s'appliquant à la facette de normale \vec{n} sur laquelle la rupture a été amorcée, est égale à :

$$\tau_n = c + \sigma_{nn} \tan \varphi$$

Avec σ_{nn} la contrainte normale s'appliquant sur cette facette (positive en compression). Dans le cas d'un essai C.D., ou dans le cas d'un essai C.U. exploité en contraintes effectives, l'essai triaxial permet d'obtenir la cohésion drainée, notée c' , et l'angle de frottement interne effectif, noté φ' . Dans le cas d'un essai U.U., l'essai triaxial permet d'obtenir la cohésion non drainée, notée c_u . Enfin, l'essai C.U. permet d'obtenir λ_{cu} , qui est la variation de la cohésion non drainée avec la contrainte de confinement appliquée au squelette solide de l'échantillon.

Question 11 :

Des essais consolidés drainés (CD) ont été réalisés sur les sols 1 et 2.

Expliquer succinctement à quoi vont servir les résultats des essais triaxiaux dans le cadre de ce projet et justifier le type des essais réalisés.

Question 12 :

Les résultats obtenus pour le sol 1 sont reportés dans le tableau ci-dessous.

Montrer, en utilisant la méthode de votre choix, que $c'=0$ kPa et $\varphi'= 25^\circ$. Dans le cas du choix d'une résolution graphique, le soin apporté aux différents tracés sera pris en compte dans la notation.

Test	1	2	3	4
p (kPa)	50	100	150	200
σ_z rupture (kPa)	123	246	370	493

Question 13 :

Les résultats des essais triaxiaux CD sur le sol 2 ont donné une cohésion non drainée nulle et un angle de frottement interne égal à 33° .

Sachant que les essais ont été réalisés sur des échantillons de section égale à 180cm², **donner** la valeur de la charge axiale maximale appliquée à l'échantillon en considérant une pression de confinement égale à 100kPa.

Question 14 :

Un essai C.U.+u a été réalisé sur le sol 1. Pour une pression de confinement de 100kPa, la contrainte à rupture obtenue a été de $\sigma_z^{rupt} = 154$ kPa.

En déduire la valeur de la pression interstitielle à la rupture (u_w^{rupt}).

Essais pressiométriques et conclusion

Outre les essais précédents, des essais pressiométriques ont été réalisés.

L'essai pressiométrique consiste à descendre une sonde dilatable radialement dans un forage réalisé au préalable. Le principe de l'essai consiste alors à mesurer les variations de volume de la sonde, qui sont égales aux variations de volume du sol au contact avec cette dernière, en fonction de la pression radiale appliquée au sol. Après étalonnage de la sonde et correction des effets d'inertie, la forme générale de la relation entre la variation de volume et la pression appliquée au sol est donnée en Figure 1.5 ci-dessous :

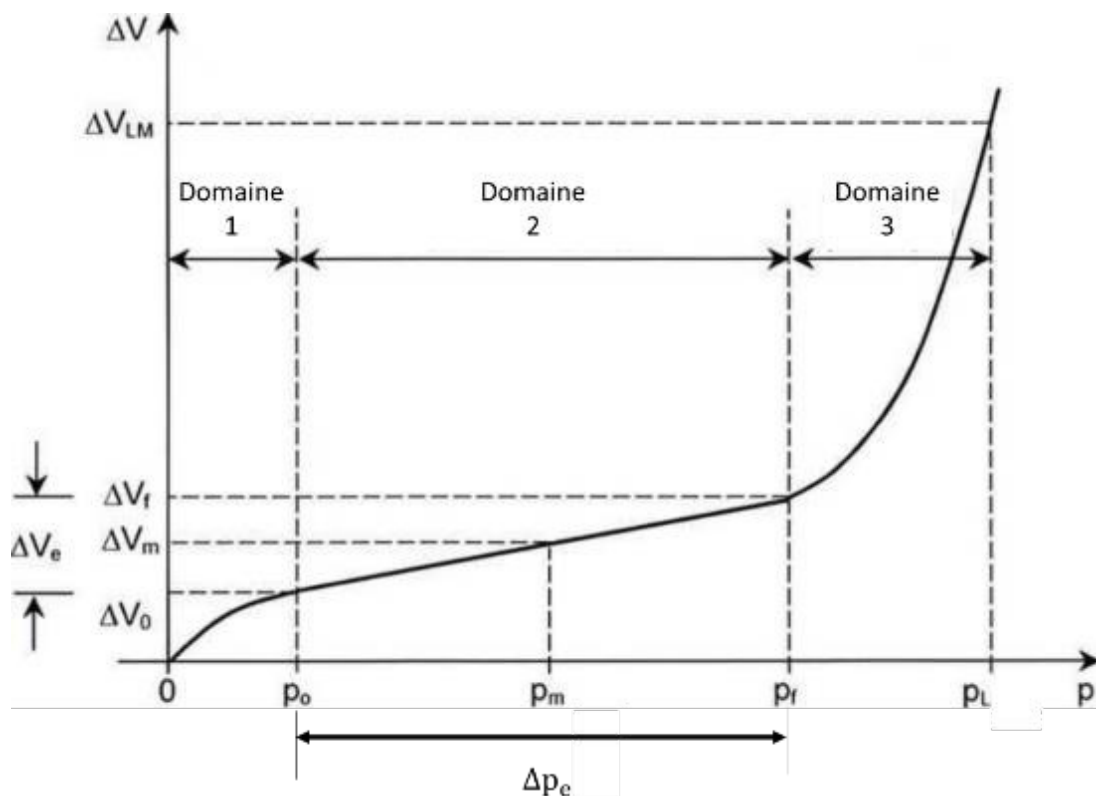


Figure 1.5. Courbe typique d'expansion pressiométrique corrigée.

La pression limite nette, notée p_L^* est définie comme la différence entre p_L et p_0 , tandis que la pression de fluage nette, notée p_f^* , est définie comme la différence entre p_f et p_0 . Enfin, le module pressiométrique E_M est défini par la relation :

$$E_M = 2(1 + \nu)(V_s + \Delta V_m) \frac{\Delta p_e}{\Delta V_e}$$

avec ν le coefficient de Poisson du sol (pris conventionnellement égal à 0,33), V_s le volume initial de la sonde. V_m , Δp_e et ΔV_e sont quant à eux définis en Figure 1.5.

Question 15 :

Expliquer brièvement la signification physique de p_0 , p_f , p_L , p_f^* , p_L^* et E_M et dire à quoi correspondent les domaines 1, 2 et 3 de la Figure 1.5.

Question 16 :

Les résultats du sondage pressiométrique sont reportés ci-dessous :

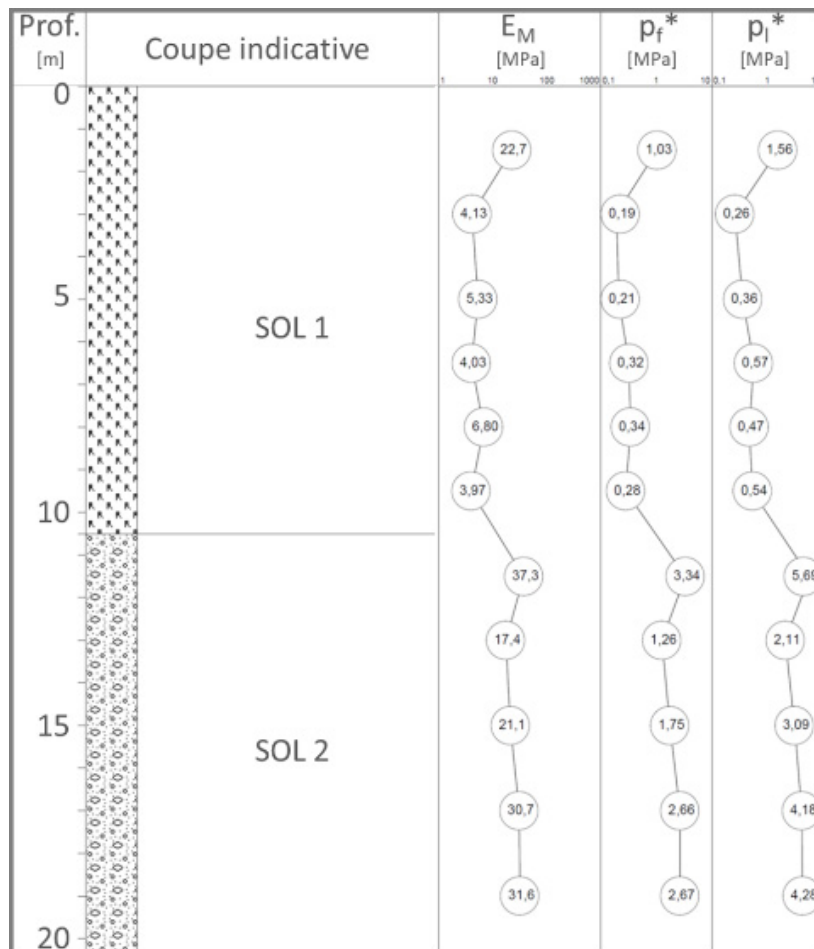


Figure 1.6. Résultat du sondage pressiométrique.

Compte tenu de ces résultats (ainsi qu'éventuellement de l'ensemble des informations à votre disposition sur cette campagne de caractérisation du sol) **quel type de fondations préconiserez-vous ?**

Partie 2 : Etude de l'arche en pisé (3,5 points)

Dans cette partie nous nous intéressons à l'étude des arches en Pisé.

