

Épreuve d'admissibilité de modélisation d'un système, d'un procédé ou d'une organisation

A. Présentation de l'épreuve

Arrêté du 28 décembre 2009 modifié

- Durée totale de l'épreuve : 6 heures
- Coefficient 1

L'épreuve est spécifique à l'option choisie.

À partir d'un dossier technique comportant les éléments nécessaires à l'étude, l'épreuve a pour objectif de vérifier que le candidat est capable de synthétiser ses connaissances pour modéliser un système technique dans le domaine de la spécialité du concours dans l'option choisie en vue de prédire ou de vérifier son comportement et ses performances.

B. Sujet

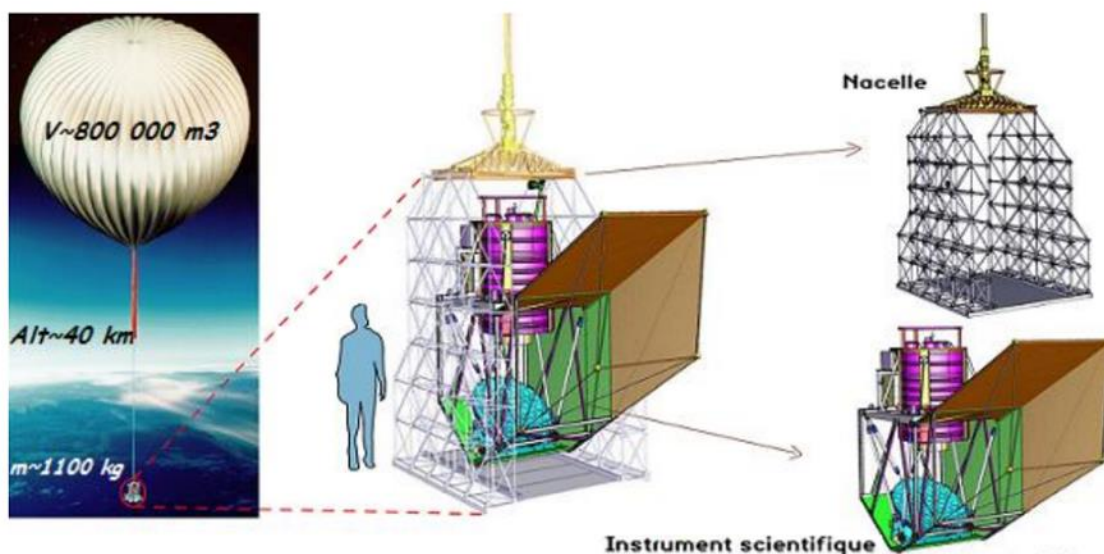
Le sujet est disponible en téléchargement sur le site du ministère à l'adresse :

https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externes/07/6/s2022_agreg_externes_sii_electrique_2_1425076.pdf

Le support d'étude de cette épreuve concerne une expérience embarquée sous un ballon stratosphérique (mission scientifique Pilot).

Le sujet comporte quatre parties indépendantes :

- A - Étude de l'équilibre hydrostatique de l'expérience
- B - Asservissement et performance du pointage en azimut du télescope
- C - Instrumentation photométrique et bolomètres
- D - Mesures du fond diffus cosmologique



C. Éléments de correction

A - Étude de l'équilibre hydrostatique de l'expérience

QA-1 La poussée d'Archimède est la force particulière que subit un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide (liquide ou gaz) soumis à un champ de gravité. Cette force provient de l'augmentation de la pression du fluide avec la profondeur. La pression étant plus forte sur la partie inférieure d'un objet immergé que sur sa partie supérieure, il en résulte une poussée globalement verticale orientée vers le haut.

QA-2 $v_b = \frac{4}{3}\pi R_b^3 = \frac{4}{3}\pi 58^3 = 817\,280\text{ m}^3$ avec $\rho_{he}(z_0) = 0,1786\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 0,1786\text{ g} \cdot \text{l}^{-1}$
 $\Rightarrow m_{he}(z_0) = 0,1786 \times 817\,280 = 145\,970\text{ kg}$ d'hélium

QA-3 Forces en présence : $\vec{F}_a(z_h) = F_a(z_h)\vec{e}_z$ et $\vec{P}_t(z_h) = -\sum \text{masse } g\vec{e}_z = -(m_b + m_n + m_{he}(z_h))g\vec{e}_z$

A l'équilibre statique : $\vec{F}_a(z_h) + \vec{P}_t(z_h) = \vec{0} \Rightarrow F_a(z_h) = -\vec{P}_t(z_h) = (m_b + m_n + m_{he}(z_h))g$

