

# Formulaire d'aide à la résolution des problèmes de calcul topométrique



## Session 2018

### Sommaire

1	Triangle quelconque	p. 3
2	Triangles semblables	p. 3
3	Triangle rectangle	p. 4
4	Trapèze	p. 4
5	Polygone de n côtés	p. 4
6	Raccordements circulaires	p. 5
7	Secteur circulaire	p. 5
8	Transformations de coordonnées	p. 6
9	Intersection de deux droites	p. 6
10	Intersection de deux cercles	p. 7
11	Intersection droite - cercle	p. 7
12	Nivellement indirect	p. 8
13	Corrections des distances	p. 8-9
14	Correction de niveau apparent	p. 9
15	Moyenne arithmétique, moyenne pondérée	p. 9
16	Le G0 (ou V0)	p. 10
17	Relèvement sur 3 points - <i>méthode du barycentre</i> -	p. 11
18	Relèvement sur 3 points - <i>méthode de Delambre</i> -	p. 11
19	Changement de base	p. 12
20	Tolérances : Classes de précision	p. 13-14

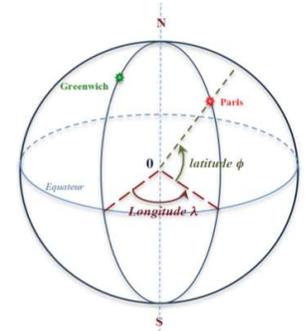
## Conventions relatives aux travaux topographiques

### Unités en vigueur :

- distance en mètre (m)
- angle en grades (gon)

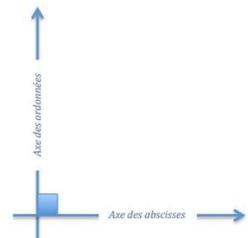
### Systèmes de coordonnées géographiques

- longitude :  $\lambda$
- latitude :  $\Phi$
- hauteur sur l'ellipsoïde :  $h$

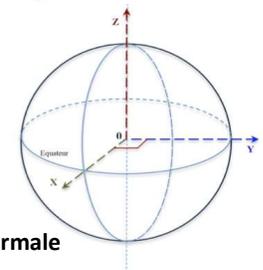


### Systèmes de coordonnées planimétriques

- Coordonnées locales :  $x, y$
- Coordonnées Lambert 93 :  $e, n$
- Coordonnées RGF 93 CC (9 zones) :  $E, N$



### Systèmes de coordonnées géocentriques $X, Y, Z$



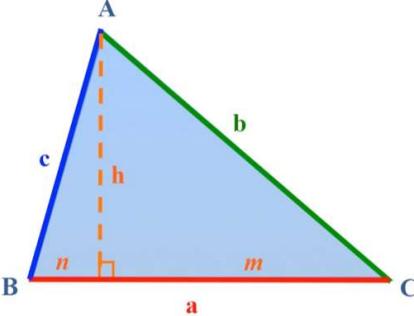
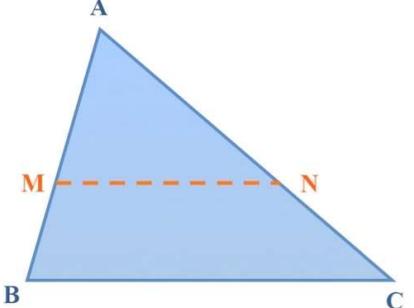
### Systèmes de coordonnées altimétriques : altitude normale

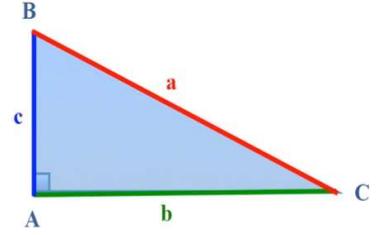
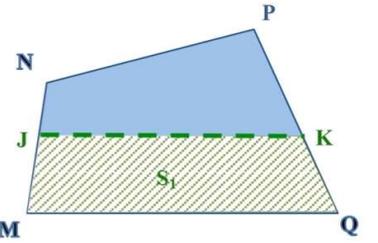
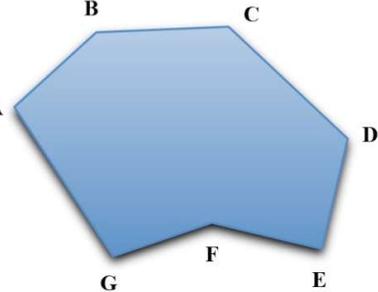
- NGF-IGN 69 (NGF-IGN78 pour la Corse) :  $H$