Fabrication des blocs en pisé

Nous rappelons que le pisé est une technique de construction de murs (généralement porteurs) qui consiste à superposer des couches de terre crue compactées, à l'intérieur d'un coffrage et damées. L'épaisseur des murs réalisés est généralement comprise entre 40cm et 60cm, bien qu'il soit possible d'avoir des murs plus épais. La cohésion du matériau fini est principalement assurée par la matrice argileuse de la terre.

Avant que la terre soit mise en place dans le coffrage, sa teneur en eau est ajustée de manière à permettre une densité optimale. En effet, pour une énergie de compactage donnée, la résistance mécanique du mur en pisé réalisé augmentera avec sa densité sèche.

La description simplifiée des différentes étapes de fabrication d'un mur en pisé est reportée en Figure 2.1.

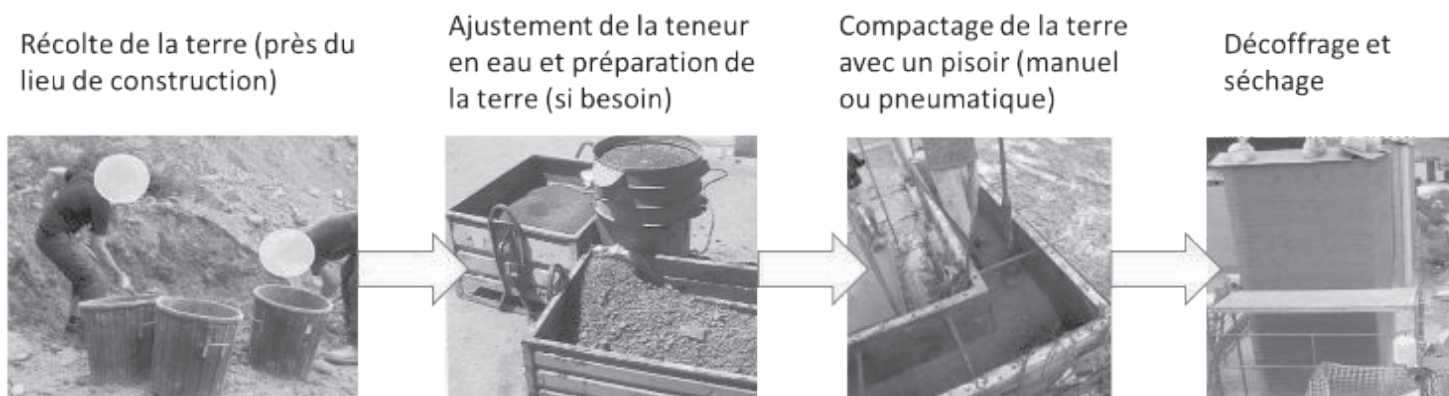


Figure 2.1. Présentation simplifiée des différentes étapes de construction d'un mur en pisé.

Notons que dans le cas du bâtiment B05 étudié dans ce sujet, une technique particulière de pisé préfabriqué sur site a été employée. Cette technique consiste à compacter sur site, mais de manière automatique, des blocs de pisé de grandes dimensions. Les blocs ont ensuite été assemblés afin de réaliser les arches en pisé, soit directement après fabrication, soit après une phase de séchage sous abri.

Question 17 :

Un essai d'analyse de la masse volumique humide du matériau après compactage en fonction de sa teneur en eau de fabrication a été réalisé. Quelle que soit la teneur en eau, l'énergie de compactage utilisée a été la même. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-après.

w (%)	6	8	10	11	12	13	14
ρ_h (g/cm ³)	1,96	2,05	2,13	2,16	2,17	2,16	2,10

Nous rappelons que la teneur en eau est définie comme le ratio entre la masse d'eau dans le matériau et sa masse sèche.

Tracer avec soin l'évolution de la masse volumique sèche du matériau en fonction de sa teneur en eau de fabrication sur la trame.

En déduire la teneur en eau de fabrication qui devrait être utilisée pour la fabrication des éléments en pisé.

Caractérisation mécanique du matériau

Afin d'étudier la résistance du pisé, des éprouvettes cylindriques de 16cm de diamètre et de 30cm de hauteur ont été réalisées.

Quatre cycles de déchargement-rechargement ont été réalisés (avec respectivement des contraintes axiales de 0.4MPa, 0.6MPa, 1MPa et 1.3MPa). L'essai a été réalisé avec une vitesse de déplacement du piston de la presse égale à 2mm/min en chargement et en déchargement. Une membrane en néoprène a été placée sur les surfaces de l'échantillon au niveau de l'embase et du chapeau. Le plan d'instrumentation des échantillons testés est constitué de 4 capteurs de déplacement axiaux mesurant les longueurs notés d_1 , d_2 , d_3 et d_4 ainsi que de 3 capteurs de déplacement radiaux mesurant les longueurs notés d_5 , d_6 , d_7 tels que représentés dans la Figure 2.2 ci-dessous :

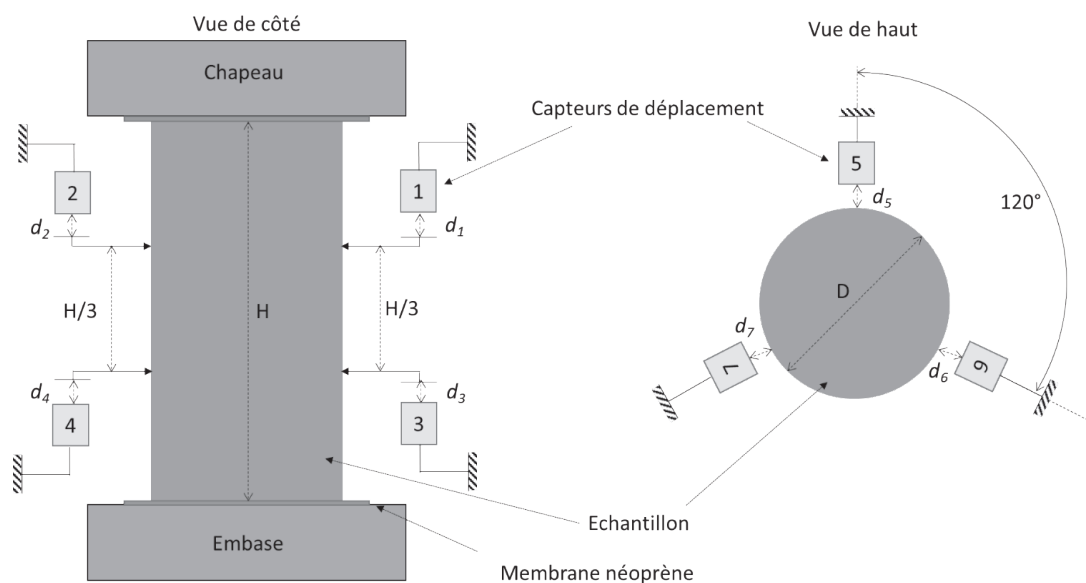


Figure 2.2. Représentation schématique de l'instrumentation de l'échantillon testé en compression simple.

Question 18 :

Justifier le plan d'instrumentation mis en place. En particulier, **expliquer** la mise en place des membranes néoprènes et le positionnement des différents capteurs.

Bonus : **Proposer** un plan d'instrumentation alternatif.

Question 19 :

Donner l'expression des déformations axiale ε_{zz} et radiale ε_{rr} en fonction de H , D et des valeurs d_i^0 et d_i mesurées par les capteurs (d_i^0 étant la longueur mesurée par le capteur i au temps t_0 et d_i la longueur mesurée au temps t).

Prendre la convention d'une déformation positive en contraction.

Question 20 :

Après fabrication, les éléments de pisé sèchent progressivement de leur teneur en eau de fabrication, généralement comprise entre 7% et 12%, jusqu'à une teneur en eau en service généralement comprise entre 0,5% et 1,5%. Dans le cadre de cette étude, une teneur en eau de 0,5% a été mesurée après un équilibrage des échantillons à 20°C dans une ambiance à 50% d'humidité relative. Les résultats des tests de résistance à la compression sur les échantillons ainsi équilibrés sont reportés dans la Figure 2.3 ci-dessous :