QA-4 $F_a(z) = \rho_{air}(z)v_b g$

QA-5 $\rho_{air}(z) = \frac{\text{masse de matière}}{\text{volume de matière}} = \frac{\text{masse de matière}}{v_b} = \frac{\text{masse de matière } P(z)}{n RT_a} = \frac{M_{air}P(z)}{RT_a}$

Avec le résultat de la question QA-4 : $F_a(z) = \rho_{air}(z)v_b g = \frac{M_{air}P(z)}{RT_a}v_b g$

QA-6 $F_a(z_h) = (m_b + m_n + m_{he}(z_h))g \Rightarrow \frac{M_{air}P(z_h)}{RT_a}v_b g = (m_b + m_n + \frac{M_{he}P(z_h)}{RT_a}v_b)g$

$\frac{P(z_h)}{RT_a}v_b(M_{air} - M_{he}) = m_b + m_n \Rightarrow P(z_h) = \frac{m_b + m_n RT_a}{M_{air} - M_{he} v_b}$

AN : $P(z_h) = \frac{2000 + 1100}{29 \cdot 10^{-3} - 4,0 \cdot 10^{-3}} \frac{8,31 \times 273}{817\,280} = 344,20\text{ Pa}$

QA-7 $z_e = \frac{RT_a}{M_{air}g} = 1000 \times \frac{8,31 \times 273}{29 \times 9,81} = 7974\text{ m}$

Soit : $P(z_h) = P(z_0)e^{-\frac{M_{air}g}{RT_a}z_h} \Rightarrow z_h = \frac{RT_a}{M_{air}g} \ln \frac{P(z_0)}{P(z_h)}$

AN : $z_h = 1000 \times \frac{8,31 \times 273}{29 \times 9,81} \ln \frac{103000}{344,20} \approx 45\text{ km}$

QA-8 Remarquons que :

1- La température n'est pas isotherme suivant le relevé Q2,

2- Le modèle proposé est-il identifiable à une EDO du premier ordre ?

La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses pour $z \approx z_e$. Pour l'abscisse $z = z_e$, on vérifie facilement que la pression $P(z_e) = 0,63 \times P(z_0)$. En conséquence, le modèle d'évolution de la pression en fonction de l'altitude est plutôt bien vérifié (Q4) malgré 1- qui ne l'est absolument pas (Q2).

3- D'une façon générale, le modèle sera considéré comme « acceptable » pour des altitudes $< z_e$ malgré 1- qui n'est pas vérifiée.

B - Asservissement et performance du pointage en azimut du télescope

$U_m(p) = RI_m(p) + K_e \Omega_m(p)$

QB-1

$C_m(p) = K_c I_m(p)$

QB-2

$C_m(p) = \frac{K_c}{R} U_m(p) - \frac{K_c K_e}{R} \Omega_m(p)$

QB-3

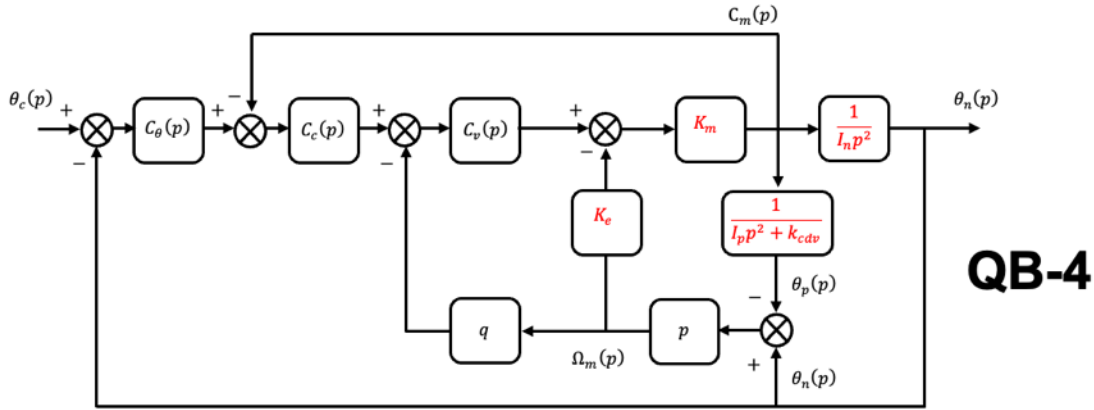
$$\begin{cases} I_n p^2 \theta_n(p) = C_m(p) \\ I_p p^2 \theta_p(p) = -C_m(p) - k_{cdv} \theta_p(p) \end{cases}$$

QB-4 cf. DR1

De **QB-2** : $C_m(p) = K_m(U_m(p) - K_e\Omega_m(p))$ et $C_m(p) = N(p)(U_m(p) - M(p)\Omega_m(p))$