Rayon moyen de la terre :  $R_m = 6370 \text{ km}$

### Terminologie usitée :

- $ht$  = hauteur des tourillons ou  $hi$  (d'instrument)
- $hp$  = hauteur de prisme ou  $hv$  (voyant) ou  $hr$  (réflecteur)

croquis - schémas	formules
<p><b>1-Triangle quelconque</b></p> 	<p><b>Relation des sinus</b>  <math display="block">\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}</math></p> <p><b>Relation des cosinus</b>  <math display="block">a^2 = b^2 + c^2 - 2 b \cdot c \cdot \cos A</math> <math display="block">b^2 = a^2 + c^2 - 2 a \cdot c \cdot \cos B</math> <math display="block">c^2 = a^2 + b^2 - 2 a \cdot b \cdot \cos C</math></p> <p><b>Superficie</b>  <math display="block">S = (a \cdot b \cdot \sin C) / 2</math> <math display="block">S = (a \cdot c \cdot \sin B) / 2</math> <math display="block">S = (b \cdot c \cdot \sin A) / 2</math></p> $S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \cdot \sin A}$ <p>avec <math>p = \frac{1}{2}</math> périmètre  <math display="block">S = \sqrt{[p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)]}</math></p> $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b) \cdot (p - c)}{p \cdot (p - a)}}$ $n = (c^2 + a^2 - b^2) / 2a$ $h^2 = c^2 - n^2 = b^2 - m^2$
<p><b>2-Triangles semblables</b></p> 	<p><b>Théorème de Thalès</b></p> $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$ $S_{AMN} = S_{ABC} \cdot k^2$

croquis - schémas	formules
<p><b>3-Triangle rectangle</b></p> 	<p><math>\sin B = \text{côté opposé} / \text{hypoténuse} = b/a</math>  <math>\cos B = \text{côté adjacent} / \text{hypoténuse} = c/a</math>  <math>\tan B = \text{côté opposé} / \text{côté adjacent} = b/c</math></p> $BA^2 + AC^2 = BC^2$ <p><b>Superficie</b>  <math display="block">S = \frac{1}{2} \cdot (b \cdot c)</math></p>
<p><b>4-Trapèze</b></p> 	<p><math>S_1 = \text{superficie MJKQ}</math></p> $JK^2 = MQ^2 - 2S_1 \cdot \left( \frac{1}{\tan Q} + \frac{1}{\tan M} \right)$ $QK = \frac{2S_1}{(MQ + JK) \cdot \sin Q}$ $JM = \frac{2S_1}{(MQ + JK) \cdot \sin M}$
<p><b>5-Polygone de n cotés</b></p> 	<p><b>Somme des angles intérieurs</b>  <math display="block">\Sigma = (n - 2) \cdot 200</math></p> <p><b>Somme des angles extérieurs</b>  <math display="block">\Sigma = (n + 2) \cdot 200</math></p> <p><b>Superficie</b></p> $2S = \sum_{i=n}^{i=1} [x_i \cdot (y_{(i+1)} - y_{(i-1)})]$ $2S = \sum_{i=n}^{i=1} [y_i \cdot (x_{(i+1)} - x_{(i-1)})]$

croquis - schémas	formules
<p><b>6-Raccordements circulaires</b></p>	<p>Périmètre du cercle = <math>2 \cdot \pi \cdot r</math></p> <p>Superficie du disque = <math>\pi \cdot r^2</math></p> <p>Longueur de la corde <math>T_1T_2 = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\beta}{2}</math></p> <p>Longueur de l'arc = <math>T_1T_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \beta}{400}</math></p> <p>Longueur de la flèche <math>MH = r - [r \cdot \cos \frac{\beta}{2}]</math></p> <p>Longueur du segment de la tangente</p> <p><math>ST_1 = ST_2 = r \cdot \tan \frac{\beta}{2}</math></p>
<p><b>7-Secteur circulaire : superficies</b></p>	<p>Triangle: <math>S = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \beta</math></p> <p>Secteur: <math>S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \beta}{400}</math></p> <p>Segment: <math>S_{\text{secteur}} - S_{\text{triangle}}</math></p>