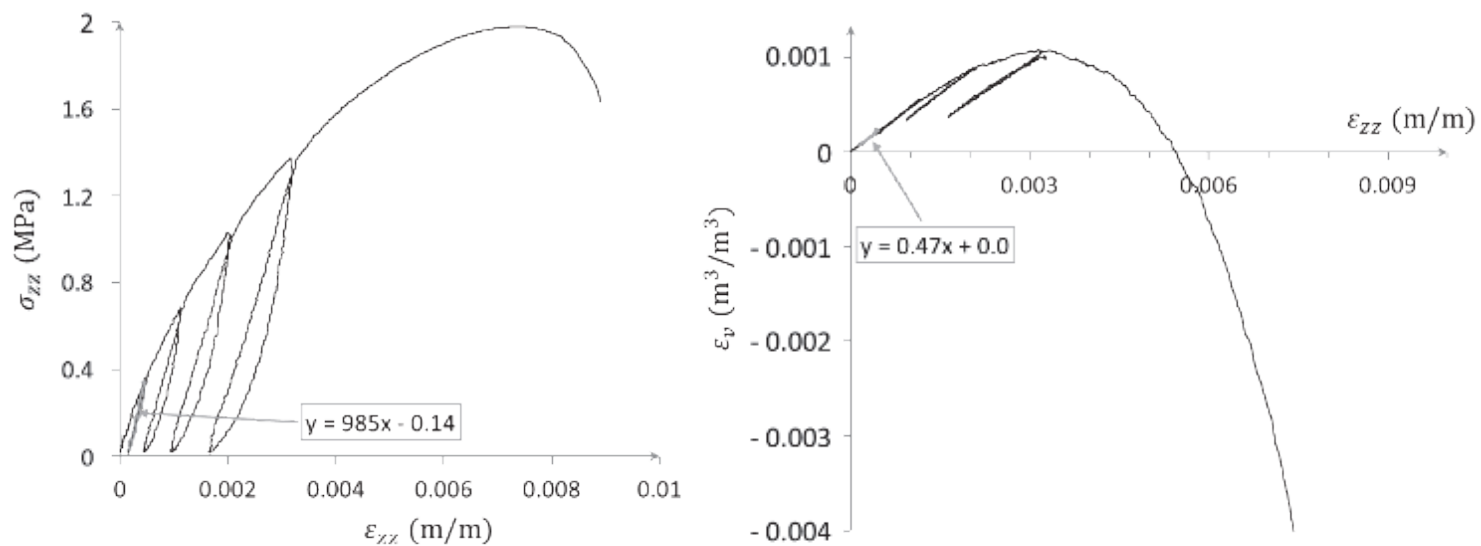


Figure 2.3. Courbes contrainte-déformation axiales (gauche) et déformation volumique – déformation axiale (droite) obtenues lors de l'essai en compression simple d'un échantillon de pisé séché à une teneur en eau de 0,5%.

Avec σ_{zz} la contrainte normale axiale (positive en compression), ε_{zz} la déformation axiale et ε_v la déformation volumique.

A la lecture des courbes, **donner** une description qualitative du comportement mécanique du matériau.

Question 21 :

Utiliser les résultats de ces essais afin d'obtenir le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau testé lors du premier cycle.

Question 22 :

Une des particularités importantes des constructions en terre est la dépendance de leur comportement mécanique avec leur teneur en eau, notamment durant la phase de séchage initial. Afin d'étudier cette dépendance, des essais de compression simple ont été réalisés sur le matériau à différentes teneurs en eau. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau ci-après :

Teneur en eau (%)	1	2	4	8
Rc (MPa)	1,6	1	0,5	0,2
E (MPa)	820	500	210	90

Expliquer le sens physique de la variation observée de la résistance à la compression et du module d'Young avec la teneur en eau (les valeurs pour une teneur en eau de 0,5% sont données en Figure 2.3).

Approche simplifiée du calcul de l'arche en pisé

Afin de faire une première vérification de la structure, nous supposons que l'arche en pisé peut se réduire à l'arc d'équation $y(x) = 4hx(l - x)/l^2$ représenté schématiquement en Figure 2.4. En outre, par souci de simplification des développements, nous ne considérerons que l'impact d'un chargement uniformément réparti, noté q .

Question 23 :

Sans faire de calcul, **expliquez** le fonctionnement d'un arc.

Question 24 :

Calculer les réactions aux appuis (nœuds 1 et 3).

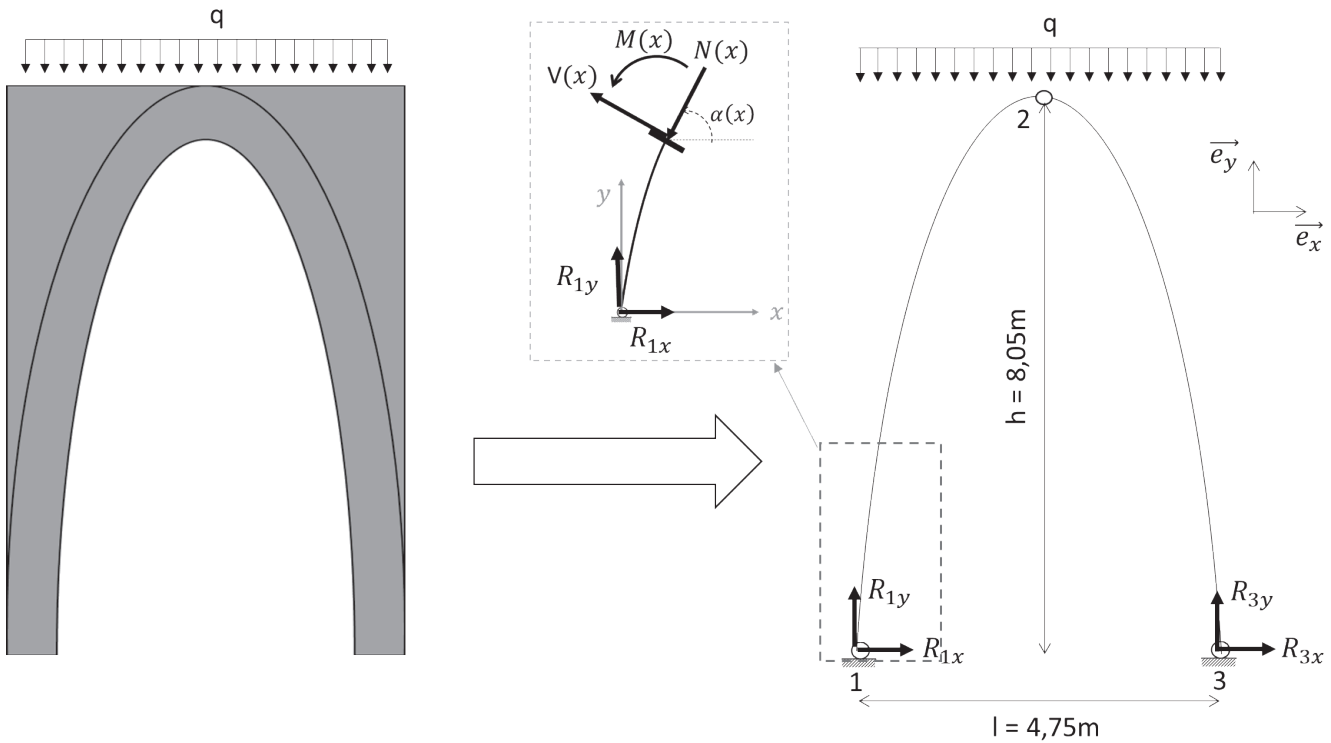


Figure 2.4. Représentation simplifiée de l'arche en pisé sous chargement uniformément réparti.

Question 25 :

Le problème étant symétrique, les développements de cette question seront limités à l'étude du demi-arc compris entre les nœuds 1 et 2.

(a) **Déterminer** les efforts internes dans l'arc : effort normal, effort tranchant et moment fléchissant en utilisant la convention de signe présentée en figure 2.4 (c'est-à-dire compression positive) pour x compris entre 0 et $L/2$.

(b) **Etudier** le signe et l'évolution des efforts normal, tranchant et du moment fléchissant pour x compris entre 0 et $L/2$. Que pouvez-vous en conclure.

Question 26 :

Déterminer l'expression de la contrainte normale (positive en compression) s'appliquant sur les facettes perpendiculaires à la fibre moyenne de l'arc.

Question 27 :

Dire si le cas de chargement proposé vous semble réaliste et dimensionnant ?

Bonus : Sans faire le calcul, **proposer un chargement plus réaliste**.

Calcul aux éléments finis de l'arche en pisé

Afin de prendre en compte une géométrie et un cas de chargement plus réalistes un calcul numérique a été réalisé en utilisant la méthode des éléments finis.

Les calculs ont été effectués en considérant une arche d'épaisseur constante égale à 80cm. Le poids propre de l'arche a été considérée pour ces calculs. Cependant le chargement a été largement simplifié de manière à être similaire à celui considéré pour les questions 23 à 26. Il est ainsi limité à une charge répartie en surface supérieure de l'arche, notée q et exprimée en kN/m. Afin d'obtenir néanmoins des valeurs de contraintes réalistes par rapport au cas réel, cette charge répartie a été prise égale à 35kN/m. Les résultats sont reportés dans les Figures 2.5 et 2.6.

Question 28 :

Expliciter et justifier quel type de problème plan (c'est-à-dire déformations planes ou contraintes planes) a été utilisé pour réaliser les calculs.

Question 29 :

A la lumière des résultats obtenus en contraintes et déplacements, **expliquer et justifier (ou critiquer)** les conditions limites utilisées.

Question 30 :

Comparer et discuter les valeurs obtenues aux résultats des essais mécaniques réalisés sur le matériau.