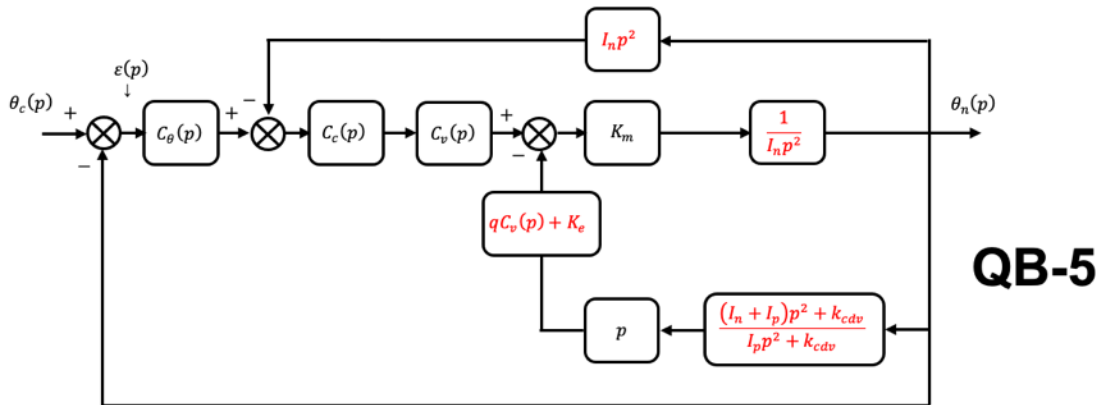
$$\text{De QB-3 : } \begin{cases} I_n p^2 \theta_n(p) = C_m(p) \\ I_p p^2 \theta_p(p) = -C_m(p) - k_{cdv} \theta_p(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\theta_n(p)}{C_m(p)} = \frac{1}{I_n p^2} \\ \frac{\theta_p(p)}{C_m(p)} = -\frac{1}{I_p p^2 + k_{cdv}} \end{cases}$$

Soit : $F(p) = -\frac{1}{I_p p^2 + k_{cdv}}$, $I(p) = \frac{1}{I_n p^2}$, $M(p) = K_e$, $N(p) = K_m$



QB-5 cf. DR1

$G(p) = \frac{(I_n + I_p)p^2 + k_{cdv}}{I_p p^2 + k_{cdv}}$, $H(p) = qC_v(p) + K_e$ et $Q(p) = I_n p^2$



QB-6 $FTBO_{\theta}(p) = \frac{K_m C_c(p) C_v(p) C_{\theta}(p)}{I_n p^2 (1 + K_m C_c(p) C_v(p)) + p G(p) K_m (q C_v(p) + K_e)}$

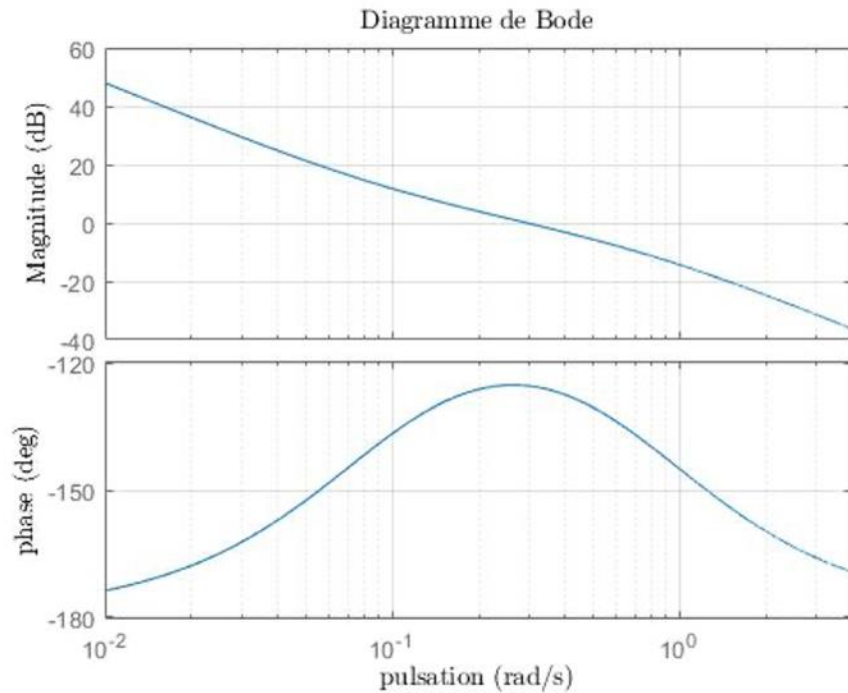
QB-7 $FTBO_{\theta}(p) = \frac{C_{\theta}(p)}{I_n p^2}$

QB-8 $FTBO_{\theta}(p) = \frac{K_{\theta}}{I_n p^2} \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p} = \frac{\omega_2^2}{p^2} \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{1 + \frac{p}{\omega_3}}$ et $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ avec $\omega_2 = \sqrt{\frac{K_{\theta}}{I_n}}$ et $a > 1$

$$\omega_1 = \frac{1}{a\tau}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\tau}$$