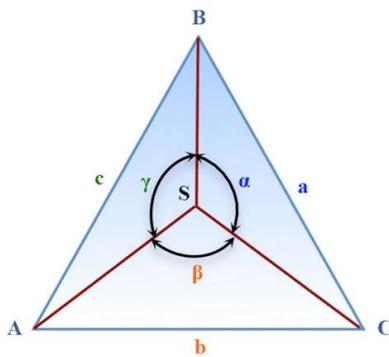
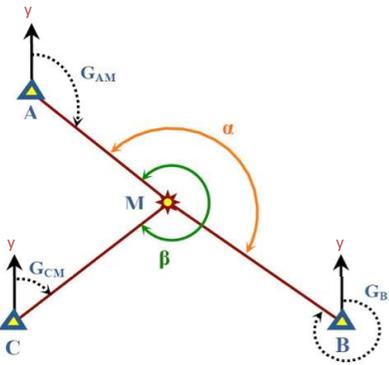
croquis - schémas	formules
<p><b>8-Transformations de coordonnées</b></p>	<p>Distance AB :</p> <p><math>x_B - x_A = \Delta x = D_{AB} \cdot \sin G_{AB}</math></p> <p><math>y_B - y_A = \Delta y = D_{AB} \cdot \cos G_{AB}</math></p> <p><math>D_{AB} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}</math></p> <p>Gisement AB:</p> <p><math>\tan G' = (x_B - x_A) / (y_B - y_A)</math></p> <p><math>\tan G' = \frac{\Delta x}{\Delta y}</math></p> <p>on obtient <math>G'</math> avec son signe</p> <p>si <math>\Delta x \geq 0</math> et <math>\Delta y \geq 0 \rightarrow G_{AB} = G'</math></p> <p>si <math>\Delta x \geq 0</math> et <math>\Delta y \leq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 200</math></p> <p>si <math>\Delta x \leq 0</math> et <math>\Delta y \leq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 200</math></p> <p>si <math>\Delta x \leq 0</math> et <math>\Delta y \geq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 400</math></p>
<p><b>9-Intersection de deux droites</b></p>	<p><b>1ère méthode :</b></p> <p><math>G_{AB}</math> et <math>D_{AB}</math> par <math>(x, y)</math></p> <p><b>résolution du triangle AMB</b></p> <p>angle A = <math>G_{AB} - G_{AM}</math></p> <p>angle B = <math>G_{BM} - G_{BA}</math></p> <p><math>D_{AM}</math> et <math>D_{BM}</math></p> <p>Calcul des <math>(x, y)</math> de M depuis A</p> <p><b>Contrôle :</b> <math>(x, y)</math> de M depuis B</p> <p><b>2ème méthode : (formule de Delambre)</b></p> <p>depuis A</p> <p><math>y_M - y_A = \frac{(x_A - x_B) - (y_A - y_B) \cdot \tan G_{BM}}{\tan G_{BM} - \tan G_{AM}}</math></p> <p>depuis B</p> <p><math>x_M - x_B = (y_M - y_B) \cdot \tan G_{BM}</math></p> <p><b>Contrôle :</b> idem depuis B</p>

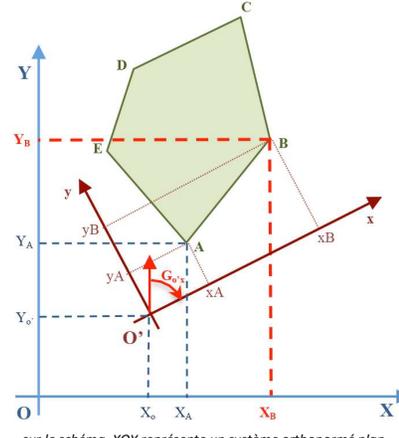
croquis - schémas	formules
<p><b>10-Intersection de deux cercles</b></p>	<p>calcul de <math>G_{O_1-O_2}</math> et <math>D_{O_1-O_2}</math> par <math>(x,y)</math></p> <p><b>résolution du triangle <math>O_1O_2M</math></b></p> <p>calcul de <math>G_{O_1-M}</math> Calcul des <math>(x,y)</math> de M depuis <math>O_1</math></p> <p><b>Contrôle :</b></p> <p>calcul de <math>G_{O_2-M}</math> Calcul des <math>(x,y)</math> de M depuis <math>O_2</math></p>
<p><b>11-Intersection droite – cercle</b></p>	<p><math>G_{AO}</math> et <math>D_{AO}</math> par <math>(x,y)</math></p> <p><b>résolution du triangle <math>AOM_1</math></b></p> <p><math>OM_1 = r = \text{rayon}</math> Calcul de l'angle A, de l'angle <math>M_1</math>, de l'angle O Distance <math>AM_1</math> Gisement <math>AM_1</math> Calcul des <math>(x,y)</math> de <math>M_1</math> depuis A</p> <p><b>Contrôle :</b> Calcul des <math>(x,y)</math> de <math>M_1</math> depuis O</p> <p>idem pour le triangle <b><math>AOM_2</math></b></p>