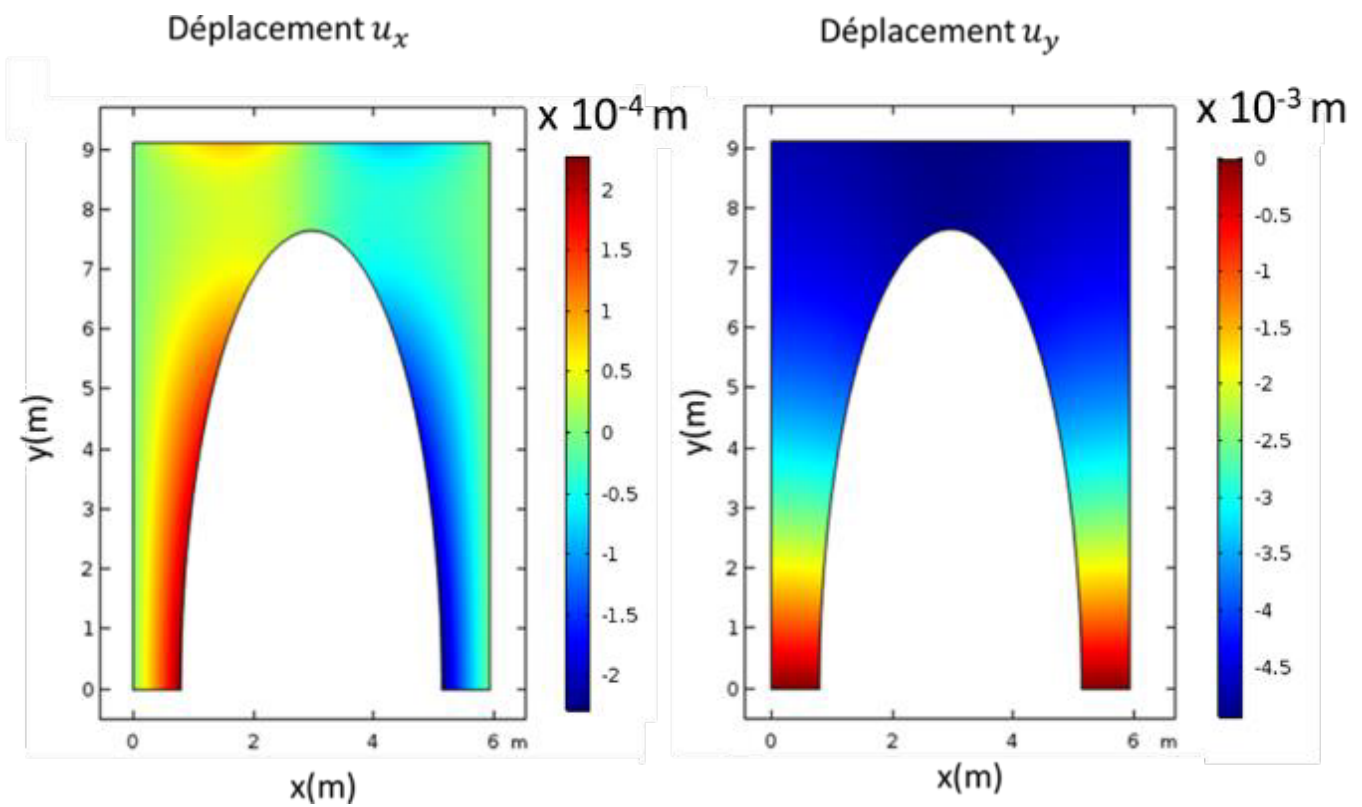


Figure 2.5. Champs des déplacements suivant \vec{e}_x (gauche) et \vec{e}_y (droite) obtenus suivant par le calcul éléments finis.

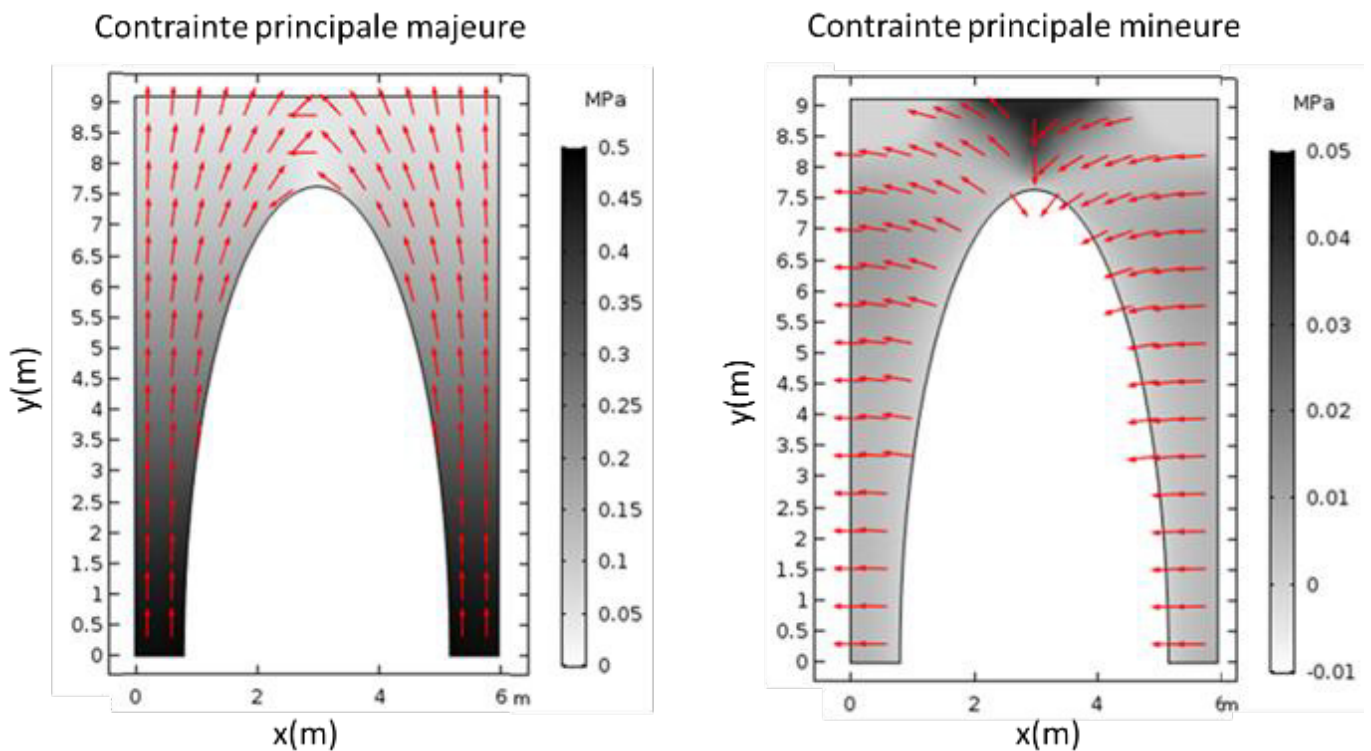


Figure 2.6. Champs des contraintes principales majeure (gauche) et mineure (droite) dans le plan $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Les nuances de gris représentent les valeurs (compression positive) et les flèche représente les directions principales de contraintes majeure et mineure.

Partie 3 : Etude d'une poutre en flexion (2 points)

La structure intérieure du bâtiment est entièrement réalisée en bois. Nous nous intéressons dans cette partie aux poutres sur deux appuis sur lesquelles repose le plancher en bois massif (voir figure 3.1).

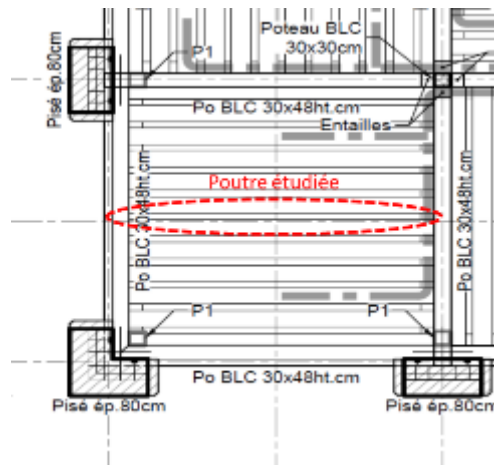


Figure 3.1. Repérage de la poutre sur deux appuis, étudiée dans cette partie.

Nous noterons L la longueur de la poutre, b sa largeur et h sa hauteur. Nous supposons qu'elle est sollicitée par une charge continue égale à q (attention, q est homogène à des kN/m).

Attention : Contrairement aux Parties 1 et 2, nous utiliserons dans cette partie la convention de signe de la mécanique des milieux continus, à savoir : contraintes de compression et contractions négatives.

Etude en théorie des poutres

Dans un premier temps, nous proposons d'appliquer les hypothèses classiques de la théorie des poutres et de réduire la poutre étudiée à l'élément représenté en Figure 3.2.

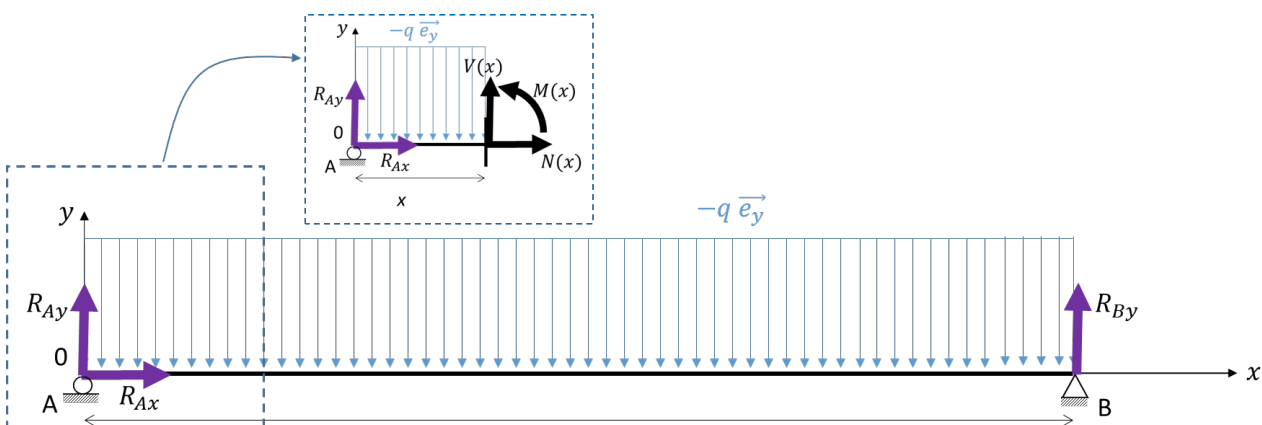


Figure 3.2. Poutre sur 2 appuis réduite à sa fibre moyenne.