QB-10 cf. DR2



Marge de phase en degré : ~ 55°
Marge de gain : ∞

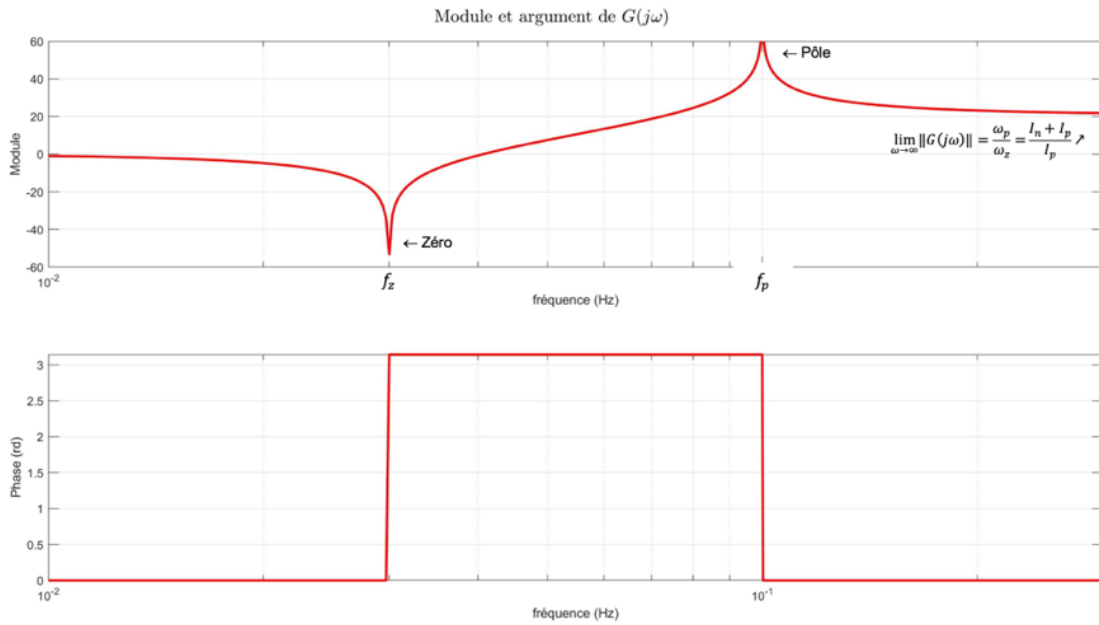
17

QB-11 $G(p) = \frac{(I_n + I_p)p^2 + k_{cdv}}{I_p p^2 + k_{cdv}} = \frac{1 + \frac{I_n + I_p}{k_{cdv}} p^2}{1 + \frac{I_p}{k_{cdv}} p^2} = G(0) \frac{1 + \frac{p^2}{\omega_z^2}}{1 + \frac{p^2}{\omega_p^2}}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{k_{cdv}}{I_p}}$, $\omega_z = \sqrt{\frac{k_{cdv}}{I_n + I_p}}$ et $G(0) = 1$ avec $\omega_p > \omega_z$

QB-12 $G(j\omega) = \frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_z})^2}{1 - (\frac{\omega}{\omega_p})^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{module : } \left| \frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_z})^2}{1 - (\frac{\omega}{\omega_p})^2} \right| \\ \text{Argument : } \begin{cases} \omega < \omega_z : \text{Arg}(G(j\omega)) = 0 \\ \omega_z \geq \omega \geq \omega_p : \text{Arg}(G(j\omega)) = +\pi \\ \omega > \omega_p : \text{Arg}(G(j\omega)) = 0 \end{cases} \end{cases}$

QB-13 cf. DR3.

Le pôle de la chaîne de vol introduit un « trou » de commandabilité.