croquis - schémas	formules
<p><b>12-Nivellement indirect</b></p>	<p><math>Dh = \sqrt{(Di^2 - \Delta hi^2)}</math></p> <p>Dénivelée instrumentale <math>\Delta hi</math></p> <p><math>\Delta hi = Di \cdot \cos V</math></p> <p><math>\Delta hi = Dh / \tan V</math></p> <p><math>Dh = Di \cdot \sin V</math></p> <p><math>H_p = H_s + ht + \Delta hi - hp</math></p>
<p><b>13- Corrections des distances</b></p>	<p>Pour obtenir une distance, il conviendra d'apporter aux mesures de longueurs les corrections suivantes :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1- constante de prisme (donnée constructeur)</li> <li>2- correction atmosphérique - <math>C_a</math> - obtenue par lecture sur un abaque (saisie sur le terrain au moment des mesures)</li> <li>3- réduction à l'horizontale <math>Dh = Di \cdot \sin V</math></li> <li>4- correction de réduction à l'ellipsoïde - <math>C_o</math> - ou <math>C_{ellipsoïde}</math> <math display="block">C_o = - \frac{Dh \cdot h}{R + h}</math></li> <li>5- correction de représentation plane ou de projection - <math>C_r</math> ou <math>C_I</math> - <i>cette correction varie en fonction de la situation géographique du chantier, elle est obtenue avec « CIRCE ».</i></li> </ol>

formules	
<p><b>Transformer une Dh en Dr</b> (distance réduite à la projection)</p> <p><b>Coefficients de réduction et module</b></p> <p>- Coefficient de réduction à l'ellipsoïde:</p> $k_{\text{ellipsoïde}} = -1000 \cdot \frac{hm}{(Rm + hm)}$ <p>- Coefficient d'altération linéaire :</p> <p><math>kr</math> obtenu à l'aide du logiciel CIRCE</p> <p><math>hm</math> = hauteur moyenne au dessus de l'ellipsoïde  <math>Rm</math> = rayon moyen de la terre (6373 km)  avec, <math>Rm</math> et <math>hm</math> en m, et <math>k_{\text{ellipsoïde}}</math> et <math>kr</math> en m/km</p>	<p><b>Module m</b> (avec 6 décimales)</p> $m = 1 + \frac{k_{\text{ellipsoïde}} + kr}{1000}$ <p><b>Distance réduite à la projection</b></p> $Dr = Dh \cdot m$ <p><b>Dr et Dh en mètre</b></p>
<p><b>14- Correction de niveau apparent</b></p> <p>Pour des portées supérieures à 300m, il est nécessaire de prendre en compte deux erreurs systématiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- l'erreur due à la sphéricité de la terrestre</li> <li>- l'erreur due à la réfraction atmosphérique.</li> </ul> <p>Ces erreurs de sphéricité et de réfraction sont généralement associées en une seule erreur nommée <b>erreur de niveau apparent</b>.</p> <p>La correction globale est appelée correction de niveau apparent <b>Cna</b>.</p> <p>Cette correction est à ajouter à la dénivelée.</p> <p>expression simplifiée : <math>Cna = \frac{Dh^2}{15,2}</math></p> <p>Avec <math>Cna</math> en mètre, et <math>Dh</math> en km</p>	<p><b>15- Calcul d'une moyenne de plusieurs valeurs</b></p> <p><b>Moyenne arithmétique :</b></p> $\text{Moyenne des valeurs} = \frac{\text{valeur 1} + \text{valeur 2} + \dots + \text{valeur n}}{n}$ <p>avec : <math>n</math> = nombre de valeurs prises en compte</p> <p><b>Moyenne pondérée :</b></p> $\text{Moyenne des valeurs} = \frac{\sum Vi \cdot pi}{\sum pi}$ <p>avec : <math>V</math> = valeur (longueur, angle, etc.)  <math>pi</math> = poids attribué à la valeur <math>i</math></p>