Question 31 :

Etablir les expressions des efforts normal et tranchant et du moment fléchissant, en procédant à l'équilibre statique puis en utilisant la méthode des coupures fictives. Veiller à respecter la convention de signe présentée en figure 3.2.

Question 32 :

Donner l'expression de la déformée $y(x)$ et **calculer** la flèche à mi-travée.

Etude en mécanique des milieux continus

Nous proposons maintenant de retrouver les diagrammes d'efforts et la déformée de la poutre en passant par une approche continue. Pour ce faire, nous considérerons le problème plan schématisé en Figure 3.3.

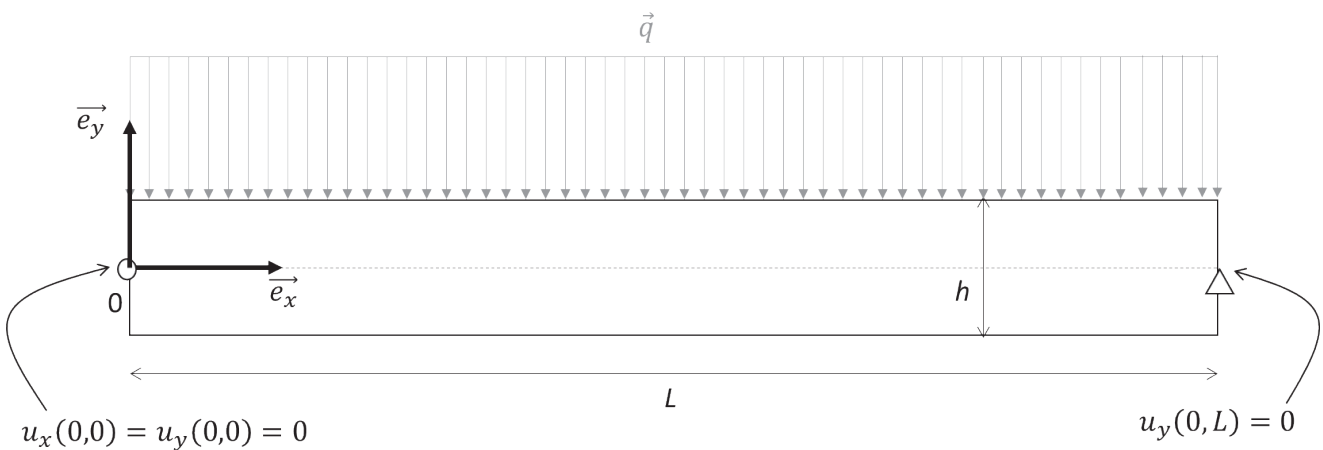


Figure 3.3. Représentation schématique de la poutre étudiée dans le plan

En tous point $M(x,y)$ de la poutre, nous supposons que le tenseur de contrainte planes de Cauchy s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y)}$$

avec $\sigma_{xx}(x, y) = \alpha x(x - L) y$.

Question 33 :

En écrivant l'équilibre local ($\overrightarrow{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}) = \vec{0}$) suivant \vec{e}_x et en utilisant les conditions limites en $y = \pm h/2$, **montrer** que $\sigma_{xy} = \frac{\alpha}{2} (L - 2x) \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right)$.

Question 34 :

En écrivant l'équilibre local ($\overrightarrow{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}) = \vec{0}$) suivant \vec{e}_y et en utilisant les conditions limites en $y = \pm h/2$, **montrer** que $\alpha = \frac{q}{2I}$, avec $I = \frac{bh^3}{12}$ et que $\sigma_{yy} = \frac{q}{2I} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4}y - \frac{h^3}{12} \right)$.

Donner alors l'expression complète du tenseur de contrainte.

Question 35 :

Utiliser les résultats des questions 33 et 34 pour établir les expressions des efforts normal et tranchant ainsi que du moment fléchissant de la poutre sur deux appuis.

Les comparer à celles obtenues à la question 31.

Question 36 :

Nous supposons que le matériau est élastique linéaire isotrope et donc que la relation entre les tenseurs de contrainte et de déformation suit la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta}$$

Avec $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des petites déformations, E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur identité d'ordre 2.

Exprimer le tenseur des déformation linéarisé $\boldsymbol{\varepsilon}$ à partir de l'expression du tenseur de contrainte obtenue à la question 34.

Question 37 :

Pour cette question, nous prendrons $\nu = 0$.

Par intégration de ε_{xx} et ε_{xy} et en utilisant les conditions limites en $x = 0$ et $x = L$, **donner** l'expression de $u_y(x, 0)$.

Montrer que dans le cas de poutres élancées $u_y(L/2, 0)$ est égal, au premier ordre, à la flèche à mi-travée obtenue en question 32

Rappel: par définition, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}(\vec{u}) + {}^T\mathbf{grad}(\vec{u}))$, avec $\mathbf{grad}(\vec{u})$ le gradient du champ de déplacement et ${}^T\mathbf{grad}(\vec{u})$ sa transposée.

Partie 4 : Etude thermique du mur en pisé (7 points)

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence l'intérêt d'une isolation extérieure pour un mur en pisé du point de vue thermique ainsi que de l'utilisation d'un isolant biosourcé.

Les murs en pisé sont des parois constituées intégralement de terre argileuse (et granuleuse). La technique de construction consiste à couler l'argile légèrement humide dans des coffrages avant de la tasser vigoureusement à l'aide d'un fouloir (historiquement un *pisoir*, outil qui a donné son nom au procédé). Ainsi battue, la terre forme une masse homogène de forte densité.

La structure en pisé du bâtiment étudié a les caractéristiques suivantes :

- épaisseur $e_{\text{pisé}} = 500 \text{ mm}$
- masse volumique $\rho_{\text{pisé}} = 1900 \text{ kg/m}^3$
- conductivité thermique $\lambda_{\text{pisé}} = 1 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$

La résistance thermique de conduction d'une couche de matériau homogène est définie par :

$$R = e/\lambda \text{ [m}^2 \cdot \text{°C/W]}$$

Question 38 :

Calculer la résistance thermique de la paroi de pisé brute.

A quelle épaisseur d'isolant (fibres de bois $\lambda = 0.04 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$) est-elle thermiquement équivalente ? **Qu'en pensez-vous ?**

Des considérations purement esthétiques ont conduit le maître d'ouvrage à retenir une construction rendant visible le pisé de l'extérieur et donc à opter pour un doublage intérieur. Nous proposons ici d'étudier la configuration avec doublage extérieur.

Le flux de chaleur par conduction dans un matériau solide est représenté par la loi de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \text{éq. (4.1)}$$

où : T est la température en K ou $^{\circ}\text{C}$,
 φ est la densité de flux de chaleur en W/m^2 .

$$\overrightarrow{\text{grad}} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \text{ en coordonnées cartésiennes.}$$

En réalisant un bilan énergétique sur un volume élémentaire et en utilisant la loi de Fourier, on obtient l'équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes, équation permettant de décrire la distribution de température dans le matériau :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{éq (4.2)}$$

où : ρ est la masse volumique en kg/m^3 ,
 C est la capacité calorifique massique en $\text{J/(kg} \cdot \text{°C)}$.

Pour simplifier la modélisation de la conduction, on admettra ici que :

- le transfert de chaleur est **unidirectionnel suivant l'axe x**,
- le **régime permanent est établi**.

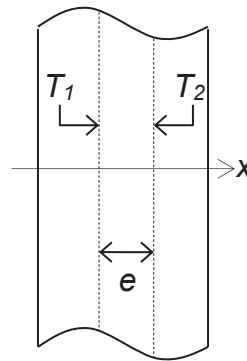
Question 39 :

En prenant en compte les hypothèses précédentes, **simplifier** les expressions analytiques du flux de chaleur éq (4.1) et de l'équation de la chaleur éq (4.2).

Question 40 :

Montrer que dans une couche de matériau homogène d'épaisseur e traversée par un flux φ , la température évolue linéairement :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} x + T_1$$



Question 41 :

Montrer que la densité de flux φ peut alors s'exprimer sous la forme $\varphi = (T_1 - T_2) / R$.

En régime permanent, la continuité du flux permet de généraliser la loi aux parois constituées de plusieurs couches de matériaux d'épaisseurs et de conductivités différentes :

$$\varphi = (T_1 - T_2) / R_{12} = (T_2 - T_3) / R_{23} = \dots = (T_{n-1} - T_n) / R_{n-1n} = (T_1 - T_n) / (R_{12} + R_{23} + \dots + R_{n-1n})$$

Le mur de pisé isolé par l'extérieur nécessite une protection physique par bardage :



Figure 4.1 : exemple de mur isolé par l'extérieur

Le bardage consiste généralement en lames de bois assemblées horizontalement et fixées sur tasseaux verticaux. L'épaisseur des tasseaux, de l'ordre de 20 mm, permet de créer une lame d'air ventilée naturellement entre le bardage et le film pare-pluie qui protège l'isolant. Cette lame d'air est d'ailleurs préconisée par le DTU 41.2 « revêtements extérieurs en bois ».

La paroi en pisé peut donc être modélisée simplement par l'assemblage des couches suivantes (de l'intérieur vers l'extérieur) :

- pisé,
- isolant,
- lame d'air,
- bardage.