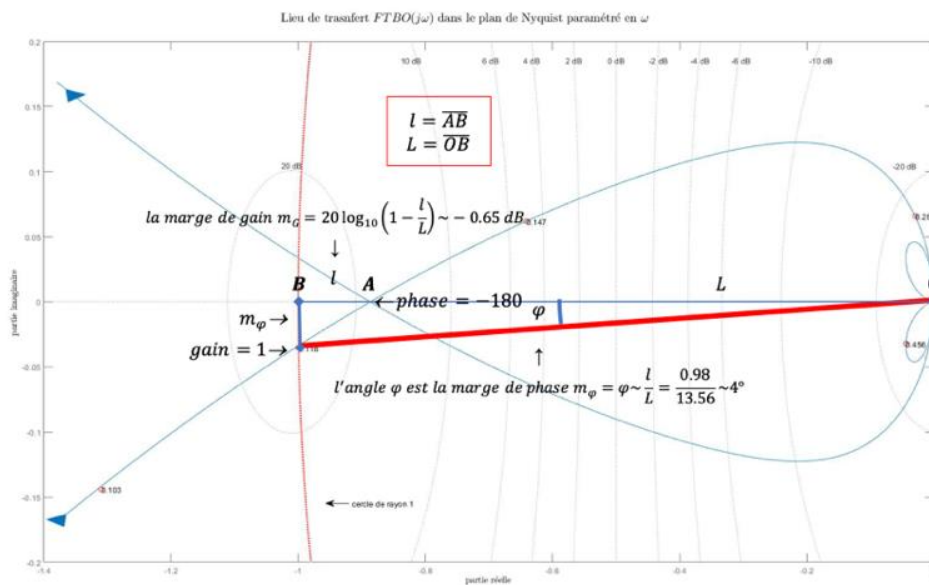
QB-14 Il doit laisser le point critique à sa gauche.

QB-15 cf. DR4 pour les données numériques et les références.

La marge de gain est la longueur \overline{AB} normalisée à 1 par la longueur \overline{OB} soit $\frac{L-l}{L} = 1 - \frac{l}{L} \Rightarrow 20 \log_{10} \left(1 - \frac{l}{L}\right) \sim -0.65 \text{ dB}$.

La marge de phase est l'angle noté φ qui est faible, en conséquence on peut confondre l'arc à l'angle $\Rightarrow \varphi \sim \frac{l}{L} = \frac{0.98}{13.56} \sim 4^\circ$

Les marges sont très insuffisantes.



Marge de phase en degrés : 4
Marge de gain en dB : -0.65

QB-16 Question de synthèse.

Contrairement au cas précédemment étudié, montrer que la mise en place d'un correcteur ne permet pas d'augmenter la bande passante, quelle est sa limite et donner sa borne supérieure.

C – Instrumentation photométrique et bolomètres

QC-1 $dW = C_{th}(T)dT = dW_{abs} + dW_j - dW_f$

En divisant par dt afin de faire apparaître la puissance :

$$P = \frac{dW}{dt} = C_{th}(T) \frac{dT}{dt} = \frac{dW_{abs}}{dt} + \frac{dW_j}{dt} - \frac{dW_f}{dt}$$

$$C_{th}(T) \frac{dT}{dt} = P_{abs} + P_j(i, T) - P_f(T)$$

QC-2 A partir du schéma de la figure 8 a), calculer l'expression des éléments r_{th} et v_{th} du modèle équivalent représenté en b).

QC-3 $L \frac{di}{dt} = v_{th} - (r_{th} + R(i, T))i$

QC-4 $P_j(i_n, T_n) = P_f(T_n) \Leftrightarrow R(i_n, T_n)i_n^2 = K(T_n^N - T_0^N) \Rightarrow i_n = \sqrt{\frac{K(T_n^N - T_0^N)}{R(i_n, T_n)}}$

QC-5 $v_{th} - (r_{th} + R(i_n, T_n))i_n = 0$

QC-6 $R(i, T) = R(i_n + \tilde{i}, T_n + \tilde{T}) = R(i_n, T_n) + \tilde{i} \frac{\partial R(i, T)}{\partial i} \Big|_{i=i_n, T=T_n} + \tilde{T} \frac{\partial R(i, T)}{\partial T} \Big|_{i=i_n, T=T_n}$
 $\Leftrightarrow \alpha = \frac{T_n}{R(i_n, T_n)} \frac{\partial R(i, T)}{\partial T} \Big|_{i=i_n, T=T_n}$ et $\beta = \frac{i_n}{R(i_n, T_n)} \frac{\partial R(i, T)}{\partial i} \Big|_{i=i_n, T=T_n}$

QC-7 Afin d'avoir une résistance dynamique maximum, il faut polariser le thermomètre au point d'inflexion de la fonction $R(i_n, T_n) = f(T_n)$, soit $T_n = 0.52 K \Rightarrow R(i_n, T_n) = 0.125 \Omega$ et $\frac{\partial R(i, T)}{\partial T} \Big|_{i=i_n, T=T_n} = 7.5547 \times 10^{-4} m\Omega \cdot K^{-1}$.

Donc : $\alpha = \frac{T_n}{R(i_n, T_n)} \frac{\partial R(i, T)}{\partial T} \Big|_{i=i_n, T=T_n} = \frac{0.52}{0.125} 7.55 \times 10^{-4} = 3.14 \times 10^{-6}$ Faux plutôt 41

La polarisation permet d'une part, de placer le point de fonctionnement du thermomètre dans une zone linéaire de sa caractéristique, d'autre part, de disposer d'un gain dynamique élevé.