croquis - schémas	formules
<p><b>16- le G0 (ou V0):</b></p>	<p>Le <b>G0</b> (ou <b>V0</b>) d'une station est le gisement du zéro du limbe de l'appareil : gisement de la droite passant par le centre du limbe et la graduation « zéro » de ce limbe.</p> $G0_{\text{station}} = G_{\text{is St-Ref1}} - \text{lecture sur Ref1}$ <p><b>Le Go moyen</b></p> <p>Pour obtenir une précision satisfaisante de l'orientation de la station (et la contrôler !) plusieurs références connues en coordonnées sont visées. Il faut alors calculer un <b>G0 moyen</b> à partir des différents G0 obtenus.</p> <p>Deux méthodes sont alors possibles :</p> <p>a - <b>Go moyen par moyenne arithmétique</b> : si les visées sont sensiblement d'égales longueurs.</p> $G0_{\text{moyen St}} = \frac{\sum G0_{\text{St-Ref i}}}{n}$ <p>avec <math>n</math> = nb de visées</p> <p>b - <b>Go moyen par moyenne pondérée</b> : si les visées sont d'inégales longueurs</p> <p>La pondération est alors proportionnelle à la longueur de chaque visée.</p> <p><i>Remarque</i> : plus une visée est longue plus son orientation angulaire est précise.</p> $G0_{\text{moyen St}} = \frac{\sum (G0_{\text{St-i}} \cdot Li)}{\sum Li}$ <p>avec :  <math>G0_{\text{St-i}}</math> = différents G0 calculés depuis la station  <math>Li</math> = longueur de chaque visée</p>
<p>Moyenne arithmétique :</p> $G0_{\text{St200}} = \frac{G0_{\text{St200-Ref1}} + G0_{\text{St200-Ref2}} + G0_{\text{St200-Ref3}}}{3}$ <p>Moyenne pondérée :</p> $G0_{\text{moyen St200}} = \frac{(G0_{\text{St-Ref1}} \cdot L1) + (G0_{\text{St-Ref2}} \cdot L2) + (G0_{\text{St-Ref3}} \cdot L3)}{L1 + L2 + L3}$	

croquis - schémas	formules
<p><b>17-Relèvement sur 3 points :</b> <i>méthode du barycentre</i></p> 	<p>S est inconnu et stationné</p> <p>A, B et C sont trois points connus</p> <p><math>\alpha + \beta + \gamma = 400</math> gon et <math>A + B + C = 200</math> gon</p> $ma = \frac{1}{(\cotan A - \cotan \alpha)}$ $mb = \frac{1}{(\cotan B - \cotan \beta)}$ $mc = \frac{1}{(\cotan C - \cotan \gamma)}$ $x_s = \frac{ma \cdot x_A + mb \cdot x_B + mc \cdot x_C}{ma + mb + mc}$ $y_s = \frac{ma \cdot y_A + mb \cdot y_B + mc \cdot y_C}{ma + mb + mc}$
<p><b>18-Relèvement sur 3 points :</b> <i>méthode de Delambre</i></p> 	<p>M est inconnu et stationné</p> <p>A, B et C sont trois points connus</p> $\tan G_{AM} = \frac{\left[\frac{(x_A - x_B)}{\tan \alpha} - \frac{(x_A - x_C)}{\tan \beta}\right] + (y_B - y_C)}{\left[\frac{(y_A - y_B)}{\tan \alpha} - \frac{(y_A - y_C)}{\tan \beta}\right] - (x_B - x_C)}$ <p><math>G_{BM} = G_{AM} + \alpha</math></p> $y_M = y_A + \frac{[(x_A - x_B) - (y_A - y_B) \cdot \tan G_{BM}]}{(\tan G_{BM} - \tan G_{AM})}$ $x_M = x_A + (y_M - y_A) \cdot \tan G_{AM}$