Le flux de chaleur traverse la lame d'air par **convection** et **rayonnement**.

La densité de flux thermique par convection définit l'échange de chaleur entre une surface S et le fluide en son contact : $\varphi_{conv} = h_{conv} (T_S - T_{fluide})$ où h_{conv} est le coefficient d'échange par convection en $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$.

Question 42 :

En utilisant la continuité du flux, **déterminer** l'expression analytique de l'échange par convection dans la lame d'air $\varphi_{conv_LA} = f(T_A - T_B)$ où T_A et T_B sont les températures de surface de part et d'autre de la lame d'air.

La densité de flux thermique par rayonnement entre 2 surfaces S_A et S_B supposées grises et diffuses et d'émissivités respectives ε_A et ε_B est défini par :

$$\varphi_{ray} = \frac{\sigma (T_A^4 - T_B^4)}{\frac{1 - \varepsilon_A}{\varepsilon_A} + \frac{1}{F_{AB}} + \frac{S_A (1 - \varepsilon_B)}{S_B \varepsilon_B}}$$

où : σ est la constante de Stefan Boltzmann ($5,67 \cdot 10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$)
 T est la température de surface en K ($T[K] = T[^\circ C] + 273$)
 F_{AB} (facteur de forme) est la fraction géométrique du rayonnement émis par S_A et reçu par S_B

Appliqué à la lame d'air, on peut considérer que :

- les surfaces en regard sont très grandes devant l'épaisseur de la lame d'air,
- les températures des surfaces T_A et T_B sont suffisamment proches pour estimer $T_A \approx T_B \approx T_{moy}$ à des fins de linéarisation.

Question 43 :

Simplifier et **linéariser** la formulation de φ_{ray} afin de **déterminer** l'expression analytique de l'échange par rayonnement dans la lame d'air $\varphi_{ray} = f(T_A - T_B)$.

Question 44 :

En déduire l'expression de la résistance thermique de la lame d'air :

$$R_{LA} = \frac{1}{\frac{h_{conv}}{2} + h_{ray}}$$

où h_{ray} est le coefficient d'échange par rayonnement en $W/(m^2 \cdot C)$:

$$h_{ray} = 4 \sigma T_m^3 \left(\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} - 1 \right)^{-1}$$

Pour une épaisseur de lame d'air de 20 mm, le coefficient d'échange par convection naturelle est estimé à $h_{conv} = 3,5 W/(m^2 \cdot C)$.

En considérant une moyenne annuelle, la température de la lame d'air est estimée à $T_{moy} = 12^\circ C = 285 K$.

Une surface brute a une émissivité évaluée à $\varepsilon = 0,95$.

Une surface réfléchissante (aluminisée par exemple) a une émissivité évaluée à $\varepsilon = 0,05$.

Question 45 :

Calculer la résistance thermique de la lame d'air R_{LA} pour trois situations :

- les surfaces en vis-à-vis sont à l'état brut,
- l'une des surfaces est recouverte d'un film réfléchissant,
- les deux surfaces sont recouvertes d'un film réfléchissant.

Préciser l'épaisseur d'isolant thermiquement équivalente ($\lambda = 0,04 W/(m \cdot C)$).

Conclure quant à la pertinence de film réfléchissant.

Depuis l'intérieur vers l'extérieur, la paroi est constituée successivement des couches suivantes :

	Épaisseur e [mm]	Conductivité λ [W/m.K]	Résistance thermique R [$m^2 \cdot C/W$]
Pisé	500	1	
Fibres de bois	160	0,04	
Lame d'air	20		0,5
Bardage	21		0,14

On précise les résistances thermiques superficielles :

- entre la surface du pisé et l'ambiance intérieure $R_{SI} = 0,13 m^2 \cdot C/W$
- entre la surface du bardage et l'ambiance extérieure $R_{SE} = 0,04 m^2 \cdot C/W$

On considère les conditions de température hivernale suivantes :

- intérieur $19^\circ C$, HR = 50%
- extérieur $-5^\circ C$, HR = 90%

Question 46 :

En considérant le régime permanent établi, calculer la densité de flux thermique ϕ ainsi que les températures aux différentes faces et interfaces des matériaux.

Par souci de clarté, indiquer les valeurs obtenues dans une coupe représentative de la paroi.

En déduire la température moyenne du pisé.

Question 47 :

En configuration « isolation extérieure », le pisé est considéré comme faisant partie de l'ambiance intérieure.

Présenter les avantages et inconvénients du point de vue thermique de cette configuration dans un bâtiment du secteur tertiaire en distinguant les périodes hivernale, estivale et de mi-saison.

L'inertie thermique peut être considérée ici comme la capacité des matériaux à maintenir stable la température intérieure malgré les variations de température extérieure ou les charges internes.

Dans le domaine du bâtiment, on distingue deux types d'inertie :

- Inertie thermique de transmission

Elle agit en résistant à la variation de température extérieure due aux amplitudes thermiques journalières et aux effets du rayonnement solaire sur les parois d'enveloppe externe. Ce type d'inertie fait appel principalement à la notion de *diffusivité thermique* « *a* » [m^2/s] de la paroi de l'enveloppe :

$$a = \frac{\lambda}{\rho C} \quad \text{avec } \lambda : \text{conductivité thermique en } W/(m \cdot ^\circ C)$$

ρ : masse volumique en kg/m^3

C : capacité calorifique massique en $J/(kg \cdot ^\circ C)$

La diffusivité thermique décrit la rapidité du déplacement de la chaleur à travers la masse d'un matériau : avec une faible diffusivité, la transmission des variations de température sera fortement retardée et, par voie de conséquence, les variations atténuées.

- Inertie thermique par absorption

Elle réduit les variations de la température intérieure (dus à l'intermittence des sources de chaleur interne et à la pénétration solaire par les baies) en absorbant la chaleur. Ce sont donc les parois intérieures, thermiquement parlant, qui sont concernées. La capacité d'un matériau à absorber (ou à restituer) la chaleur est définie par la notion d'*effusivité thermique* « *b* » [$J^\circ C^{-1} m^{-2} s^{-1/2}$] :

$$b = \sqrt{\lambda \rho C}$$

En absorbant facilement les flux de chaleur, un matériau effusif s'échauffera peu et limitera les variations de température intérieure.

Caractéristiques intrinsèques des matériaux étudiés :

	Masse volumique ρ [kg/m^3]	Conductivité λ [$W/m^\circ C$]	Chaleur massique C [$J/kg^\circ C$]
Pisé	1900	1	850
Fibres de bois	50	0,04	2100
Plâtre	825	0,25	1000
Laine de verre	18	0,035	1030

Question 48 :

En configuration « isolation thermique intérieure » ou ITI, seul le parement de plâtre (BA13 soit 13 mm) fait partie de l'ambiance intérieure, thermiquement parlant.

Calculer et comparer l'effusivité du plâtre et du pisé.

Déterminer et comparer la quantité d'énergie en $[Wh/(m^2°C)]$ que peuvent absorber le plâtre (ITI) et le pisé (ITE) par unité de surface et pour un degré d'échauffement du matériau.

La diffusivité de l'isolant est une caractéristique importante lors de la période estivale notamment en isolation de toiture. En effet, non seulement la zone est soumise à un ensoleillement direct conséquent mais de plus il est rare qu'un matériau effusif y soit adjoint en quantité suffisante pour absorber l'énergie reçue et ainsi amortir les surchauffes intérieures.

On peut modéliser l'effet de la variation de température extérieure journalière sur la face externe de l'isolant par :

$$T_{se}(t) = T(x=0, t) = T_{sem} + \Delta T_{se} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

où T_{sem} est la température superficielle moyenne,

ΔT_{se} est la demi-amplitude de la perturbation soit $(T_{se \max} - T_{se \min}) / 2$,

ω est la pulsation de l'onde périodique établie soit $2\pi/p$ avec p , période de 24h,

φ_0 est le déphasage angulaire à l'origine.

Si l'isolant, considéré thermiquement épais, ne subit aucun apport ou perte d'énergie depuis l'intérieur du bâtiment, on montre que la température dans le matériau varie toujours autour de T_{sem} selon une onde de même fréquence mais amortie et déphasée :

$$T(x, t) = T_{sem} + \Delta T_{se} e^{-Ax} \sin(\omega t + \varphi_0 - Ax)$$

où e^{-Ax} est le facteur d'amortissement,

Ax est le déphasage angulaire que l'on peut mettre sous la forme $\omega \Delta t$ avec Δt le décalage temporel.

Question 49 :

En utilisant l'équation de la chaleur éq (4.2), **déterminer** l'expression de A .

Afin de comparer le comportement d'isolants minéral (laine de verre) et biosourcé (fibres de bois), il est nécessaire de définir au préalable leurs épaisseurs respectives permettant de respecter la réglementation thermique en vigueur ($R \geq 7 m^2°C/W$ en toiture) :

	Epaisseur e [mm]
Fibres de bois	280
Laine de verre	240

Question 50 :

Calculer pour les deux matériaux :

- la diffusivité en $[m^2/h]$,
- le décalage temporel en $[h]$ en $x = e$,
- le facteur d'amortissement en $x = e$.

Les résultats seront présentés sous forme de tableau.

Question 51 :

Représenter sur un même graphique :

- $T_{se}(t) = T(0,t)$,
- $T_{si}(t) = T(e,t)$ pour l'isolant en laine de verre,
- $T_{si}(t) = T(e,t)$ pour l'isolant en fibres de bois.