QC-8 $L \frac{d\tilde{i}}{dt} = v_{th} - (r_{th} + R(i_n, T_n) + \beta \frac{R(i_n, T_n)}{i_n} \tilde{i} + \alpha \frac{R(i_n, T_n)}{T_n} \tilde{T}) (i_n + \tilde{i})$
 $L \frac{d\tilde{i}}{dt} = \underbrace{v_{th} - (r_{th} + R(i_n, T_n))i_n}_{=0} - \beta R(i_n, T_n) \tilde{i} - i_n \alpha \frac{R(i_n, T_n)}{T_n} \tilde{T} - (r_{th} + R(i_n, T_n)) \tilde{i}$
 $\Rightarrow L \frac{d\tilde{i}}{dt} = -(\beta R(i_n, T_n) + R(i_n, T_n) + r_{th}) \tilde{i} - i_n \alpha \frac{R(i_n, T_n)}{T_n} \tilde{T}$

QC-9 $C_{th}(T) \frac{dT}{dt} = P_{abs} + P_j(i, T) - P_f(T) \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{P_{abs} + P_j(i, T) - P_f(T)}{C_{th}(T)}$ avec $P_f(T) = K(T^N - T_0^N)$ et $P_j(i, T) = R(i, T)i^2$

QC-10 Pour de petites variations autour du point de fonctionnement (i_n, T_n) , nous avons le modèle dynamique suivant à l'ordre un en posant $(i, T) = (i_n + \tilde{i}, T_n + \tilde{T})$:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P_{abs} + P_j(i, T) - P_f(T)}{C_{th}(T)} = \frac{P_{abs} + R(i, T)i^2 - K(T^N - T_0^N)}{C_{th}(T)}$$

Développons l'expression à droite de l'égalité en série de Taylor en se limitant à l'ordre un :

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{P_{abs} + R(i_n + \tilde{i}, T_n + \tilde{T})(i_n + \tilde{i})^2 - K((T_n + \tilde{T})^N - T_0^N)}{C_{th}(T_n + \tilde{T})}$$

$$\text{QC-11 } \frac{d\tilde{T}}{dt} = \underbrace{-\frac{K(T_n^N - T_0^N)}{C_{th}(T_n)} + \frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} i_n^2}_{=0} + \left(\frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} + \tilde{i} \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} + \tilde{T} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} \right) (i_n + \tilde{i})^2 - \left(\frac{K(T_n^N - T_0^N)}{C_{th}(T_n)} + \tilde{T} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{K(T^N - T_0^N)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} \right)$$

Notons que le premier terme de cette équation correspond au point de fonctionnement avec $P_{abs} = 0$.

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = \underbrace{\frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} i_n^2 - \frac{K(T_n^N - T_0^N)}{C_{th}(T_n)}}_{=0} + \tilde{i} i_n^2 \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} + \tilde{T} i_n^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} + 2i_n \tilde{i} \frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} - \tilde{T} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{K(T^N - T_0^N)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n}$$

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = \tilde{i} \left(i_n^2 \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} + 2i_n \frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} \right) + \tilde{T} \left(i_n^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{K(T^N - T_0^N)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} \right)$$

Notons que la capacité thermique $C_{th}(T)$ est indépendante du courant i , ce qui permet de démontrer le résultat proposé.

$$\text{QC-12 } \begin{cases} \frac{d\tilde{i}}{dt} = -(\beta R(i_n, T_n) + R(i_n, T_n) + r_{th})\tilde{i} - i_n \alpha \frac{R(i_n, T_n)}{T_n} \tilde{T} \\ L \frac{d\tilde{T}}{dt} = \tilde{i} \left(i_n^2 \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} + 2i_n \frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} \right) + \tilde{T} \left(i_n^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{K(T^N - T_0^N)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} \right) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(\beta R(i_n, T_n) + R(i_n, T_n) + r_{th}) & -i_n \frac{\alpha R(i_n, T_n)}{L T_n} \Big|_{i=i_n, T=T_n} \\ i_n \frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} \beta + 2i_n \frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} & -i_n^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{K(T^N - T_0^N)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{T} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\tau_{el}} = \frac{1}{L} (R(i_n, T_n)(1 + \beta) + r_{th})$$

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = i_n^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R(i, T)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n} - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{K(T^N - T_0^N)}{C_{th}(T)} \right) \Big|_{i=i_n, T=T_n}$$

$$A = \frac{i_n R(i_n, T_n)}{L T_n} \Big|_{i=i_n, T=T_n} \alpha$$

$$B = i_n \frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T)} \beta + 2i_n \frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} = i_n \frac{R(i_n, T_n)}{C_{th}(T_n)} (2 + \beta)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \tau_{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tau_{eff} \end{bmatrix} = s^{-1}, [A] = A \cdot K^{-1} \cdot s^{-1}, [B] = A^{-1} \cdot K \cdot s^{-1}$$