croquis - schémas	formules
<p><b>19- Changement de base :</b> <i>passer d'un système initial à un système final</i></p>  <p>-sur le schéma, XOY représente un système orthonormé plan-</p> <p>Avec sur le schéma :</p> <p><math>xO'y</math> = système initial</p> <p><math>XOY</math> = système final</p> <p><math>x_A</math> et <math>y_A</math> = coordonnées dans le système initial</p> <p><math>X_A</math> et <math>Y_A</math> = coordonnées dans le système final</p> <p><math>G_{AB}</math> = gisement dans le système final</p> <p><math>g_{AB}</math> = gisement dans le système initial</p>	<p>Eléments connus :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Les coordonnées <math>x</math> et <math>y</math> des points A et B sont connues dans le système initial.</li> <li>- Les coordonnées <math>X</math> et <math>Y</math> des points <math>o'</math> et A sont connues dans le système final.</li> </ul> <p>- Avec le gisement de l'axe <math>O'x</math> connu dans le système général : <math>GO'x = G_{AB} - g_{AB} + 100</math></p> <p>Eléments cherchés :</p> <p><math>XB = XA + \Delta x \cdot \sin Go'x - \Delta y \cdot \cos Go'x</math></p> <p><math>YB = YA + \Delta x \cdot \cos Go'x + \Delta y \cdot \sin Go'x</math></p> <p>Soit pour un cas général</p> <p><math>X_n = X(n-1) + \Delta x \cdot \sin Go'x - \Delta y \cdot \cos Go'x</math></p> <p><math>Y_n = Y(n-1) + \Delta x \cdot \cos Go'x + \Delta y \cdot \sin Go'x</math></p> <p>avec <math>\Delta x = x_n - x(n-1)</math> et <math>\Delta y = y_n - y(n-1)</math></p> <p>- Avec le gisement de l'axe <math>O'y</math> connu dans le système final : <math>GO'y = G_{AB} - g_{AB}</math></p> <p><math>X_n = X(n-1) + \Delta x \cdot \cos Go'y + \Delta y \cdot \sin Go'y</math></p> <p><math>Y_n = Y(n-1) + \Delta y \cdot \cos Go'y - \Delta x \cdot \sin Go'y</math></p>

## 20- Les Tolérances : Classes de précision (modèle standard)

arrêté 2003, modifié 2006

Pour tout échantillon comportant  $N$  objets géographiques, on calcule l'écart moyen en position  $E_{moy\ pos}$

Celui-ci est défini par la moyenne arithmétique des écarts en position  $E_{pos}$  relevés sur les points des objets géographiques.

On dit que la population dont est issu l'échantillon comportant  $N$  éléments est de classe de précision  $[xx]$  cm lorsque simultanément les **trois conditions a, b, et c** sont remplies :

a/ l'écart moyen en position de l'échantillon est inférieur à  $T$

$$E_{moy\ pos} \leq T \quad \text{avec} \quad T = [xx] \times \left(1 + \frac{1}{2 \times c^2}\right) cm$$

$C$  = coefficient de sécurité des mesures de contrôle donnée par le cahier des charges (usuellement  $C=2$ )

b/ le nombre  $N'$  d'écarts dépassant le premier seuil  $T_1 = k \times [xx] \times \left(1 + \frac{1}{2 \times c^2}\right)$

n'excède pas l'entier immédiatement supérieur à  $0,01 \times N + 0,232 \times \sqrt{N}$

$k$  = valeur indiquée dans la **Table 1** en fonction du nombre  $n$  de coordonnées caractérisant la position des objets géographiques.

**Table 1** : valeurs du coefficient  $k$  en fonction du nombre  $n$  de coordonnées caractérisant la position des objets géographiques considérés et suivant la même loi statistique.

$n$	1	2	3
$k$	3.23	2.42	2.11

c/ aucun écart en position  $E_{pos}$  dans l'échantillon n'excède le second seuil

$$T_2 = 1.5 \times k \times [xx] \times \left(1 + \frac{1}{2 \times c^2}\right) cm$$

ou  $T_2 = 1,5 \times T_1 cm$

Lorsque  $N < 5$ , aucun écart supérieur à  $T_2$  n'est admis (voir **Table 2**)

**Table 2** : Nombre d'écarts acceptés

$N$ (nombre d'éléments de l'échantillon)	1	5	14	45	86	133	185	241	299	360	423
	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à
	4	13	44	85	132	184	240	298	359	422	487
$N'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Selon les catégories de plans planimétriques et altimétriques, il est possible d'indiquer de façon approximative, les **classes de précision** suivantes relatives aux levés de détail et aux vérifications des plans :

Échelle du plan	Nature du plan	Catégorie planimétrique	Classe de précision (cm)
Toutes échelles	numérique	P1	2
1/200	régulier	P2	4
1/500	régulier	P3	10
1/1000	régulier	P4	20
1/2000	régulier	P5	40
1/5000	régulier	P6	100
Toutes échelles	expédié	P7	> 100

Catégorie altimétrique	Classe de précision (cm)
A1	1
A2	2
A3	4
A4	10
A5	20
A6	> 20