Discuter des conséquences sur le confort intérieur estival avec chaque isolant.

Proposer une solution pertinente pour réduire T_{si} avec l'isolant en fibres de bois.

On précise : $T_{sem} = 27.5^\circ\text{C}$

$$\Delta T_{se} = 7.5^\circ\text{C}$$

$$\varphi_0 = \frac{5}{4}\pi$$

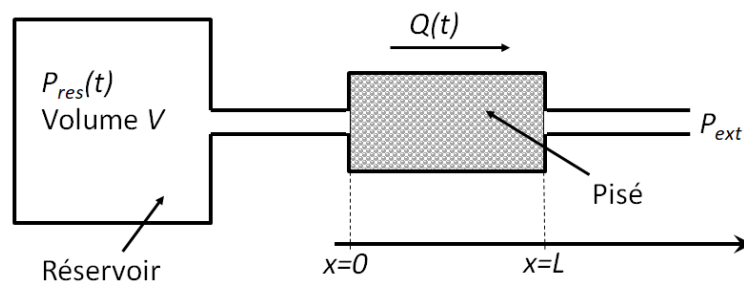
Partie 5 : Etude de la perméabilité intrinsèque (3 points)

La perméabilité d'un milieu poreux mesure **son aptitude à se laisser traverser par un fluide** sous l'effet d'un gradient de pression.

L'objectif de la partie 5a est de déterminer la **perméabilité intrinsèque du pisé par une méthode expérimentale basée sur la mesure de la pression au cours d'une vidange** à travers un échantillon de pisé. L'objectif de la partie 5b est de modéliser la **perméabilité** et d'utiliser sa valeur expérimentale de manière à déterminer un **diamètre de grains équivalent**. Les parties 5a et 5b sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

5.a Détermination de la perméabilité intrinsèque par une méthode transitoire

On propose de **mesurer la perméabilité intrinsèque du pisé** supposée homogène et isotrope en **enregistrant l'évolution de la pression $P_{res}(t)$ du réservoir** au cours de la vidange d'un volume connu V de gaz, initialement à la pression P_i à travers un échantillon de Pisé vers une pression extérieure P_{ext} . A l'instant initial, le réservoir et l'échantillon de pisé sont à la pression P_i . L'expérience est schématisée sur la figure ci-dessous.



On notera $P(x,t)$ le champ de pression dans le pisé.

Les pertes de charges dans les embouts et tubes de jonction ou de sortie seront négligées de sorte que : $P(x=0,t) = P_{res}(t)$ et $P(x=L,t) = P_{ext}$.

Seule la perte de charge à travers le pisé intervient.

Question 52 :

En supposant que le comportement du gaz suit la loi des gaz parfaits et que les variations de températures liées à l'expansion du gaz sont négligeables et donc en supposant que l'écoulement est isotherme, montrer que la masse totale M_t de gaz contenu dans le réservoir est :

$$M_t = \frac{P_{res}(t)MV}{RT} \text{ avec } P_{res}(t) \text{ la pression dans le réservoir et } M \text{ la masse molaire du gaz.}$$

En déduire le débit massique Q sortant du réservoir à l'instant t en fonction de $\frac{dP_{res}(t)}{dt}$.

Question 53 :

Dans le cas d'un écoulement à masse volumique variable comme un gaz, l'équation de continuité macroscopique s'écrit :

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{U}) = 0 \quad \text{avec } \varepsilon \text{ la porosité du matériau telle que } \varepsilon = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total du milieu poreux}}$$

On rappelle que div est l'opérateur divergence tel que :

$$\text{div} \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Pour les écoulements à faible nombre de Mach et faible nombre de Reynolds, en négligeant les effets de gravité, on peut montrer que la loi de Darcy est valable : $\bar{U} = -\frac{K_i}{\mu} \bar{\nabla} P$ avec K_i la perméabilité intrinsèque en m^2 et μ la viscosité dynamique en $Pa.s$.

$$\text{On rappelle que : } \bar{\nabla} f = \overline{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z$$

Montrer que l'équation gouvernant l'évolution de la pression dans l'échantillon est

$$\varepsilon \frac{\partial P}{\partial t} = \text{div} \left(P \frac{K_i}{\mu} \bar{\nabla} P \right).$$

Question 54 :

En supposant que $(P_i - P_{ext}) / P_{ext} \ll 1$, l'équation précédente devient :

$$\varepsilon \frac{\partial P}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{P_{ext} K_i}{\mu} \bar{\nabla} P \right)$$

A partir de cette équation, en raisonnant en variation totale sur tout l'échantillon, **montrer** que l'échelle de temps caractéristique t_p de la propagation de pression dans l'échantillon est :

$$t_p = \frac{\mu \varepsilon L^2}{P_{ext} K_i}$$

Question 55 :

Soit t_{vp} l'échelle de temps caractéristique de la variation de pression dans le réservoir. Si t_p est très inférieur à t_{vp} , on peut négliger le terme transitoire dans l'équation gouvernant la variation de pression dans le pisé.

On supposera que cette condition est vérifiée et donc que le régime est quasi stationnaire. On supposera alors :

$$P(x, t) = \frac{P_{res}(t) - P_{ext}}{L} (x - L) + P_{ext}$$

En remarquant que le débit massique dans le réservoir s'écrit $Q = \frac{dM_t}{dt}$ et qu'il s'écrit dans le pisé :

$$Q = \rho_{ext} A U \quad \text{avec } U \text{ la vitesse de Darcy, } A \text{ la section transversale de passage de l'échantillon,}$$

montrer que
$$\frac{dP_{res}(t)}{dt} = \frac{P_{ext}}{V} A \frac{K_i}{\mu} \frac{(P_{res}(t) - P_{ext})}{L}$$

On note la pression réduite $P^*(t) = \frac{P_{res}(t) - P_{ext}}{P_i - P_{ext}}$. **Résoudre l'équation différentielle** ci-dessus afin de trouver $P^*(t)$ en fonction du temps.

Question 56 :

L'échelle de temps caractéristique de la variation de pression dans le réservoir t_{vp} correspondant à la constante de temps $\tau = \frac{V\mu L_0}{AP_{ext}K_i}$, **en déduire** le rapport t_p / t_{vp} et la condition pratique d'écoulement quasi stationnaire établie précédemment ($t_p \ll t_{vp}$) ?

Question 57 :

En notant la pression réduite $P^*(t) = \frac{P_{res}(t) - P_{ext}}{P_i - P_{ext}}$, **montrer** que $\left. \frac{dP^*}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{t_{vp}}$. **En déduire** l'équation de la tangente en $t=0$ à la courbe $P^*(t)$ en fonction du temps. **A quelle valeur** cette tangente coupe-t-elle l'axe des temps ? **En déduire** une méthode expérimentale de la mesure de K_i . On trouve : $\tau = 100s$, $V=1l$, $L=10cm$, $A=10cm^2$, $P_{ext}=1bar$, $\mu=10^{-2}cp$ (air) avec $1cp = 10^{-3} kg.m^{-1}s^{-1}$. **Calculer** K_i dans le cas du pisé.

5.b Modélisation de la perméabilité intrinsèque

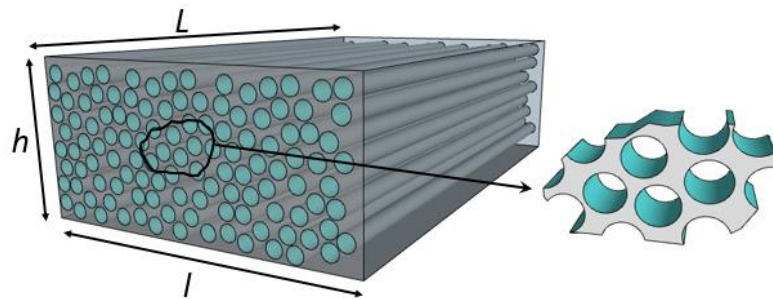


Figure 5.1 : Milieu poreux schématisé par un ensemble de tubes capillaires cylindriques

Un milieu poreux est schématisé, en première approximation, par un ensemble de n tubes capillaires cylindriques de même longueur L et de même rayon R qui constituent les pores du milieu. Le fluide circule donc dans les tubes. Comme précédemment, la porosité ε est donnée par :

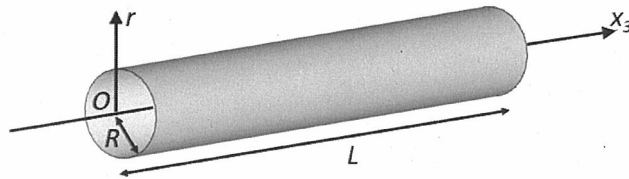
$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total du milieu poreux}}$$

On définit la surface spécifique S_{sp} du milieu poreux par :

$$S_{sp} = \frac{\text{surface des pores}}{\text{volume total du milieu poreux}}$$

L'écoulement est celui d'un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique μ à travers le milieu poreux.

On considère dans un premier temps l'écoulement du fluide dans un seul tube cylindrique horizontal de longueur L et de rayon R , sous l'action d'un gradient de pression constant dirigé suivant l'axe du tube $G = -\frac{dp}{dx_3}$. On néglige les effets de la pesanteur.



L'écoulement est supposé axial laminaire. On donne l'équation de Navier Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right) + \overrightarrow{\text{grad}} p = \mu \Delta \vec{V}$$

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

$$\text{Et } \Delta \vec{A} \cdot \vec{e}_3 = \frac{\partial^2 A_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_3}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}$$

Question 58 :

Expliquer pourquoi $\vec{V} = V(r) \vec{e}_3$.