QC-13 Les pôles sont les valeurs propres de la matrice M , soit :

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_{el}} & -A \\ B & \frac{1}{\tau_{eff}} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_{el}} - \lambda & -A \\ B & \frac{1}{\tau_{eff}} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Avec } AB = \frac{1}{\tau_{elth}} \Rightarrow -\left(\frac{1}{\tau_{el}} + \lambda\right) \left(\frac{1}{\tau_{eff}} - \lambda\right) + \frac{1}{\tau_{elth}} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda \left(\frac{1}{\tau_{el}} - \frac{1}{\tau_{eff}}\right) + \frac{1}{\tau_{elth}} - \frac{1}{\tau_{el}\tau_{eff}} = 0$$

Soit le couple de solutions :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_{eff}} - \frac{1}{\tau_{el}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_{el}} + \frac{1}{\tau_{eff}} \right)^2 - \frac{4}{\tau_{el}^2}} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_{eff}} - \frac{1}{\tau_{el}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_{el}} + \frac{1}{\tau_{eff}} \right)^2 - \frac{4}{\tau_{el}^2}} \end{cases}$$

QC-14 $\omega_{el} = \frac{1}{\tau_{el}} > \omega_{eff} = \frac{1}{\tau_{eff}} \Leftrightarrow f_{el} = \frac{1}{2\pi\tau_{el}} > f_{eff} = \frac{1}{2\pi\tau_{eff}}$

La bande passante du modèle thermique doit être inférieure à la bande passante du modèle l'électrique. Ce qui, a priori, semble aisément réalisable.

QC-15 $u_k = u_{k-1} + pas \left(Mu_{k-1} + \underline{b}P_{abs}(k-1) \right)$

QC-16 Afin d'assurer la stabilité du schéma numérique proposé à la question **QC-15**, les valeurs propres de la matrice $(\mathbb{I}_n + pasM)$ doivent être de module ≤ 1 .

QC-17 cf. DR5

```

16N=10000 # nombre d'échantillons : Le pas est donc pas=(tf-t0)/(N-1)
17t0=0;tf=0.001; # t0 est le début, tf la fin de la simulation
18pas=(tf-t0)/(N-1) # pas de discrétisation
19
20# matrice M, constantes du modèle
21A,B=150,4.1E6
22Tel,Teff=24E-6,87E-6
23Cth=2.2E-12; # Capacité thermique en pJ/K
24a=1/Cth;
25
26M=matrix([[[-1/Tel,-A],[B,1/Teff]])
27b=matrix([[0],[a]])
28
29t= linspace(t0, tf, N) # Les instants pour lesquels on recherche la solution
30
31# Modélisation du flux incident : échelon d'amplitude P0
32P0=1E-6
33Pabs=P0*matrix(ones([1,N]))
34
35# résolution par un schéma d'Euler explicite
36X = matrix(zeros([2,N]));
37
38for i in range(1,N) :
39
40    X[:,i] = X[:,i-1] + pas*(M*X[:,i-1]+b*Pabs[0,i-1])
41
42# affichage des résultats
43subplot(211)
44
45plot (t, X[0,:].T, 'r')
46
47ylabel("courant (nA)")
48subplot(212)
49
50plot (t, X[1,:].T, 'r')
51
52xlabel("temps (s)");ylabel("température (°mK)")
53title("Evolution du courant et de la température dans le bolomètre")

```


D - Mesure du fond diffus cosmologique

QD-1 Calculons d'abord $I_x = \langle |E_x(t)|^2 \rangle$ et $I_y = \langle |E_y(t)|^2 \rangle$

$$I_x = \langle |E_x(t)|^2 \rangle = A_x^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{A_x^2}{2} \quad \text{et} \quad I_y = \langle |E_y(t)|^2 \rangle = A_y^2 \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{A_y^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad I = I_x + I_y = \frac{A_x^2}{2} + \frac{A_y^2}{2} \quad \text{et} \quad Q = I_x - I_y = \frac{A_x^2}{2} - \frac{A_y^2}{2} \quad \text{soit : } \begin{cases} A_x^2 = I + Q \\ A_y^2 = I - Q \end{cases}$$

QD-2 Exprimons $E_x(t)$ dans la base $(0, x', y')$ soit $E_{x'}(t)$:

$$E_{x'}(t) = E_x(t) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + E_y(t) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x(t) + E_y(t))$$

De la même façon : $E_{y'}(t) = E_x(t) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - E_y(t) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x(t) - E_y(t))$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \langle (E_x(t) + E_y(t))^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle (E_y(t) - E_x(t))^2 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} (\langle E_x^2(t) \rangle + \langle E_y^2(t) \rangle + 2 \langle E_x(t) E_y(t) \rangle - \langle E_x^2(t) \rangle + \langle E_y^2(t) \rangle - 2 \langle E_x(t) E_y(t) \rangle)$$

$$= 2 \langle E_x(t) E_y(t) \rangle$$

Or $2 \langle E_x(t) E_y(t) \rangle = 2 A_x A_y \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi) \rangle = A_x A_y \cos(\phi)$

$$U = A_x A_y \cos(\phi)$$

QD-3 il faut exactement 3 mesures indépendantes.