En régime stationnaire et en projetant l'équation de Navier Stokes sur l'axe (O, x_3) , **simplifier** l'équation de Navier Stokes et **montrer** que :

$$\frac{dP}{dx_3} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$$

En déduire l'équation différentielle donnant $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$ en fonction de r , G et μ .

Question 59 :

Résoudre l'équation obtenue et **montrer** que le profil des vitesses dans une section droite quelconque de la conduite correspond à un écoulement laminaire parabolique : $V = \frac{G}{4\mu} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

. **Calculer** la vitesse moyenne \bar{V} dans une section droite. **En déduire** le débit volumique q_v .

On rappelle que la moyenne d'une fonction $f(r)$ est définie par $\frac{1}{S} \times \int_S f(r) dS$.

Question 60 :

Montrer que la contrainte tangentielle $\tau_{r_s} = \mu \frac{\partial V_p}{\partial r}$ est maximale au niveau de la paroi du tube. **En déduire** l'expression de la force d'entraînement F exercée par le fluide sur le tube en fonction du débit volumique q_v , de la viscosité μ et des caractéristiques géométriques du tube R et L .

On considère maintenant l'écoulement à travers un milieu poreux (cf figure 5.1) constitué d'un assemblage de n tubes comme celui étudié de la question 58 à la question 60.

Question 61 :

Déterminer le débit volumique Q à travers cet assemblage.

En déduire la vitesse de filtration $V_f = Q/S$ (S étant la section droite du milieu poreux) en fonction de la perte de charge G , de la porosité ε , et des caractéristiques du fluide et des capillaires.

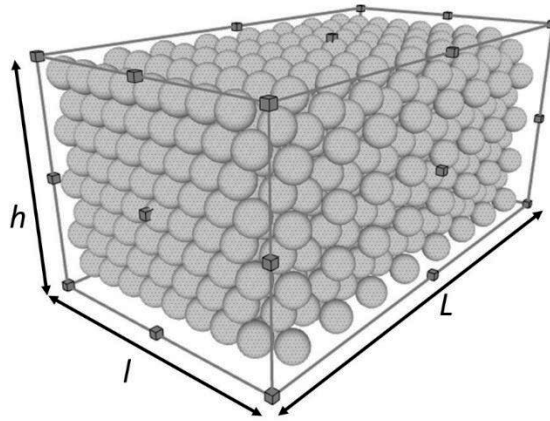
La perméabilité intrinsèque K_i est définie par la relation : $V_f = \frac{K_i}{\mu} G$. **Montrer** que : $K_i = \varepsilon \frac{D^2}{32}$.

Montrer que la perméabilité intrinsèque peut s'exprimer simplement en fonction de la porosité et de la surface spécifique : $K_i = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^3}{S_{sp}^2}$.

On précise le débit volumique dans un tube : $q_v = \frac{G \pi}{8\mu} R^4$

Question 62 :

On considère maintenant un milieu poreux constitué d'un empilement de billes :



En admettant que l'expression de la perméabilité intrinsèque $K_i = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^3}{S_{sp}^2}$ établie précédemment reste valable pour le milieu poreux constitué par un assemblage de billes, **montrer** que la perméabilité est donnée par la formule de Kozeny-Carman :

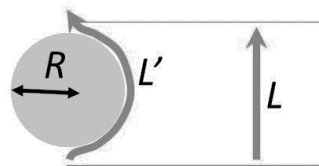
$$K_i = \frac{\varepsilon^3 D^2}{72(1-\varepsilon)^2}$$

D étant le diamètre moyen des billes.

Question 63 :

Les capillaires induits par l'empilement des billes ne sont pas linéaires mais présentent des tortuosités. Leur longueur effective est alors égale à $L' = \tau L$, τ étant le facteur de tortuosité. L'expression modifiée de la formule de Kozeny-Carman prenant en compte la tortuosité est :

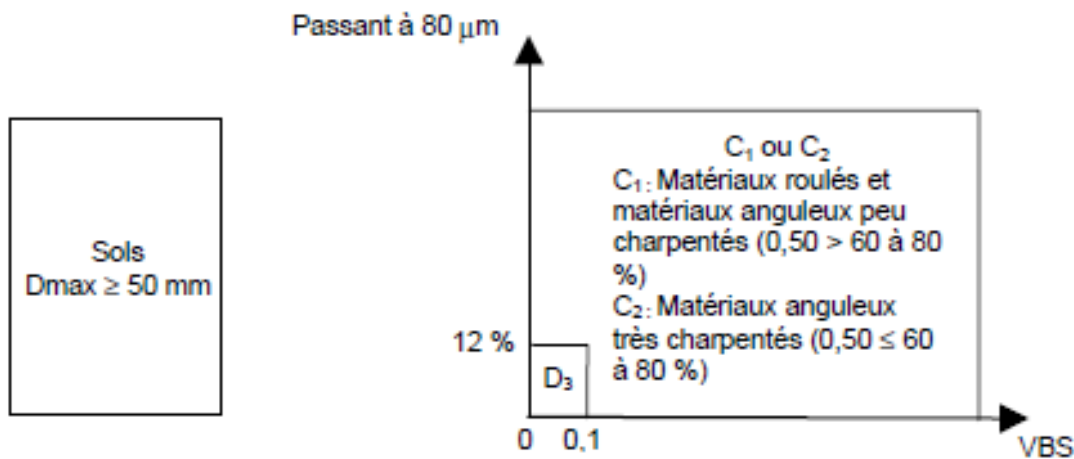
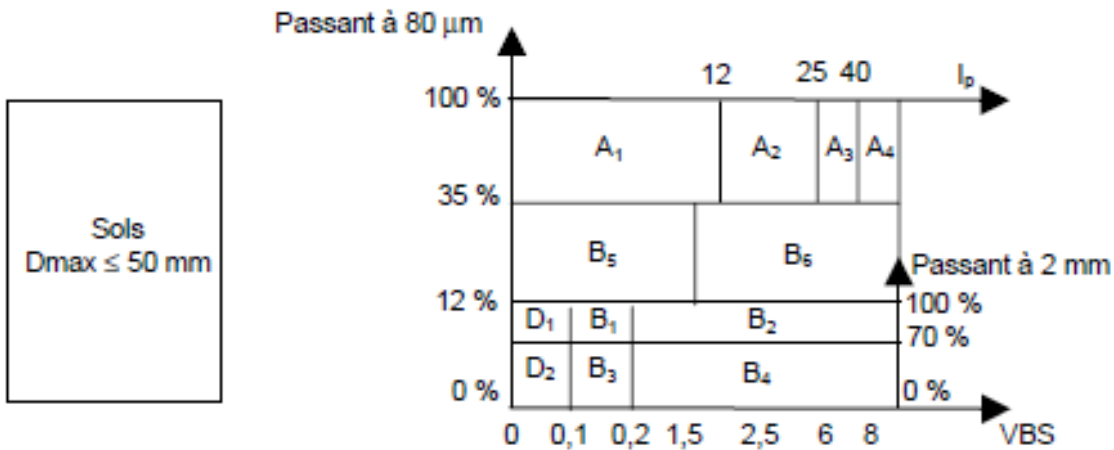
$$K_i = \frac{\varepsilon^3 D^2}{72\tau^2 (1-\varepsilon)^2}$$



Pour l'empilement de billes, en considérant la figure ci-dessus schématisant le chemin réel autour de la sphère par rapport au capillaire droit, **trouver** l'ordre de grandeur de τ et **en déduire** l'expression de K_i .

Pour le pisé, en supposant, $\varepsilon = 0,4$, $K_i = 10^{-13} m^2$, **trouver** le diamètre des billes équivalent dont l'empilement donnerait la même perméabilité intrinsèque.

ANNEXE : Classification française du GTR (d'après NF P 11-300)



Matériaux rocheux	Roches carbonatées	Craies	R ₁
		Calcaires	R ₂
	Roches argileuses	Marnes, argilites, pélites...	R ₃
	Roches siliceuses	Grès, poudingues, brèches...	R ₄
	Roches salines	Sel gemme, gypse	R ₅
Roches magmatiques et métamorphiques	Granites, basaltes, andésites, gneiss, schistes métamorphiques et ardoisiers...		R ₆
Matériaux particuliers	Sols organiques et sous-produits industriels		F

Désignations :

D_{max} : dimension maximale des plus gros éléments contenus dans un sol. Dans le cas où la courbe granulométrique a été réalisée, D_{max} est considéré équivalent au D₉₅ du sol.

A : sols fins

A1 : Limons peu plastiques, loess, silts alluvionaires, sables fins peu pollués, arènes peu plastiques...

A2 : Sables fins argileux, limons, argiles et marnes peu plastiques, arènes...

A3 : Argiles et argiles marneuses, limons très plastiques...

A4 : Argiles et argiles marneuses très plastiques.

B : Sols sableux et graveleux avec fines

B1 : Sables silteux...

B2 : Sables argileux (peu argileux)...

B3 : Graves silteuses...

B4 : Graves argileuses (peu argileuses)...

B5 : Sables et graves très silteux...

B6 : Sables et graves argileux à très argileux

C : Sols comportant des fines et des gros éléments

D : Sols insensibles à l'eau

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Prénom(s) :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Numéro
Inscription :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Né(e) le :

		/			/														
--	--	---	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : Section/Sécialité/Série :

Epreuve : Matière : Session :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

DR1

**Tous les documents réponses sont à rendre,
même non complétés.**

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