QD-4 $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos 2\alpha_n & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix}$ La dimension de cette matrice est $(n, 3)$

QD-5 $S_{opt} = (\mathcal{A}^t \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^t M$

QD-6 $v = \mathcal{A}^t \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \cos 2\alpha_1 & \dots & \cos 2\alpha_n \\ \sin 2\alpha_1 & \dots & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos 2\alpha_n & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i & \sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_i \\ \sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i & \sum_{i=1}^n \cos^2 2\alpha_i & \sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i \sin 2\alpha_i \\ \sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_i & \sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i \sin 2\alpha_i & \sum_{i=1}^n \sin^2 2\alpha_i \end{bmatrix}$$

QD-7 $v_{opt} = \mathcal{A}^t \mathcal{A} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$

QD-8 $S_{opt} = (\mathcal{A}^t \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^t M = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \cos 2\alpha_1 & \dots & \cos 2\alpha_n \\ \sin 2\alpha_1 & \dots & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \\ \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^n m_i \cos 2\alpha_i \\ \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n m_i \sin 2\alpha_i \end{bmatrix}$

QD-9 Calculer la transformée de Fourier de l'équation [Eq. 7].

QD-10 Sans préjuger des conditions d'inversion, exprimer la solution recherchée $\Phi(\omega)$.

QD-11 Le comportement de la solution pour des pulsations très supérieures à la pulsation de coupure. Il faut limiter le support aux pulsations basses.

QD-12 $\hat{\Phi}(\omega) = G(\omega)(H(\omega)\Phi(\omega) + B(\omega))$

Soit : $\sigma_\epsilon^2 = \mathbb{E}(G(\omega)H(\omega) - 1)\Phi(\omega) + G(\omega)B(\omega)^*$

Donc : $P(\omega) = G(\omega)H(\omega) - 1$ et $Q(\omega) = G(\omega)$

QD-13 $\sigma_\varepsilon^2 = \mathbb{E}[P(\omega)P(\omega)^* \Phi(\omega)\Phi(\omega)^* + P(\omega)\Phi(\omega)Q(\omega)^*B(\omega)^* + Q(\omega)B(\omega)P(\omega)^*\Phi(\omega)^* + Q(\omega)Q(\omega)^*B(\omega)B(\omega)^*]$

$$\sigma_\varepsilon^2 = P(\omega)P(\omega)^* \mathbb{E}[\Phi(\omega)\Phi(\omega)^*] + Q(\omega)Q(\omega)^* \mathbb{E}[B(\omega)B(\omega)^*]$$

Finalemment : $\sigma_\varepsilon^2 = (G(\omega)H(\omega) - 1)(G(\omega)H(\omega) - 1)^* s_\phi(\omega) + G(\omega)G(\omega)^* s_b(\omega)$

QD-14 $\frac{\partial \sigma_\varepsilon^2}{\partial G(\omega)} = \frac{\partial}{\partial G(\omega)} \{ (G(\omega)H(\omega) - 1)(G(\omega)H(\omega) - 1)^* s_\phi(\omega) + G(\omega)G(\omega)^* s_b(\omega) \} = 0$

$$\Leftrightarrow H(\omega)(G(\omega)_{opt}H(\omega) - 1)^* s_\phi(\omega) + G(\omega)_{opt} s_b(\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow H(\omega)(G(\omega)_{opt}^* H(\omega)^* - 1) s_\phi(\omega) + G(\omega)_{opt} s_b(\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow G(\omega)_{opt}^* (s_b(\omega) + H(\omega)H(\omega)^* s_\phi(\omega)) = H(\omega) s_\phi(\omega)$$

$$G(\omega)_{opt}^* (s_b(\omega) + H(\omega)H(\omega)^* s_\phi(\omega)) = H(\omega) s_\phi(\omega) \Rightarrow G(\omega)_{opt}^* = \frac{H(\omega) s_\phi(\omega)}{s_b(\omega) + H(\omega)H(\omega)^* s_\phi(\omega)}$$

Soit :

$$G(\omega)_{opt} = \frac{H(\omega)^* s_\phi(\omega)}{s_b(\omega) + H(\omega)H(\omega)^* s_\phi(\omega)} = \frac{H(\omega)^* s_\phi(\omega)}{s_b(\omega) + \|H(\omega)\|^2 s_\phi(\omega)}$$